Известия вузов. Математика
2024, № 12, с. 12–19

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Г.Э. АБДУРАГИМОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассматривается краевая задача с интегральными граничными условиями для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка. Посредством функции Грина краевая задача редуцируется к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению Гаммерштейна. Далее, выявив необходимые нам свойства функции Грина, доказывается, что оператор Гаммерштейна сжимает соответствующий конус. Последнее обстоятельство в силу известной теоремы Красносельского гарантирует существование по меньшей мере одного положительного решения краевой задачи. С помощью априорных оценок с использованием принципа сжатых отображений были получены достаточные условия единственности положительного решения. В конце статьи приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: положительное решение, интегральная краевая задача, функция Грина, сжатие конуса.

УДК: 517.927

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-12-19

Введение

Как известно, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральными граничными условиями возникают в различных областях прикладной математики и физики, такие как теплопроводность, подземное течение воды, термоупругость и физика плазмы. Кроме того, краевые задачи с интегральными условиями Римана–Стилтьеса составляют очень интересный и важный класс задач. К ним относятся двух-, трех-, многоточечные и нелокальные краевые задачи как частные случаи. Близкие к настоящей статье задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на одном из концов отрезка $[0, 1]$ изучались, в частности, в работах [1]–[3], где с помощью теорем о неподвижных точках и индексов доказано существование положительного решения. Кроме того, среди последних публикаций по данной тематике можно выделить, например, [4]–[8].

Поступила в редакцию 07.01.2024, после доработки 29.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

В предлагаемой статье рассматривается краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями. Отметим, что неоценимый вклад в становление и развитие теории функционально-дифференциальных уравнений и их приложений был внесен профессорами Н.В. Азбелевым, В.П. Максимовым, Л.Ф. Рахматулинной, П.М. Симоновым, Е.С. Жуковским и другими основоположниками Пермской математической школы. Большая часть исследований по краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений нашла свое воплощение в трудах Пермского математического семинара и опубликована в сводной монографии [9]. Однако, несмотря на достаточно большое количество результатов, посвященным краевым задачам для функционально-дифференциальных уравнений, непосредственно работ по краевым задачам с граничными условиями, представленными в интегральной форме, относительно немного (см., например, [10], с. 121). Полученные результаты дополняют последние исследования автора [11], [12] в этом направлении.

1. Постановка задачи и основные результаты

В статье используются следующие сокращения пространств: через $\mathbb{C}$ обозначено пространство $\mathbb{C}[0,1]$, через $\mathbb{L}_p$ $(1 < p < \infty)$ — пространство $\mathbb{L}_p(0.1)$ $(1 < p < \infty)$ и через $\mathbb{W}^2$ — пространство вещественных функций, определенных на $[0,1]$ с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f\left(t, (Tx)(t)\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) + x'(0) = \alpha \int\limits_0^1 x(s)\, ds, \tag{2}$$

$$x(1) + x'(1) = \beta \int\limits_0^1 x(s)\, ds, \tag{3}$$

где $\alpha \in (1,2]$, $\beta \in [0,1)$ — некоторые заданные числа, $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{L}_p$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot, 0) \equiv 0$.

Определение. Под *положительным решением* задачи (1)–(3) будем понимать функцию $x \in \mathbb{W}^2$, положительную в интервале $(0,1)$ и удовлетворяющую почти всюду на указанном интервале уравнению (1) и граничным условиям (2), (3).

Запишем задачу (1)–(3) в интегральной форме

$$x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right)\, ds, \quad 0 \le t \le 1, \tag{4}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\dfrac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2), (3), имеющая, соответственно, вид

$$G(t,s) = \frac{1}{3\alpha - \beta - 2} \begin{cases} \dfrac{(\alpha-2)(\beta-4)}{2} + (\alpha-2)(1-\beta)s + ((1-\alpha)(\beta-4) + 2(1-\alpha)(1-\beta)s)\, t, & t \le s; \\ \dfrac{(\alpha-2)(\beta-4)}{2} + (1-\alpha)(\beta-4)s + ((\alpha-2)(1-\beta) + 2(1-\alpha)(1-\beta)s)\, t, & t \ge s. \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \int\limits_0^1 \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} f\left(s, (Tx)(s)\right) ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

