Известия вузов. Математика
2024, №12, с. 20–37

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Д. ВАГЕЛА, С.Б. РАО

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ И ИХ СВОЙСТВА

Аннотация. Многочлен Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ является известным ортогональным многочленом. Изучены несколько новых свойств обобщенного многочлена Якоби $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ (Waghela D., Rao S.B. A Note on Sequence of Functions associated with the Generalized Jacobi polynomial, Researches Math. **31** (2), 1–18 (2023)) и его частного случая $P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$, которые, наряду с различными представлениями указанного обобщения, включают важное свойство ортогональности, порождающую функцию и результаты, связанные с интегральным представлением и дифференцированием обобщенного многочлена Якоби; также получен ряд известных преобразований этого обобщенного многочлена.

Ключевые слова: многочлен Якоби, обобщенный многочлен Якоби, формула Родригеса, ортогональность, преобразование Лапласа, преобразование Меллина, (бета-)преобразование Эйлера, преобразование Уиттакера.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-20-37

1. Введение и предварительные сведения

Некоторые известные многочлены специальных функций, а именно многочлены Лежандра, Чебышева и Гегенбауера, можно рассматривать как частные случаи важного и исторического многочлена Якоби, введенного Карлом Густавом Якоби (1804–1851) как решение дифференциального уравнения $\left(1-x^2\right)y''+\left(\beta-\alpha-\left(2+\alpha+\beta\right)x\right)y'+n\left(1+\alpha+\beta+n\right)y=0$ и приведенного в [1] в виде

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right]{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1;1+\alpha;\frac{1-x}{2}\right)$$
$$\left(x,\alpha,\beta\in\mathbb{C};\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \mathrm{Re}\,(\alpha)>(-1),\ \mathrm{Re}\,(\beta)>0\right);$$

вместе с этим второе линейно независимое решение дифференциального уравнения Якоби приведено в [2] в виде $Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^{-\alpha}{}_2F_1\left(-n-\alpha,n+\beta+1;1-\alpha;\dfrac{1-x}{2}\right)$.

Заметим, что $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ включает классическую гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$ [1]. Обобщением этой гипергеометрической функции Гаусса является функция ${}_2R_1\left(a,b;c;\tau;z\right)$, предложенная Н. Вирченко и др. [3] и заданная формулой

$${}_2R_1\left(a,b;c;\tau;z\right)=\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(b\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k\Gamma\left(b+\tau k\right)}{\Gamma\left(c+\tau k\right)}\left(\frac{z^k}{k!}\right),$$

Поступила в редакцию 02.07.2023, после доработки 14.04.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

где $\mathrm{Re}(a) > 0, \mathrm{Re}(b) > 0, \mathrm{Re}(c) > 0, \tau > 0$ для $|z| < 1$ и $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0, \tau > 0$ для $|z| = 1$; эта формула при $\tau = 1$ сводится к ${}_2F_1\,(a, b; c; z)$.

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых дополнительных свойств обобщенного многочлена Якоби $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$, предложенного Д. Вагелой и др. [4]; в их определении гипергеометрическая функция ${}_2F_1\,(a, b; c; z)$ в $P_n^{(\alpha,\ \beta)}(x)$ была заменена на обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_2R_1\,(a, b; c; \tau; z)$. Учитывая важность гипергеометрических функций в различных приложениях, стоит отметить, что это обобщение ${}_2R_1^{\tau}\,(z)$ было подробно изучено С.Б. Рао и др. [5]–[11].

В данной работе многочлен $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ дополнительно классифицирован для дальнейшего изучения в терминах многочленов типа I и типа II (см. уравнения (12), (13)), которые, соответственно, обозначены как $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ и $P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$.

Приведем здесь следующие определения и результаты [1], [12], необходимые нам для дальнейшего изучения различных свойств, связанных с $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ и $P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$:

$$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} (a)_n \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < 1,\ \mathrm{Re}\,(a) > 0)\,, \tag{1}$$

$$(\lambda)_{m+n} = (\lambda)_m \cdot (\lambda+m)_n \Rightarrow (\lambda+m)_n = \frac{(\lambda)_{m+n}}{(\lambda)_m}, \tag{2}$$

$$\frac{(-1)^m(-n)_m}{n!} = \frac{1}{(n-m)!} \quad (0 \leqslant m \leqslant n)\,, \tag{3}$$

$$(\lambda)_{n-k} = \frac{(-1)^k(\lambda)_n}{(1-\lambda-n)_k} \quad (0 \leqslant k \leqslant n)\,, \tag{4}$$

$$(\lambda)_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0; \\ \lambda\,(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)\,, & \text{если } n = 1\,, 2\,, 3\,\ldots; \\ \dfrac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda)} & (\lambda \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \ldots\}\,, \text{причем } \mathrm{Re}\,(\lambda) > 0)\,; \\ \dfrac{(-1)^n(-\lambda)!}{(-n-\lambda)!}, & \text{если } (\lambda = 0, -1, -2, \ldots \text{ и } 0 \leqslant n \leqslant (\,-\lambda\,))\,; \\ 0, & \text{если } (\lambda = 0, -1, -2, \ldots \text{ и } n > (-\lambda))\,. \end{cases} \tag{5}$$

Преобразование Меллина [13] вещественнозначной функции $f(x)$, заданной на $(0, \infty)$, определяется формулой

$$M[f(x); s] = \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx = f^*(s), \tag{6}$$

в то время как обратное преобразование задается формулой

$$f(x) = M^{-1}[f^*(s); x] = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s) x^{-s}\, ds \quad (\mathrm{Re}(s) > 0), \tag{7}$$

причем имеет место следующая

Теорема о существовании (преобразование Меллина; [13], с. 273). *Пусть $f^*\,(s)$ — функция комплексной переменной $s = \sigma + i\tau$, регулярная в полосе $S = \{s : a < \sigma < b\}$, причем* *для любого произвольно малого положительного числа* η *значение* $f^*(s)$ *стремится к нулю равномерно при* $|\tau| \to \infty$ *в полосе* $a+\eta \leqslant \sigma \leqslant b-\eta$. *Тогда интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^*(\sigma+i\tau)\,d\tau$ *сходится абсолютно для любого значения* σ *из открытого интервала* (a,b). *Более того, если для положительного вещественного значения* x *и фиксированного числа* $c \in (a,b)$ *определить* $f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} f^*(s)\,ds$, *то в полосе* S *имеем* $f^*(s) = \int\limits_{0}^{\infty} x^{s-1} f(x) dx$.

