

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ, Е.В. СТРЕЖНЕВА

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА СУММАРНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Пусть D — квадрат с границей Γ . Рассмотрено четырехэлементное линейное суммарно-разностное уравнение в классе функций, голоморфных вне D и исчезающих на бесконечности. Коэффициенты уравнения и свободный член голоморфны в D . Решение ищется в виде интеграла типа Коши по Γ с неизвестной плотностью. Его граничное значение удовлетворяет условию Гёльдера на любом компакте из Γ , не содержащем вершин. В вершинах допускаются, самое большее, логарифмические особенности. Для регуляризации уравнения на Γ вводится кусочно-линейный сдвиг Карлемана, изменяющий ориентацию и имеющий две неподвижные точки. В вершинах он непрерывен, но его производная разрывна в них. Проведена регуляризация уравнения и найдено условие ее равносильности. Указаны различные приложения и обобщения.

Ключевые слова: суммарно-разностное уравнение, метод регуляризации, задача Карлемана.

УДК: 517.18

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-38-43

ВВЕДЕНИЕ

Пусть D — квадрат с вершинами $t_1 = -t_3 = -2^{-1}(1+i)$, $t_2 = -t_4 = 2^{-1}(1-i)$ и сторонами ℓ_j , $j = \overline{1, 4}$, пронумерованными в порядке обхода положительно ориентированной границы $\Gamma = \partial D$ ($t \in \ell_1 \Rightarrow \operatorname{Im} t = -2^{-1}$). Положим $L_1 = \bar{\ell}_1 \cup \bar{\ell}_3$, $L_2 = \bar{\ell}_2 \cup \bar{\ell}_4$. Введем функции $\sigma_1(z) = -i - z$, $\sigma_2(z) = z - 1$, $\sigma_3(z) = i - z$, $\sigma_4(z) = z + 1$. Ясно, что $\sigma_j(D) \cap \bar{D} = \emptyset$, $j = \overline{1, 4}$. Рассмотрим суммарно-разностное уравнение

$$(Vf)(z) \equiv f(\sigma_1(z)) + f(\sigma_3(z)) + G(z)[f(\sigma_2(z)) + f(\sigma_4(z))] = g(z), \quad z \in D, \quad (1)$$

при следующих предположениях.

1) Решение $f(z)$ ищем в классе функций, голоморфных вне $\bar{D}$ и исчезающих на бесконечности. Их граничные значения $f^-(t) \in H(\ell_j)$ (удовлетворяют условию Гёльдера на ℓ_j), $j = \overline{1, 4}$, а в вершинах допускаются только логарифмические особенности. Такой класс решений обозначим через B .

2) Коэффициент $G(z)$ голоморфен в полосе $|\operatorname{Im} z| < 2^{-1}$ и $G(z+1) = G(z)$. Его граничное значение $G^+(t) \in H(\Gamma)$, $G(t_j) = 1$, $j = \overline{1, 4}$, и $G(t) \neq 0$ при $t \in L_2$. Свободный член $g(z)$ голоморфен в D и его граничное значение $g^+ \in H(\Gamma)$.

Своеобразие уравнения (1) обусловлено тем, что множество $C \setminus \cup \sigma_j^{-1}(D)$, $j = \overline{1, 4}$, несвязно. Оно распадается на две связные компоненты, одна из которых содержит точку $z = 0$

(квадрат D), другая — бесконечно удаленную точку. Поэтому соотношение (1) нельзя считать выполненным в произвольной окрестности бесконечно удаленной точки и при дополнительном предположении, что коэффициенты задачи аналитически продолжимы через Γ . Даже в простейшем частном случае, когда $G(z) \equiv \text{const}$, это не позволяет применить к нему мощные классические методы исследования операторов свертки [1]. Более подробно по этому поводу см. замечание 2 в [2].

Заметим, что если в соотношении (1) заменить преобразования $\sigma_j(z)$, $j = 1, 3$, на $-\sigma_j(z)$, то получим частный случай разностного уравнения, рассмотренного в [3]. Другой тип суммарно-разностных уравнений, индуцированных произвольным четырехугольником, см. в [4].

В первом разделе данной статьи предложен метод регуляризации уравнения (1) и получено условие его равносильности. Во втором разделе указаны приложения полученных результатов и обсуждается вопрос об их обобщении.

1. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ

Пусть $\alpha(t) = \{\sigma_j(t), t \in \ell_j; j = \overline{1, 4}\}$. Ясно, что это непрерывный инволютивный сдвиг $\alpha(t) : \Gamma^+ \rightarrow \Gamma^-$ с двумя неподвижными точками $\pm 2^{-1}i$, производная которого разрывна в вершинах. Будем искать решение уравнения (1) в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\tau - z)^{-1} \varphi(\tau) d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \quad (2)$$

с неизвестной плотностью. Поскольку она определена с точностью до слагаемого $a^+(\tau)$, где функция $a(z)$ голоморфна в D , то без ограничения общности считаем, что

$$\varphi(\tau) = -\varphi[\alpha(\tau)]. \quad (3)$$

Действительно, соотношение (3) интерпретируем как безусловно разрешимую и не переопределенную краевую задачу Карлемана относительно неизвестной функции $a(z)$.

С учетом (2) имеем

$$(1) \Leftrightarrow E_\varphi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A(z, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g(z), \quad z \in D, \quad (4)$$

где

$$A(z, \tau) = (\tau + z + i)^{-1} + (\tau + z - i)^{-1} + G(z) \left[(\tau - z + 1)^{-1} + (\tau - z - 1)^{-1} \right].$$

С учетом (3) справедлив аналог формулы Ю.В. Сохоцкого

$$E_\varphi^+(t) = 2^{-1} \gamma_t \varphi(t) + E_\varphi(t), \quad t \in \Gamma,$$

причем $\gamma_t = \{1, t \in L_1; G(t), t \in L_2\}$, а особый интеграл $E_\varphi(t)$ получен формальной заменой в (4) $z \in D$ на $t \in \Gamma$ и понимается в смысле главного значения по Коши. Тогда $(E_\varphi^+)(t) - (E_\varphi^+)(\alpha(t)) = (T\varphi(t))$, где

$$(T\varphi)(t) \equiv \gamma_t \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = g^+(t) - g^+[\alpha(t)]. \quad (5)$$

Здесь

$$K(t, \tau) = A(t, \tau) - A[\alpha(t), \alpha(\tau)] \alpha'(\tau). \quad (6)$$

Лемма. Пусть $G^+(t) \in H_1(\Gamma)$ (удовлетворяет условию Липшица). Тогда ядро (6) ограничено.

Доказательство. Проверим это, перебрав все возможные случаи взаимного расположения точек τ и t на сторонах Γ . Для сокращения записи введем обозначения $u = \tau - t$, $v = \tau + t$. Достаточно рассмотреть два случая, когда $t \in \ell_1$ и $t \in \ell_2$.

1) $t \in \ell_1$. Возможны следующие подслучаи.

а) $\tau \in \ell_1$. Тогда

$$K(t, \tau) = (v - i)^{-1} - (v + 3i)^{-1} + [G^+(t) - G^+(-i - t)] \cdot [(u + 1)^{-1} + (u - 1)^{-1}].$$

Если ограниченность первых двух слагаемых в правой части очевидна, то ограниченность последнего слагаемого вытекает из условия $G^+(t) \in H_1(\Gamma)$ и периодичности $G(z)$. Например, при $\tau \rightarrow t_1 + 0$ и $t \rightarrow t_2 - 0$ имеем $|\tau - t + 1| > |t_1 - t + 1|$, поскольку точки τ и $t - 1$ лежат на одной прямой по разные стороны от вершины t_1 .

б) $\tau \in \ell_2$. Тогда

$$K(t, \tau) = (v - i)^{-1} + G^+(t) (u + 1)^{-1} - (u - 2i - 1)^{-1} - G^+(-i - t) (v - 2 + i)^{-1} + \\ + [1 - G^+(-i - t)] (v + i)^{-1} + [G^+(t) - G^+(-i - t)] (u - 1)^{-1}.$$

Ограниченность первых четырех слагаемых в правой части последнего соотношения очевидна. Что касается пятого слагаемого, то надо рассмотреть случай, когда $t \rightarrow t_1 + 0$, $\tau \rightarrow t_2 + 0$. Точки $-i - t$, t_2 , τ — это вершины прямоугольного треугольника и $|\tau + t + i| > t_2 + t + i$. С другой стороны, $|1 - G^+(-i - t)| = |G^+(t_2) - G^+(-i - t)| \leq \lambda(t_2 + t + i)$, где λ — постоянная Липшица, откуда и следует ограниченность. Ограниченность шестого слагаемого следует из того, что точки $\tau - 1$, t_1 , t — вершины прямоугольного треугольника, и далее аналогично тому, как получили ограниченность пятого слагаемого.

с) $\tau \in \ell_3$. Имеем

$$K(t, \tau) = G^+(t) [(u - 1)^{-1} + (u + 1)^{-1}] - G^+(-i - t) [(u + 1 - 2i)^{-1} + (u - 1 - 2i)^{-1}].$$

Все слагаемые здесь ограничены. Подслучай $\tau \in \ell_4$ идентичен подслучаю б).