где

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = \frac{1}{3\alpha - \beta - 2} \begin{cases} (1-\alpha)(\beta-4) + 2(1-\alpha)(1-\beta)s, & t \le s; \\ (\alpha-2)(1-\beta) + 2(1-\alpha)(1-\beta)s, & t \ge s. \end{cases}$$

Несложно показать, что при введенных выше ограничениях на α и β функция Грина неотрицательна, а ее частная производная по первому аргументу положительна в квадрате $[0,1] \times [0,1]$. Тогда, очевидно, $x'(t) > 0$ при $t \in [0,1]$, т. е. $x(t)$ строго возрастает на $[0,1]$. Кроме того, из постановки задачи следует $x''(t) \le 0$, $t \in [0,1]$. Значит, на отрезке $[0,1]$ функция $x(t)$ выпукла вверх. Отсюда вытекает неравенство

$$x(t) \ge x(1)t + (1-t)x(0), \quad t \in [0,1].$$

Ввиду того, что $\|x\|_C = \max\limits_{0 \le t \le 1} x(t) = x(1)$, а $x(0) \ge 0$, из последнего неравенства следует

$$x(t) \ge t\|x\|_{\mathbb{C}}, \quad t \in [0,1]. \tag{5}$$

Основываясь на приведенных выше рассуждениях относительно функции $G(t,s)$, легко видеть, что

$$tG(1,s) \le G(t,s) \le G(1,s), \quad t,s \in [0,1] \times [0,1]. \tag{6}$$

Кроме того, несложно показать, что

$$\max_{0 \le s \le 1} G(1,s) = \frac{\alpha(\beta+2)}{2(3\alpha - \beta - 2)}. \tag{7}$$

Предположим, что при почти всех $t \in [0,1]$ и $u \ge 0$ функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию

$$f(t,u) \le bu^{p/q}, \tag{8}$$

где $b > 0$, $q \in (1,\infty)$. Тогда, соответственно, посредством операторов Немыцкого $N\colon \mathbb{L}_p \to \mathbb{L}_q$ и Грина $G\colon \mathbb{L}_q \to \mathbb{C}$ уравнению (4) можно придать операторный вид

$$x = Ax,$$

где $A \equiv GNT$.

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен ([13], с. 161).

Обозначим через K конус неотрицательных функций пространства $\mathbb{C}$, удовлетворяющих условию (5). Полуупорядоченность в этом конусе определим так: будем считать $u \prec v$, если $u(t) \le v(t)$ при $t \in [0,1]$.

Лемма. *Оператор A оставляет инвариантным конус K.*

Доказательство. В силу (6) для любого $x \in K$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds \geq t \int_0^1 G(1,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds =$$

$$= t \max_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) ds = t\|Ax\|_{\mathbb{C}}.$$

Следовательно, $A(K) \subset K$. □

Введем следующие обозначения:

$$K(0,r) = \{x \in K : \|x\|_{\mathbb{C}} \leq r\},$$
$$K(R,\infty) = \{x \in K : \|x\|_{\mathbb{C}} \geq R\},$$

где r и R — некоторые положительные числа, выбор которых укажем в дальнейшем.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены неравенство* (8) *и условия*

1) $1 < p < q < \infty$;

2) $\lim\limits_{u\to 0^+} \min\limits_{0\leq t\leq 1} \dfrac{f(t,u)}{u} = \infty$;

3) $\max\limits_{0\leq t\leq 1} (T\chi)(t) \leq 1$, *где* $\chi(t) \equiv 1$.

Тогда краевая задача (1)–(3) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. Покажем, что оператор A сжимает конус K. Из условия 2 теоремы следует существование числа $L > 0$ такого, что почти всюду при $t \in [0,1]$ и $0 < u \leq L$

$$f(t,u) \geq \delta u, \tag{9}$$

где $\delta > 0$.