(Бета-)преобразование Эйлера функции $f(t)$ при $\mathrm{Re}(a,b)>0$ задается (см. [13]) формулой

$$B\{f(t):a,b\} = \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} f(t)dt. \tag{8}$$

Преобразование Уиттакера [14]:

$$W(f(x);\nu,\lambda,\mu) = \int\limits_0^\infty e^{-t/2} t^{\nu-1}\cdot W_{\lambda,\mu}(t) f(t)dt, \tag{9}$$

где $\mathrm{Re}(\nu)>0$, $W_{\lambda,\mu}(z)$ — функция Уиттакера, определяемая формулой

$$W_{\lambda,\mu}(z) = \frac{e^{\frac{-z}{2}} z^\lambda}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\lambda+\mu\right)} \cdot \int\limits_0^\infty t^{-\lambda-\frac{1}{2}+\mu}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}+\mu} e^{-t}dt,$$

где $\mathrm{Re}\left(\lambda-\dfrac{1}{2}-\mu\right) \leq 0$ и $\lambda-\dfrac{1}{2}-\mu$ не является целым числом.

Э.М. Райт обобщил гипергеометрическую функцию ${}_p\Psi_q$ (см. [12]):

$${}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p);z\\(\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q);\end{array}\right] = \sum_{k=0}^\infty \frac{\prod\limits_{i=1}^p \Gamma(\alpha_i+A_i k)}{\prod\limits_{j=1}^q \Gamma(\beta_j+B_j k)}\frac{z^k}{k!}, \tag{10}$$

где A_i, B_j — положительные вещественные числа такие, что $1+\sum\limits_{j=1}^q B_j - \sum\limits_{i=1}^p A_i > 0$.

Обратим внимание также на следующий результат.

Лемма 1 ([3]). *Обобщенная гипергеометрическая функция* ${}_2R_1(a,b;c;\tau;z)$ *имеет следующее важное интегральное представление*:

$${}_2R_1(a,b;c;\tau;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int\limits_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^\tau)^{-a}dt, \tag{11}$$

где $\mathrm{Re}(a)>0$, $\mathrm{Re}(b)>0$, $\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)$, $\tau>0$ *для* $|z|<1$ *и* $\mathrm{Re}(c-a-b)>0$, $\tau>0$ *для* $|z|=1$.

2. Обобщенные многочлены Якоби и их представления

Обобщенный многочлен Якоби типа I ([4]):

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right] {}_2R_1\left(-n, \alpha+\beta+n+1; 1+\gamma; \tau; \frac{1-x}{2}\right), \tag{12}$$

где $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ и $\tau > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$, $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$.

Подставляя $\tau = 1$ в определение обобщенного многочлена Якоби (обобщенный многочлен Якоби типа I), предложенного Д. Вагелой и др. [4], мы задаем

Обобщенный многочлен Якоби типа II:

$$P_{n}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right] {}_2R_1\left(-n, \alpha+\beta+n+1; 1+\gamma; 1; \frac{1-x}{2}\right), \tag{13}$$

где $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$, $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$.

Замечание 1. Если взять $\gamma = \alpha$ в обобщении типа II, то оно сведется к классическому многочлену Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Различные представления обобщенных многочленов Якоби. Рассмотрим два различных представления (14), (15) многочлена типа I (12) и одно представление (17) обобщенного многочлена Якоби типа II (13).

Теорема 1 (тип I, представление (i)). *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$; $\tau > 0$; $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$

$$P_{n,\,\tau}^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+1)_n \Gamma\,(1+\alpha+\beta+n+\tau k)\,\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma\,(1+\alpha+\beta+n)\,\Gamma(1+\gamma+\tau k) k!(n-k)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно (12) имеем

$$P_{n,\,\tau}^{(\alpha,\gamma,\,\beta)}(x) = \left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right] \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma\,(n+\alpha+\beta+1+\tau k)\,\Gamma\,(1+\gamma)}{\Gamma\,(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma\,(1+\gamma+\tau k)} \frac{((1-x)/2\,)^k}{k!}.$$

Из формулы (3) сразу получаем

$$P_{n,\,\tau}^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\alpha+1)_n \Gamma\,(n+\alpha+\beta+1+\tau k)\,\Gamma\,(1+\gamma)\,((x-1)/2\,)^k}{\Gamma\,(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma\,(1+\gamma+\tau k)\,k!\,(n-k)!},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 2 (тип I, представление (ii)). *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$; $\tau > 0$; $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$

$$P_{n,\,\tau}^{(\alpha,\,\gamma,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(1+\gamma)(\alpha+1)_n}{\Gamma\,(1+\alpha+\beta+n)\,n!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma\,(1+\alpha+\beta+n+\tau(n-k))}{\Gamma(1+\gamma+\tau(n-k))k!} \left(\frac{2}{1-x}\right)^k. \tag{15}$$

Доказательство. Учитывая (12), заметим, что

$$P_{n,\,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right] \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma\,(n+\alpha+\beta+1+\tau k)\,\Gamma\,(1+\gamma)}{\Gamma\,(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma\,(1+\gamma+\tau k)} \frac{((1-x)/2\,)^k}{k!}.$$

Изменяя порядок слагаемых в выражении выше $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n-k}\right)$, получаем

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_{n-k}\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1+\tau\left(n-k\right)\right)\Gamma\left(1+\gamma\right)}{\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1\right)\Gamma\left(1+\gamma+\tau\left(n-k\right)\right)} \frac{((1-x)/2)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Из тождества (4) следует

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+n} n!\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1+\tau\left(n-k\right)\right)\Gamma\left(1+\gamma\right)}{\Gamma\left(n+\alpha+\beta+1\right)\Gamma\left(1+\gamma+\tau\left(n-k\right)\right)k!} \frac{((1-x)/2)^{n-k}}{(n-k)!},$$