2) $t \in \ell_2$. Возможны следующие подслучаи.

а) $\tau \in \ell_1$. Имеем

$$K(t, \tau) = (v - i)^{-1} + G(t) (u - 1)^{-1} - (u + i - 2)^{-1} - G(t) (v - 2 + i)^{-1} + (1 - G(t)) (v + i)^{-1} + \\ + (G(t) - 1) (u + 1)^{-1}.$$

Ограниченность первых четырех слагаемых очевидна. Пусть $\tau \rightarrow t_1 + 0$, $t \rightarrow t_2 + 0$. Ограниченность последних двух слагаемых следует из того, что точки $-i - \tau$, t_2 , t и $t - 1$, t_1 , τ — вершины прямоугольных треугольников.

б) $\tau \in \ell_2$. Тогда

$$K(t, \tau) = (v + i)^{-1} + (v - i)^{-1} - (v + i - 2)^{-1} - (v + 2 - i)^{-1}.$$

Все слагаемые ограничены.

с) $\tau \in \ell_3$. Этот подслучай аналогичен подслучаю а).

д) $\tau \in \ell_4$. Имеем $K(t, \tau) = G(t) [(u - 1)^{-1} - (u + 3)^{-1}]$.

Здесь ограниченность очевидна, что и завершает доказательство. $\square$

Замечание 1. Пусть $G^+(t) \in H_\mu(\Gamma)$, $\mu \in (0, 1)$. Тогда интегральный оператор

$$(B\varphi)(t) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau$$

имеет слабые полярные особенности в вершинах. Это следует из рассуждений, приведенных при доказательстве леммы, т. е. он вполне непрерывен в $L_2(\Gamma)$ ([5], с. 128).

Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. *T является каноническим оператором Фредгольма в $L_2(\Gamma)$.*

Простейшие свойства интегрального уравнения Фредгольма (5), ядро которого имеет структуру типа (6), достаточно хорошо известны (см., например, [6]). Приведем два из них.

А. Если уравнение (5) разрешимо, то существует его решение, удовлетворяющее условию (3).

В. Пусть фундаментальная система решений однородного уравнения $T\varphi = 0$ содержит n функций. Тогда m из них ($m \leq n$) можно считать удовлетворяющими условию (3), а остальные $n - m$ условий $\varphi[\alpha(t)] = \varphi(t)$.

Таким образом, уравнение (1) сведено к интегральному уравнению Фредгольма (5), т. е. проведена регуляризация. Выясним, является ли эта регуляризация равносильной. Пусть интегральное уравнение (5) разрешимо и $\varphi(t)$ — его решение со свойством (3). Отсюда

$$(5) \Rightarrow E_{\varphi}^{+}(t) - E_{\varphi}^{+}[\alpha(t)] = g^{+}(t) - g^{+}[\alpha(t)],$$

т. е. для функции $\psi(z) = E_{\varphi}(z) - g(z)$ получим $\psi^{+}(t) = \psi^{+}[\alpha(t)] \Rightarrow \psi(z) \equiv \text{const}$. Итак, $(5) \Rightarrow E_{\varphi}(z) = g(z) + C$. Условием равносильности регуляризации является

$$(E\varphi)(0) = g(0). \quad (7)$$

Теорема 2. *Пусть интегральное уравнение (5) имеет m условий разрешимости. Тогда уравнение (1) имеет $m + 1$ условий разрешимости.*

Действительно, к числу условий разрешимости интегрального уравнения (5) надо добавить также условие равносильности регуляризации (7).

2. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Уравнение (1) тесно связано с проблемой моментов для целых функций экспоненциального типа (ц.ф.э.т.). Действительно, $f(z) \in B$ является нижней функцией, ассоциированной по Борелю ([7], §1, п.1.) с ц.ф.э.т. $F(z)$ (верхней функцией). Квадрат D при этом рассматриваем как сопряженную индикаторную диаграмму. Преобразования $\sigma_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$, выбрасывают точку z из внутренней области D в ее внешность. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\arg \tau = \theta_j} F(\tau) \Omega_j(z, \tau) d\tau = g(z), \quad z \in D. \quad (8)$$

Здесь $\Omega_j(z, \tau) = \{\exp(-\tau \sigma_j(z)), j = 1, 3; G(z) \exp(-\tau \sigma_j(z)), j = 2, 4\}$, $\theta_1 = -\theta_3 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi$, $\theta_4 = 0$.