В силу линейности оператора T при $x \in K(0,r)$ с учетом условия 3) теоремы имеем

$$(Tx)(t) \leq \|x\|_{\mathbb{C}}(T\chi)(t) \leq r.$$

Тогда, очевидно, положив $r = L$, мы можем обеспечить выполнение условия (9). Введя для удобства последующих выкладок обозначение $\varphi(t) = t$, в силу (5), (6) и (8) при $x \in K(0,r)$ имеем

$$(Ax)(t) \geq t\int_0^1 G(1,s)(Tx)(s)\,ds \geq \delta t\|x\|_{\mathbb{C}} \int_0^1 G(1,s)(T\varphi)(s)\,ds \geq \delta t \int_0^1 G(1,s)(T\varphi)(s)\,ds \cdot x(t).$$

Отсюда

$$(Ax)(1/2) \geq \frac{\delta}{2}\int_0^1 G(1,s)(T\varphi)(s)\,ds \cdot x(1/2).$$

Выбрав теперь $\delta > 2\int_0^1 G(1,s)(T\varphi)(s)\,ds$, придем к соотношению $(Ax)(1/2) > x(1/2)$. Следовательно, $x - Ax \not\geq K$ при $x \in K(0,r)$.

В силу (7), (8), воспользовавшись неравенством Гёльдера, для $x \in K(R,\infty)$ имеем

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s) f\left(s, (Tx)(s)\right) \, ds \le b \int_0^1 G(1,s) \, (Tx)^{\frac{p}{q}}(s) \, ds \le b\gamma \|Tx\|_{\mathbb{L}_p}^{\frac{p}{q}} \le$$

$$\le b\gamma\tau^{\frac{p}{q}} \|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} \le b\gamma\tau^{\frac{p}{q}} R^{\frac{p}{q}-1} \|x\|_{\mathbb{C}}, \quad (10)$$

где через γ обозначена правая часть (7), τ — норма оператора T.

В точке $t = \dfrac{1}{2}$ из (5) имеем $x\left(\dfrac{1}{2}\right) \ge \dfrac{\|x\|_{\mathbb{C}}}{2}$. Отсюда $\|x\|_{\mathbb{C}} \le 2x(1/2)$. С учетом этого из (10), соответственно, получим

$$(Ax)(1/2) \le 2b\gamma\tau^{\frac{p}{q}} R^{\frac{p}{q}-1} x(1/2).$$

Взяв $R > \left\{ \left(2b\gamma\tau^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{q}{q-p}}, r \right\}$, придем к соотношению $(Ax)(1/2) < x(1/2)$. Следовательно, $Ax - x \not\geq K$ при $x \in K(R,\infty)$.

Таким образом, положительный вполне непрерывный оператор A сжимает конус K. Тогда в силу теоремы Красносельского ([14], с. 362) уравнение (4) имеет по крайней мере одно ненулевое решение, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(3). □

В предположении справедливости теоремы 1 запишем неравенство (9), вытекающее из условие 2 теоремы, следующим образом:

$$f(t,u) \ge \delta L^{1-\frac{p}{q}} u^{\frac{p}{q}}, \quad t \in [0,1], \quad 0 < u \le L, \quad (11)$$

где $\delta > 2\displaystyle\int_0^1 G(1,s)(T\varphi)(s)\,ds$.

В силу (4), (6) и (11) для $x \in K$ имеем

$$x(t) \ge t\delta L^{1-\frac{p}{q}} \int_0^1 G(1,s) \, (Tx)^{\frac{p}{q}}(s) \, ds \ge t\delta L^{\frac{q-p}{q}} \|x\|_{\mathbb{C}}^{\frac{p}{q}} \int_0^1 G(1,s) \, (T\varphi)^{\frac{p}{q}}(s) \, ds.$$

Отсюда после нормировки, разрешив полученное неравенство, получим априорную оценку

$$\|x\|_{\mathbb{C}} \ge \xi, \quad (12)$$

где $\xi = L\left(\delta \displaystyle\int_0^1 G(1,s) \, (T\varphi)^{\frac{p}{q}}(s) \, ds\right)^{\frac{q}{q-p}}$.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1, функция $f(t,u)$ дифференцируема по второму аргументу, а частная производная $f'_u(t,u)$ монотонно убывает по u. Кроме того, допустим, что $\min\limits_{0\le t\le 1}(T\varphi)(t) > 0$ и*

$$\|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} < \frac{1}{\gamma\tau}, \quad (13)$$

где $\theta(t) \equiv f'_u(t,\zeta)$, $\zeta = \xi \min\limits_{0\le t\le 1}(T\varphi)(t)$, $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$. Тогда краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение.