отсюда, применяя (3), получаем (15). □

Лемма 2. *При* $\mathrm{Re}(a) > 0,\ \mathrm{Re}(b) > 0,\ \mathrm{Re}(c) > 0$ *и* $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$

$${}_2R_1(a,b;c;1;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}.$$

Доказательство. Полагая $z = 1,\ \tau = 1$ в тождестве (11) леммы 1, имеем

$${}_2R_1(a,b;c;1;1) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}.$$

□

Лемма 3. *При* $\mathrm{Re}(a) > 0,\ \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0;\ |z| < 1,\ \left|\frac{z}{1-z}\right| < 1$

$$(1-z)^{-a} {}_2R_1\left(a, c-b; c; 1; \frac{-z}{1-z}\right) = {}_2R_1(a,b;c;1;z). \tag{16}$$

Доказательство. Используя (1) в левой части равенства (16), получаем

$$(1-z)^{-a} {}_2R_1\left(a, c-b; c; 1; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k\Gamma(c-b+k)\Gamma(c)(-1)^k z^k}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+k)k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+k)_n z^n}{n!},$$

отсюда в силу (2)

$$(1-z)^{-a} {}_2R_1\left(a, c-b; c; 1; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(c-b+k)\Gamma(c)(a)_{n+k}(-1)^k z^{n+k}}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+k)k!\,n!}.$$

Применяя формулу $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{\infty} A\left(k,n\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} A\left(k,n-k\right)$ (как в [12]), имеем

$$(1-z)^{-a} {}_2R_1\left(a, c-b; c; 1; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(c-b+k)\Gamma(c)(a)_n(-1)^k z^n}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+k)k!\,(n-k)!}.$$

Согласно (3) непосредственно получаем

$$(1-z)^{-a} {}_2R_1\left(a, c-b; c; 1; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k\Gamma(c-b+k)\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c+k)k!} \frac{(a)_n z^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} {}_2R_1\left(-n,\ c-b; c; 1; 1\right) \frac{(a)_n z^n}{n!}.$$

Следовательно, ввиду леммы 2 формула (16) доказана. □

Теорема 3 (тип II, представление (i))**.** *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\gamma) > (-1)$ *и* $\operatorname{Re}(\beta) > 0$

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2R_1\left(-n, \gamma-\alpha-\beta-n; 1+\gamma; 1; \frac{x-1}{x+1}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Требуемое тождество (17) получается непосредственным применением вышеописанной леммы 3 к обобщенному многочлену Якоби типа II. □

Замечание 2. Выражение (17) может быть записано в виде рядов

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n\,(\gamma-\alpha-\beta-n)_m(-1)^m}{(1+\gamma)_m m!\,(n-m)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-m}, \tag{18}$$

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n(1-\gamma+\alpha+\beta)_n}{(1+\gamma)_m(1-\gamma+\alpha+\beta)_{n-m}m!(n-m)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-m}. \tag{19}$$

Доказательство тождества (18). Имеем

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2R_1\left(-n, \gamma-\alpha-\beta-n; 1+\gamma; 1; \frac{x-1}{x+1}\right),$$

откуда, используя (3), непосредственно получаем требуемое тождество (18).

Доказательство тождества (19). Учитывая равенство (4), подстановка

$$(\gamma-\alpha-\beta-n)_m = \frac{(-1)^m(1-\gamma+\alpha+\beta)_n}{(1-\gamma+\alpha+\beta)_{n-m}}$$

в выражение (18) сразу влечет (19). Доказательство завершено.

3. Основные результаты (часть I)

Теорема 4 (формула типа Родригеса)**.** *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\operatorname{Re}(\alpha)$, $\operatorname{Re}(\gamma) > (-1)$ *и* $\operatorname{Re}(\beta) > (-1)$ *обобщенный многочлен Якоби типа* II $P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$, *заданный формулой* (13), *может быть представлен в виде следующей формулы типа Родригеса:*

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n(1+\alpha)_n(1-x)^{-\gamma}(1+x)^{-\beta}}{2^n\,(1+\gamma)_n\,n!}D^n\left[(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]. \tag{20}$$

Доказательство. Согласно (19) левая часть требуемого тождества может быть упрощена и записана в виде

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n\,(1-\gamma+\alpha+\beta)_n(x-1)^m(x+1)^{n-m}}{2^n(1+\gamma)_m(1-\gamma+\alpha+\beta)_{n-m}m!\,(n-m)!} = \frac{(x-1)^{-\gamma}(x+1)^{-\beta}(1+\alpha)_n}{2^n\,(1+\gamma)_n}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n} \frac{(1+\gamma)_n\,(1-\gamma+\alpha+\beta)_n(x-1)^{m+\gamma}(x+1)^{n-m+\beta}}{(1+\gamma)_m(1-\gamma+\alpha+\beta)_{n-m}m!\,(n-m)!}. \tag{21}$$

Пусть теперь s и k — неотрицательные целые числа, тогда

$$\frac{d^s}{dx^s} \equiv D^s\left(x^{k+a}\right) = (k+a)(k+a-1)\dots(k+a-s+1)x^{k-s+a} = \frac{(1+a)_k}{(1+a)_{k-s}}(x)^{k-s+a},$$

отсюда

$$D^m\left((x+1)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right) = \frac{(1-\gamma+\alpha+\beta)_n}{(1-\gamma+\alpha+\beta)_{n-m}}(x+1)^{n-m+\beta-\gamma+\alpha}$$

и

$$D^{n-m}\left((x-1)^{n+\gamma}\right)=\frac{(1+\gamma)_n}{(1+\gamma)_m}(x-1)^{m+\gamma}.$$

Используя эти результаты, мы можем записать (21) в виде

$$P_n^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)=\frac{(x-1)^{-\gamma}(x+1)^{-\beta}(1+\alpha)_n}{2^n\,(1+\gamma)_n\,n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\Big[D^m\left\{(x+1)^{n+\beta}\right\}\Big]\Big[D^{n-m}\left\{(x-1)^{n+\gamma}\right\}\Big].$$

Тогда по теореме Лейбница

$$P_n^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)=\frac{(x-1)^{-\gamma}(x+1)^{-\beta}(1+\alpha)_n}{2^n\,(1+\gamma)_n\,n!}D^n\left[(x-1)^{n+\gamma}(x+1)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right].$$

Мы можем переписать эту формулу в виде

$$P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n(1-x)^{-\gamma}(1+x)^{-\beta}(1+\alpha)_n}{2^n\,(1+\gamma)_n\,n!}D^n\left[(1-x)^{n+\gamma}(x+1)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right],$$

что совпадает с (20). □

Ортогональность обобщенного многочлена Якоби типа II. Обобщенный многочлен Якоби типа II является ортогональным многочленом над интервалом $(-1,1)$ по отношению к весовой функции $(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}$.