Пусть $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} z^k$ и радиус сходимости этого степенного ряда больше $\sqrt{2}/2$. При этом уравнение (1) с таким свободным членом разрешимо. Приравнявая коэффициенты Маклорена левой и правой частей равенства (8), получим

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\arg \tau = \theta_j} F(\tau) \frac{\partial^{(k)}}{\partial z^k} \Omega_j(z, \tau) \Big|_{z=0} d\tau = a_k. \quad (9)$$

Итак, при сделанных предположениях проблема моментов (9) имеет не более чем конечное число условий разрешимости.

В заключение рассмотрим обобщение исходной задачи. Заменяем, к примеру, сторону ℓ_1 на гладкую или кусочно-гладкую кривую d с концами в точках t_1 и t_2 . Пусть $\alpha(\tau) : d \rightarrow d$ с изменением ориентации и $\bar{d} \cap (\bar{\Gamma} \setminus \ell_1) = \{t_1, t_2\}$. Полученный криволинейный четырехугольник обозначим D_1 . Такая область интересна тем, что в отличие от D условия $z \in D_1$ и $-z \in D_1$ не равносильны. Если для кусочно-гладкой кривой ∂D_1 точки t_1 и t_2 не являются точками возврата, то теоремы 1 и 2 остаются справедливыми. Особый интерес представляет случай, когда коэффициент $G(z)$ не будет аналитически продолжимым ни через какой участок границы ∂D_1 . Ясно, что $d \subset \sigma_1(D)$.

Замечание 2. Сдвиг $\alpha(t)$ составлен из двух параболических преобразований σ_2 и σ_4 с неподвижной точкой на бесконечности и двух преобразований эллиптического типа σ_1 и σ_3 . Такой сдвиг можно ввести только в случае, когда четырехугольник является параллелограммом (в простейшем частном случае квадрат D). Рассмотрим всевозможные суперпозиции этих преобразований $\sigma_k[\sigma_j(z)]$; $k = \overline{1, 4}$; $j = \overline{1, 4}$. Используя их, можно регуляризовать целый ряд полиэлементных функциональных уравнений. По этому поводу более подробно см. работу [4], в которой в случае произвольного четырехугольника рассматривался сдвиг $\alpha(t)$, определенный следующим образом. На каждой стороне четырехугольника l с концами в точках a и b имели $\alpha(t) = a + b - t$, т. е. $\alpha(t) : l^+ \rightarrow l^-$. Итак, сдвиг $\alpha(t)$ был составлен только из преобразований эллиптического типа, в отличие от данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах* (Наука, М., 1982).
- [2] Aksenteva E.P., Garifyanov F.N. *Sum-difference equation for analytic functions generated by pentagon and its application*, Lobachevskii J. Math. **37** (2), 101–104 (2016), DOI: 10.1134/S1995080216020037.
- [3] Гарифьянов Ф.Н. *О регуляризации одного класса разностных уравнений*, Сиб. матем. журн. **42** (5), 1012–1017 (2001).
- [4] Гарифьянов Ф.Н. *Полиэлементные уравнения для функций, аналитических в плоскости с разрезами*, Сиб. матем. журн. **57** (2), 276–281 (2016).
- [5] Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям* (Физматгиз, М., 1959).
- [6] Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана*, Изв. вузов. Матем. **27** (4), 43–51 (1983).
- [7] Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* (Наука, М., 1967).

Фархат Нургаязович Гарифьянов

Казанский государственный энергетический университет,

ул. Красносельская, д. 51, г. Казань, 420066, Россия,

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Елена Васильевна Стрежнева

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ,

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: strezh@yandex.ru

F.N. Garif'yanov and E.V. Strezhneva

On the regularization of one class of sum-difference equations with periodic coefficients

Abstract. Let D be a square with the boundary Γ . A four-element linear sum-difference equation is considered in the class of functions that are holomorphic outside D and vanish at infinity. The coefficients of the equation and the free term are holomorphic in D . The solution is sought in the form of a Cauchy-type integral over Γ with unknown density. Its boundary values satisfy the Hölder condition on any compact set in Γ that does not contain vertices. At most, logarithmic singularities are allowed at the vertices. To regularize the equation on Γ , a piecewise linear Carleman shift is introduced, which changes the orientation and still has fixed points. It is continuous at the vertices, but its derivatives are discontinuous at them. The regularization of uranium was carried out and the condition for its equivalence was found. Various applications and generalizations are indicated.

Keywords: sum-difference equation, regularization method, Carleman problem.

Farkhat Nurgayazovich Garif'yanov

*Kazan State Power Engineering University,
51 Krasnosel'skaya str., Kazan, 420066 Russia,*

e-mail: f.garifyanov@mail.ru

Elena Vasil'evna Strezhneva

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI,
10 K. Marx str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: strezh@yandex.ru