Теорема 5.

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\gamma;\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)dx=$$

$$=\begin{cases}0, \quad (m\neq n);\\ \dfrac{\left[(1+\alpha)_n\right]^2(\alpha+\beta+1)_{2n}2^{\alpha+\beta+1}\Gamma\left(1+n+\gamma\right)\Gamma\left(1+n+\beta-\gamma+\alpha\right)}{\left[(1+\gamma)_n\right]^2 n!(\alpha+\beta+1)_n\Gamma\left(2+2n+\alpha+\beta\right)} \quad (m=n),\end{cases}$$

где $\mathrm{Re}(\alpha)>-1,\ \mathrm{Re}(\gamma)>-1,\ \mathrm{Re}(\beta)>-1.$

Доказательство. Введем следующие обозначения:

$$\psi=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)\,P_m^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)\,dx \quad (m\neq n) \tag{22}$$

и

$$\psi_1=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)\,P_{m=n}^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)\,dx \quad (m=n).$$

Случай (i). Если $m\neq n$, то в силу формулы (20) получаем

$$\psi=\int_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)\,P_m^{(\alpha,\,\gamma\,\beta)}(x)\,dx=$$

$$=\frac{(-1)^n(1+\alpha)_n}{2^n\,(1+\gamma)_n\,n!}\int_{-1}^{1}\left\{D^n\left[(1-x)^{n+\gamma}(x+1)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]\right\}P_m^{(\alpha,\,\gamma,\,\beta)}(x)dx.$$

Чтобы подсчитать этот интеграл, используем интегрирование по частям, взяв $P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ в качестве первой и $D^n\left[(1-x)^{n+\gamma}(x+1)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]$ в качестве второй функций. Тогда

$$\psi=\frac{(-1)^n(1+\alpha)_n}{2^n(1+\gamma)_n n!}P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\left\{\left\{D^{n-1}\left[(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]\right\}_{-1}^{1}\right\}-$$

$$-\frac{(-1)^n(1+\alpha)_n}{2^n(1+\gamma)_n n!}\int_{-1}^{1}D\left[P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}\right]D^{n-1}\left[(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]dx.$$

При условиях $\mathrm{Re}(\alpha)>-1,\ \mathrm{Re}(\gamma)>-1$ и $\mathrm{Re}(\beta)>-1$ первый член исчезает, и мы получаем

$$\psi=-\frac{(-1)^n(1+\alpha)_n}{2^n(1+\gamma)_n n!}\int_{-1}^{1}D\left[P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}\right]D^{n-1}\left[(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]dx.$$

Повторяя этот процесс интегрирования n раз, получаем другую форму (22):

$$\psi=\frac{(1+\alpha)_n}{2^n(1+\gamma)_n n!}\int_{-1}^{1}\left(D^n\left[P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}\right]\right)\left[(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\right]dx,\ (\mathrm{as}(-1)^{2n}=1).\quad(23)$$

Если $n>m$, то множитель $D^n\left[P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}\right]$ в (23) равен нулю, поскольку $P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}$ — многочлен степени m. Следовательно, $\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\,P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\,dx=0$. Если же $n<m$, то вместо подстановки значения $(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ подставим значение $(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ и применим ту же процедуру, получив, что выражение ψ снова равно нулю. Итак, мы приходим к соотношению ортогональности

$$\psi=\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{\gamma}(1+x)^{\beta}P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\,P_m^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\,dx=0\quad(m\neq n)$$

при условиях $\mathrm{Re}(\alpha)>-1,\ \mathrm{Re}(\gamma)>-1$ и $\mathrm{Re}(\beta)>-1$.
Случай (ii). Подсчитаем значение интеграла ψ_1 (при $m=n$).
В силу (23)

$$\psi_1=\frac{(1+\alpha)_n}{2^n(1+\gamma)_n n!}\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}D^n\left[P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\right]dx.$$

Однако

$$D^n\left[P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\right]=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}D^n\left\{{}_2R_1\left(-n,\,n+\alpha+\beta+1;\,\gamma+1;1;\frac{1-x}{2}\right)\right\}.$$

Используя результат $D\left({}_2R_1(a,b;c;1;x)\right)=\left(\frac{a\cdot b}{c}\right){}_2R_1(a+1,b+1;c+1;1;x)$ (как в [1]) рекурсивно n раз, получаем

$$\frac{(1+\alpha)_n}{n!}D^n\left\{{}_2R_1\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\,\gamma+1;1;\frac{1-x}{2}\right)\right\}=$$

$$=\left(\frac{-1}{2}\right)^n\frac{(1+\alpha)_n(-n)_n(n+\alpha+\beta+1)_n}{(\gamma+1)_n n!}\cdot{}_2R_1\left(0,2n+\alpha+\beta+1;\gamma+1+n;1;\frac{1-x}{2}\right).$$

Согласно (2) и (5) имеем

$$D^n\left[P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\right]=\frac{(1+\alpha)_n(\alpha+\beta+1)_{2n}}{2^n(\gamma+1)_n(\alpha+\beta+1)_n}.$$

Следовательно,

$$\psi_1=\frac{(1+\alpha)_n}{2^n\,(1+\gamma)_n\,n!}\int\limits_{-1}^{1}(1-x)^{n+\gamma}(1+x)^{n+\beta-\gamma+\alpha}\frac{(1+\alpha)_n(\alpha+\beta+1)_{2n}}{2^n(\gamma+1)_n(\alpha+\beta+1)_n}dx.$$

Чтобы подсчитать интеграл справа, сделаем подстановку $1+x=2y$, получим

$$\psi_1=\frac{\left[(1+\alpha)_n\right]^2(\alpha+\beta+1)_{2n}}{2^{2n}\left[(1+\gamma)_n\right]^2 n!(\alpha+\beta+1)_n}\int\limits_{0}^{1}(2-2y)^{n+\gamma}(2y)^{n+\beta-\gamma+\alpha}2dy=$$

$$=\frac{\left[(1+\alpha)_n\right]^2(\alpha+\beta+1)_{2n}2^{\alpha+\beta+1}}{\left[(1+\gamma)_n\right]^2 n!(\alpha+\beta+1)_n}\int\limits_{0}^{1}(1-y)^{(n+\gamma+1)-1}(y)^{(n+\beta-\gamma+\alpha+1)-1}dy.$$

Следовательно,

$$\psi_1=\frac{\left[(1+\alpha)_n\right]^2(\alpha+\beta+1)_{2n}2^{\alpha+\beta+1}\Gamma\left(1+n+\gamma\right)\Gamma\left(1+n+\beta-\gamma+\alpha\right)}{\left[(1+\gamma)_n\right]^2 n!(\alpha+\beta+1)_n\Gamma\left(2+2n+\alpha+\beta\right)}.$$

□

4. Основные результаты (часть II)

Порождающее соотношение.

Лемма 4. *При* $x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, $\tau>0$; $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma)>(-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta)>0$

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(\alpha+1)_n\Gamma(1+\gamma)}{(1+\alpha+\beta)_n}\frac{(1+\alpha+\beta)_{\tau m+n}}{(n-m)!\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m. \tag{24}$$

Доказательство.

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)=\left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right]{}_2R_1\left(-n,\ n+\alpha+\beta+1;\ \gamma+1;\ \tau;\ \frac{1-x}{2}\right)=$$

$$=\left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m(-n)_m\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau m)}{\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m.$$

Применяя (3) к тождеству выше, имеем

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)=(\alpha+1)_n\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\sum_{m=0}^{n}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau m)}{(n-m)!\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{(\alpha+1)_n\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau m)}{(n-m)!\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m,$$

откуда, используя (2), получаем требуемое тождество (24). □

Теорема 6. *Порождающая функция для обобщенного многочлена Якоби имеет вид*

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\tau+1)^{(\tau+1)m}\prod_{q=1}^{\tau+1}\left(\frac{\alpha+\beta+q}{\tau+1}\right)_m}{\tau^{\tau m}\prod_{s=1}^{\tau}\left(\frac{\gamma+s}{\tau}\right)_m m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\Big(t(1-t)^{-(\tau+1)}\Big)^m=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)\,t^n, \tag{25}$$

где $x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C},\ \tau>0;\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \mathrm{Re}\,(\alpha),\ \mathrm{Re}\,(\gamma)>(-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta)>0.$

Доказательство. Применяя формулу $(a)_{nk}=k^{nk}\prod_{s=1}^{k}\left(\frac{a+s-1}{k}\right)_n$ $(n=0,1,2,3,\ldots)$ (как в [12]) к левой части требуемого тождества (25), получаем следующее упрощенное выражение:

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\tau+1)^{(\tau+1)m}\prod_{q=1}^{\tau+1}\left(\frac{\alpha+\beta+q}{\tau+1}\right)_m}{\tau^{\tau m}\prod_{s=1}^{\tau}\left(\frac{\gamma+s}{\tau}\right)_m m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\Big(t(1-t)^{-(\tau+1)}\Big)^m=$$

$$=(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\gamma)(1+\alpha+\beta)_{(\tau+1)m}}{\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m t^m(1-t)^{-(\tau+1)m}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(1-t)^{-1-\alpha-\beta-(\tau+1)m}\frac{\Gamma(1+\gamma)(1+\alpha+\beta)_{(\tau+1)m}}{\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m t^m.$$

Очевидно, применив (1) к выражению выше, сразу имеем

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\tau+1)^{(\tau+1)m}\prod_{q=1}^{\tau+1}\left(\frac{\alpha+\beta+q}{\tau+1}\right)_m}{\tau^{\tau m}\prod_{s=1}^{\tau}\left(\frac{\gamma+s}{\tau}\right)_m m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\Big(t(1-t)^{-(\tau+1)}\Big)^m=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta+(\tau+1)m)_n t^n}{n!}\right)\frac{\Gamma(1+\gamma)(1+\alpha+\beta)_{(\tau+1)m}}{\Gamma(1+\gamma+\tau m)\,m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m t^m.$$

Это выражение можно упростить с помощью формул (2) и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}B\,(m,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}B\,(m,n+m)$$

(как в [12]) и привести к виду

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\tau+1)^{(\tau+1)m}\prod_{q=1}^{\tau+1}\left(\frac{\alpha+\beta+q}{\tau+1}\right)_m}{\tau^{\tau m}\prod_{s=1}^{\tau}\left(\frac{\gamma+s}{\tau}\right)_m m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^m\Big(t(1-t)^{-(\tau+1)}\Big)^m=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(1+\gamma)(1+\alpha+\beta)_{\tau m+n}}{(n-m)!\Gamma(1+\gamma+\tau m)\, m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{m} t^{n}$$

или

$$(1-t)^{-1-\alpha-\beta}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\tau+1)^{(\tau+1)m}\prod\limits_{q=1}^{\tau+1}\left(\dfrac{\alpha+\beta+q}{\tau+1}\right)_m}{\tau^{\tau m}\prod\limits_{s=1}^{\tau}\left(\dfrac{\gamma+s}{\tau}\right)_m m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{m}\left(t(1-t)^{-(\tau+1)}\right)^{m} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} \frac{(1+\alpha+\beta)_n}{(1+\alpha)_n}\frac{(\alpha+1)_n\Gamma(1+\gamma)}{(1+\alpha+\beta)_n}\frac{(1+\alpha+\beta)_{\tau m+n}}{(n-m)!\Gamma(1+\gamma+\tau m)\, m!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{m} t^{n}.$$

Ввиду леммы 4 получаем (25). □

5. Основные результаты (часть III)

Некоторые результаты, касающиеся дифференцирования и интегрирования $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$.

Теорема 7. *При* $x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, $\tau>0$; $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma)>(-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta)>0$

$$\frac{\tau(1-x)}{\gamma+1}\frac{d}{dx}P_{n,\tau}^{(\alpha,1+\gamma,\beta)}(x) = P_{n,\tau}^{(\alpha,1+\gamma,\beta)}(x) - P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x). \tag{26}$$

Доказательство.

$$\tau\frac{d}{dx}P_{n,\tau}^{(\alpha,1+\gamma,\beta)}(x) =$$

$$= \tau\left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right]\frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)}{\Gamma(\gamma+2+\tau k)k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{k}\right] =$$

$$= \tau\left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\right]\left[\frac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)}{\Gamma(\gamma+2+\tau k)k!}k\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{k-1}\right].$$

Умножая теперь обе части равенства на $\left(\dfrac{1-x}{2}\right)$, получаем

$$\tau\left(\frac{1-x}{2}\right)\frac{d}{dx}P_{n,\tau}^{(\alpha,1+\gamma,\beta)}(x) =$$

$$= \frac{\tau(1+\alpha)_n(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1)}{n!\cdot\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)\,k}{\Gamma(\gamma+2+\tau k)k!(-2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{(1+\alpha)_n(\gamma+1)\Gamma(\gamma+1)}{n!\cdot\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)}{\Gamma(\gamma+1+\tau k)k!(-2)}\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{k-1} +$$

$$+ \frac{(\gamma+1)\,(1+\alpha)_n\Gamma(\gamma+2)}{2\,(n!)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)}{\Gamma(\gamma+2+\tau k)k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)^{k-1} =$$

$$= \frac{-(\gamma+1)}{2}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) + \frac{(\gamma+1)}{2}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+1,\beta)}(x),$$

что может быть переписано в виде (26). □

Теорема 8. *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$; $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^\gamma P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2\omega x^\tau)\right] = x^{\gamma-m}\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1-m)}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+1-m,\beta)}(1-2\omega x^\tau).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^\gamma P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2\omega x^\tau)\right] =$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^m x^\gamma \left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right] \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)\omega^k x^{\tau k}}{\Gamma(\gamma+1+\tau k)k!} =$$

$$= x^{\gamma-m}\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1-m)} \left\{\frac{(\alpha+1)_n}{n!}{}_2R_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \gamma+1-m; \tau; \omega x^\tau\right)\right\} =$$

$$= x^{\gamma-m}\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(\gamma+1-m)}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+1-m,\beta)}(1-2\omega x^\tau).$$

□

Теорема 9. *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$; $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$

$$\frac{\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(\delta)} \int_0^1 u^\gamma (1-u)^{\delta-1} P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xu^\tau)du = \Gamma(1+\gamma)P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+\delta,\beta)}(1-2x). \tag{27}$$

Доказательство. Покажем, что правая часть равенства (27) равна его левой части:

$$\frac{\Gamma(\gamma+1+\delta)}{\Gamma(\delta)}\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\times$$

$$\times \int_0^1 u^\gamma (1-u)^{\delta-1} \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma(\alpha+\beta+n+1+\tau k)}{\Gamma(1+\gamma+\tau k)\cdot k!} x^k u^{\tau k} du =$$

$$= \Gamma(1+\gamma)P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+\delta,\beta)}(1-2x).$$

Получили требуемое. □

Теорема 10. *При* $x, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, $\tau > 0$; $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$

$$\int_0^z u^\gamma P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xu^\tau)\, du = \frac{z^{\gamma+1}}{\gamma+1} P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+1,\beta)}(1-2xz^\tau). \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим левую часть равенства (28)

$$\int_0^z u^\gamma P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xu^\tau)du =$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \int_0^z u^\gamma \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k)}{\Gamma(1+\gamma+\tau k)\, k!} x^k u^{\tau k} du =$$

$$= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k)}{\Gamma(1+\gamma+\tau k)\cdot k!} x^k \frac{z^{\gamma+\tau k+1}}{(1+\gamma+\tau k)} =$$

$$= \frac{z^{\gamma+1}}{(\gamma+1)} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \frac{\Gamma(\gamma+2)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma(n+\alpha+\beta+1+\tau k)}{\Gamma(2+\gamma+\tau k)\cdot k!} x^k z^{\tau k} =$$

$$= \frac{z^{\gamma+1}}{(\gamma+1)} P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma+1,\beta)}(1-2xz^{\tau}).$$

□

6. Интегральные преобразования обобщенного многочлена Якоби

Теорема 11 (преобразование Лапласа)**.** *При* $x,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$; $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha), \mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$, $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$; $\tau, c, \sigma > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{c-1} P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^{\sigma}) dt = \frac{(1+\alpha)_n \Gamma(r+1) s^{-c}}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} {}_2\psi_2 \left[\begin{array}{l} (n+1+\alpha+\beta,\tau),(c,\sigma);\, \frac{-x}{s^{\sigma}} \\ (n+1,-1),(1+\gamma,\tau); \end{array} \right].$$

Доказательство.

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{c-1} P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^{\sigma}) dt =$$

$$= \frac{[(1+\alpha)_n]}{n!} \left[\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!} \frac{\Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k) x^k}{\Gamma(\gamma+1+\tau k) k!} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\sigma k + c - 1} dt \right] =$$

$$= (1+\alpha)_n \frac{\Gamma(\gamma+1) s^{-c}}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k)\Gamma(\sigma k + c)}{\Gamma\,(n-k+1)\Gamma(1+\gamma+\tau k) k!} \left(\frac{-x}{s^{\sigma}} \right)^k,$$

продолжая это равенство с использованием (10), получаем

$$\frac{(1+\alpha)_n \Gamma(\gamma+1) s^{-c}}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} {}_2\psi_2 \left[\begin{array}{l} (n+1+\alpha+\beta,\tau),(c,\sigma);\, \frac{-x}{s^{\sigma}} \\ (n+1,-1)\,,(1+\gamma,\tau); \end{array} \right].$$

□

Лемма 5 (интегральное представление Меллина–Барнса для $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$)**.** *Если* x, α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$; $\tau \in \mathbb{R}^{+}$; $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma) > (-1)$ *и* $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$, *то* $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ *можно представить в виде интеграла Меллина–Барнса*:

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \left[(\alpha+1)_n\right] \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Gamma\,(s)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n-\tau s)}{\Gamma\,(n+s+1)\;\Gamma(1+\gamma-\tau s)} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{-s} ds, \tag{29}$$

где $\left| \arg\left(\frac{x-1}{2} \right) \right| < \pi$; *контур интегрирования начинается в* $-i\infty$, *заканчивается в* $+i\infty$ *и разделяет полюсы подинтегральной функции: полюсы* $s=-k$, $k=0,1,\ldots$, *остаются слева, а полюсы* $s = \dfrac{1+\alpha+\beta+n+m}{\tau}$, $m=0,1,\ldots,$ — *справа.*

Доказательство. Используем сумму вычетов в полюсах $s=-k$, $k=0,1,\ldots$, чтобы получить (29). Таким образом,

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x) = \left[\frac{(\alpha+1)_n}{n!} \right] \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau k)}{\Gamma(1+\gamma+\tau k)\cdot k!} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k =$$

$$= \left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau k)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+\gamma+\tau k)\,k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k. \qquad (30)$$

Далее,

$$\left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(1+\gamma-\tau s)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-s}ds =$$

$$= \left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\sum_{k=0}^{n}\underset{s=-k}{res}\left[\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(1+\gamma-\tau s)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-s}\right] =$$

$$= \left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}\lim_{s\to -k}\left(\frac{\pi(s+k)}{\sin\pi s}\frac{1}{\Gamma(1-s)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+n-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\;\Gamma(1+\gamma-\tau s)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-s}\right) =$$

$$= \left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau k)}{\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+\gamma+\tau k)\cdot k!}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k.$$

Таким образом,

$$\left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(1+\alpha+\beta+n-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(1+\gamma-\tau s)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{-s}ds =$$

$$= \left[(\alpha+1)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+n)}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(1+\alpha+\beta+n+\tau k)}{(n-k)!\,\Gamma(1+k)\,\Gamma(1+\gamma+\tau k)}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k. \qquad (31)$$

Очевидно, уравнения (30) и (31) непосредственно влекут формулу (29). □

Теорема 12 (преобразование Меллина)**.** *При* $x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$, $\tau>0$; $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\operatorname{Re}(\alpha)$, $\operatorname{Re}(\gamma)>(-1)$ *и* $\operatorname{Re}(\beta)>0$

$$M\left[f(t);s\right] = M\left[P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1+2\omega t);s\right] = \int\limits_0^{\infty}t^{s-1}f(t)\,dt = f^*(s), \qquad (32)$$

где $f(t)=P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1+2\omega t)$ *и*

$$f^*(s) = \frac{(\alpha+1)_n\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(s)\Gamma(n+\alpha+\beta+1-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(1+\gamma-\tau s)}\omega^{-s}.$$

Доказательство. Положим $x=2\omega t+1$ в формуле (29), тогда

$$P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(2\omega t+1) = \left[(\alpha+1)_n\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\Gamma(s)\Gamma(n+\alpha+\beta+1-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\,\Gamma(1+\gamma-\tau s)}(\omega t)^{-s}ds\right] =$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int\limits_L f^*(s)t^{-s}ds, \qquad (33)$$

где $f^*(s) = \dfrac{(\alpha+1)_n\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)}\dfrac{\Gamma(s)\Gamma(n+\alpha+\beta+1-\tau s)}{\Gamma(n+s+1)\;\Gamma(1+\gamma-\tau s)}\omega^{-s}$. Таким образом, формулы (6), (7) и (33) влекут (32). □

Теорема 13 ((бета-)преобразование Эйлера)**.** *При* $x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$; $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma)>(-1)$, $\mathrm{Re}\,(\beta)>0$; $\mathrm{Re}(\tau)>0$, $\mathrm{Re}(c)>0$, $\mathrm{Re}(d)>0$, $\mathrm{Re}(\sigma)>0$

$$\int\limits_0^1 t^{c-1}(1-t)^{d-1}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^{\sigma})dt=$$

$$=\left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(d)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{}_2\psi_3\left[\begin{array}{c}(n+\alpha+\beta+1,\tau),(c,\sigma);-x\\(n+1,-1),(\gamma+1,\tau),(c+d,\sigma)\end{array}\right]. \tag{34}$$

Доказательство. В силу (8) левую часть (34) можно привести к виду:

$$\int\limits_0^1 t^{c-1}(1-t)^{d-1}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^{\sigma})dt=$$

$$=\frac{(1+\alpha)_n\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k)\Gamma(\sigma k+c)\Gamma(d)(-x)^k}{\Gamma\left(n-k+1\right)\Gamma(1+\gamma+\tau k)\Gamma(\sigma k+c+d)k!},$$

далее, согласно (10) получаем

$$\left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(d)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{}_2\psi_3\left[\begin{array}{c}(n+\alpha+\beta+1,\tau),(c,\sigma);-x\\(n+1,-1),(\gamma+1,\tau),(c+d,\sigma)\end{array}\right].$$

□

Теорема 14 (преобразование Уиттакера)**.** *При* $x,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$; $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\mathrm{Re}\,(\alpha)$, $\mathrm{Re}\,(\gamma)>(-1)$, $\mathrm{Re}\,(\beta)>0$; $\tau,\rho,\sigma,p>0$

$$\int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{\frac{-1}{2}pt}W_{\lambda,\mu}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^{\sigma})dt=$$

$$=\frac{\left[(1+\alpha)_n\right]\Gamma(r+1)p^{-\rho}}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{}_3\psi_3\left[\begin{array}{l}(n+\alpha+\beta+1,\tau),\left(\frac{1}{2}+\mu+\rho,\delta\right),\left(\frac{1}{2}-\mu+\rho,\delta\right);\frac{-\omega}{p^{\delta}}\\(n+1,-1),(\gamma+1,\tau),(1-\lambda+\rho,\delta)\end{array}\right]. \tag{35}$$

Доказательство. Чтобы получить преобразование Уиттакера, используем следующий интеграл:

$$\int\limits_0^\infty t^{\nu-1}e^{\frac{-t}{2}}W_{\lambda,\mu}(t)dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\nu\right)}{\Gamma\left(1-\lambda+\upsilon\right)},\quad \text{где }\mathrm{Re}\,(\nu\pm\mu)>\frac{-1}{2}. \tag{36}$$

Рассмотрим левую часть равенства в (35):

$$\int\limits_0^\infty t^{\rho-1}e^{\frac{-1}{2}pt}W_{\lambda,\mu}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^{\sigma})dt=$$

$$=\int\limits_0^\infty t^{\rho-1}e^{\frac{-1}{2}pt}W_{\lambda,\mu}\frac{(\alpha+1)_n}{n!}\cdot{}_2R_1\left(-n,\,n+\alpha+\beta+1;\,\gamma+1;\tau;\omega t^{\delta}\right)dt.$$

Подставляя в левую часть равенства $pt=\nu$ и применяя (9), получаем

$$\int_0^\infty t^{\rho-1}e^{\frac{-1}{2}pt}W_{\lambda,\mu}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^\sigma)dt=$$

$$=\int_0^\infty \left(\frac{\nu}{p}\right)^{\rho-1}e^{\frac{-1}{2}\nu}W_{\lambda,\mu}(\nu)\left[\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\right]{}_2R_1\left(-n,n+\alpha+\beta+1;\gamma+1;\tau;\omega\left(\frac{\nu}{p}\right)^\delta\right)\frac{1}{p}d\nu=$$

$$=\left[(1+\alpha)_n\right]\frac{\Gamma(1+\gamma)p^{-\rho}}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)}\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\frac{\Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k)}{\Gamma(1+\gamma+\tau k)k!}\left(\frac{\omega}{p^\delta}\right)^k\times$$

$$\times\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\nu}\nu^{\delta k+\rho-1}W_{\lambda,\mu}(\nu)d\nu.$$

Ввиду (36) вышеприведенное тождество сводится к

$$\int_0^\infty t^{\rho-1}e^{\frac{-1}{2}pt}W_{\lambda,\mu}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^\sigma)dt=$$

$$=(1+\alpha)_n\frac{\Gamma(1+\gamma)p^{-\rho}}{\Gamma(n+1+\alpha+\beta)}\sum_{k=0}^n\frac{1}{\Gamma\left(n-k+1\right)}\frac{\Gamma(n+1+\alpha+\beta+\tau k)}{\Gamma(1+\gamma+\tau k)k!}\left(\frac{-\omega}{p^\delta}\right)^k\times$$

$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\rho+\delta k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\rho+\delta k\right)}{\Gamma\left(1-\lambda+\rho+\delta k\right)}\right\}.$$

Учитывая (10), эта формула принимает вид

$$\int_0^\infty t^{\rho-1}e^{\frac{-1}{2}pt}W_{\lambda,\mu}P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(1-2xt^\sigma)dt=$$

$$=\frac{\left[(1+\alpha)_n\right]\Gamma(\gamma+1)p^{-\rho}}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{}_3\psi_3\left[\begin{matrix}(n+\alpha+\beta+1,\tau),\left(\frac{1}{2}+\mu+\rho,\delta\right),\left(\frac{1}{2}-\mu+\rho,\delta\right);\frac{-\omega}{p^\delta}\\(n+1,-1),(\gamma+1,\tau),(1-\lambda+\rho,\delta)\end{matrix}\right].$$

□

Литература

[1] Rainville E.D. *Special Functions* (The MacMillan Company, New York, 1960).
[2] Szegö G. *Orthogonal Polynomials,* American Mathematical society (Providence, Rhode Island, 1939).
[3] Virchenko N., Kalla S.L., Al-Zamel A. *Some Results on a Generalized Hypergeometric Function*, Integral Transforms and Special Functions **12** (1), 89–100 (2001).
[4] Waghela D., Rao S.B. *A Note on Sequence of Functions associated with the Generalized Jacobi polynomial*, Researches Math. **31** (2), 1–18 (2023).
[5] Rao S.B., Prajapati J.C., Shukla A.K. *Wright type hypergeometric functions and its properties*, Adv. Pure Math. **3** (3), 335–342 (2013).
[6] Rao S.B., Shukla A.K. *Note on Generalized Hypergeometric Function*, Integral Transforms and Special Functions **24** (11), 896–904 (2013).
[7] Rao S.B., Patel A.D., Prajapati J.C., Shukla A.K. *On Sequence of Functions Containing Generalized Hypergeometric Function*, Math. Sci. Research J. **17** (4), 98–110 (2013).

[8] Rao S.B. *Explicit Representation and Some Integral Transforms of Sequence of Functions Associated with the Wright type Generalized Hypergeometric Function*, Global J. Pure and Appl. Math. **13** (9), 6703–6712 (2017).
[9] Rao S.B., Patel A.D., Prajapati J.C., Shukla A.K. *Some properties of generalized hypergeometric function*, Commun. Korean Math. Soc. **28** (2), 303–317 (2013).
[10] Rao S.B., Prajapati J.C., Patel A.D., Shukla A.K. *Some properties of Wright-type generalized hypergeometric function via fractional calculus*, Adv. Diff. Equat. **2014** (119) (2014).
[11] Rao S.B. *Some Studies on Wright Type Generalized Hypergeometric Function*, Ph.D thesis submitted to the Sardar Vallabhbhai National Institute of Technology (SVNIT), Surat, India, 2014.
[12] Srivastava H.M., Manocha H.L. *A Treatise on Generating Functions* (Ellis Horwood, Chichester; John Wiley and Sons, New York, 1984).
[13] Sneddon I.N. *The Use of Integral Transforms* (Tata McGraw-Hill Publ., New Delhi, 1979).
[14] Whittaker E.T., Watson G.N. *A Course in Modern Analysis,* 4th ed. (Cambridge Univ. Press, 1996).

Дивья Вагела

Университет Махараджи Саяджирао в Барода,
Вадодара, Гуджарат, 390001, Индия,

e-mail: divyarwaghela@gmail.com

Снехал Б. Рао

Университет Махараджи Саяджирао в Барода,
Вадодара, Гуджарат, 390001, Индия,

e-mail: snehal.b.rao-appmath@msubaroda.ac.in

D. Waghela and S.B. Rao

Certain generalizations of Jacobi polynomial and their properties

Abstract. Jacobi polynomial $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ is a well-known orthogonal polynomial. In the present work, several new properties of generalized Jacobi polynomial $P_{n,\tau}^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ (Waghela D., Rao S.B. A Note on Sequence of Functions associated with the Generalized Jacobi polynomial, Researches Math. **31** (2), 1–18 (2023)) and its special case $P_n^{(\alpha,\gamma,\beta)}(x)$ have been studied, which along with different representations of the said generalization includes crucial orthogonality property, generating function, results involving integral representation, differentiation of generalized Jacobi polynomial; also many well-known transformations of this generalized polynomial have been obtained.

Keywords: Jacobi polynomial, generalized Jacobi polynomial, Rodrigues formula, orthogonality, Laplace transform, Mellin transform, Euler (beta) transform, Whittaker transform.

Divya Waghela

The Maharaja Sayajirao University of Baroda,
Vadodara, Gujarat, 390001 India,

`e-mail:` divyarwaghela@gmail.com

Snehal B. Rao

The Maharaja Sayajirao University of Baroda,
Vadodara, Gujarat, 390001 India,

`e-mail:` snehal.b.rao-appmath@msubaroda.ac.in