Доказательство. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — различные положительные решения задачи (1)–(3). На основании формулы конечных приращений Лагранжа имеем

$$f\left(s, \left(Tx_1\right)(s)\right) - f\left(s, \left(Tx_2\right)(s)\right) = f'_u(t, \tilde{u}(s))(Ty)(s),$$

где функция $\tilde{u}(t)$ принимает значения, промежуточные между $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$. При этом заметим, что соотношение (12) обеспечивает оценку

$$\tilde{u}(t) \geq \zeta, \tag{14}$$

где $\zeta = \xi \min\limits_{0 \leq t \leq 1} (T\varphi)(t) > 0$.

Воспользовавшись монотонностью $f'_u(t, u)$, свойствами функции Грина (6) и (7), (14), получим

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_{\mathbb{C}} \leq \gamma \int_0^1 \left|f'_u(s, \tilde{u}(s))\right| |(Ty)(s)| \, ds \leq \gamma \int_0^1 |f'_u(s, \zeta)||(Ty)(s)| \, ds \leq$$
$$\leq \gamma \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \|Ty\|_{\mathbb{L}_p} \leq \gamma \|\theta\|_{\mathbb{L}_{p'}} \tau \|y\|_{\mathbb{C}},$$

где $\theta(t) \equiv f'_u(t, \zeta)$, $\dfrac{1}{p'} + \dfrac{1}{p} = 1$.

Следовательно, ввиду условия (13) из принципа сжатых отображений следует, что краевая задача (1)–(3) имеет единственное положительное решение. □

В качестве примера, иллюстрирующего выполнение условий вышеприведенных теорем, рассмотрим задачу

$$x''(t) + \lambda a(t) \sqrt{\int_0^1 s^3 x(s) ds} = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{15}$$

$$x(0) + x'(0) = 1.5 \int_0^1 x(s) \, ds, \tag{16}$$

$$x(1) + x'(1) = 0.5 \int_0^1 x(s) \, ds, \tag{17}$$

где λ — положительный параметр, $a(t)$ — неотрицательная суммируемая на $[0, 1]$ функция такая, что $\min\limits_{0 \leq t \leq 1} a(t) > 0$.

Здесь $\alpha = 1.5$, $\beta = 0.5$, $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2}$ и $f(t, u) = \lambda a(t)\sqrt{u}$. В дальнейшем для удобства рассуждений и простоты выкладок положим $p = 2$ и $q = 4$. В качестве оператора $T \colon \mathbb{C} \to \mathbb{L}_2$ нами выбран линейный интегральный оператор, определяемый формулой $(Tx)(t) = \displaystyle\int_0^1 s^3 x(s) ds$. В такой постановке задачи выполнение условий теоремы 1 очевидно.

Докажем теперь единственность положительного решения задачи (1)–(3). Вначале для определения величины ζ, участвующей в теореме 2, рассмотрим неравенство (9), которое в данном случае запишется так:

$$\lambda \min_{0\le t\le 1} a(t)\sqrt{u} \ge \delta u, \quad 0 < u \le L,$$

где $\delta > 0$. Отсюда, обозначив левую часть неравенства через b, получим $0 < u \le L \equiv \left(\frac{b}{\delta}\right)^2$. Далее, несложно показать, что

$$G(1,s) = \frac{2.5}{4}(0.5+s), \quad s \in [0,1].$$

Отсюда $\gamma = \max\limits_{0\le s\le 1} G(1,s) = 0.9375$. В силу (12) имеем

$$\xi = L\left(\delta \int\limits_0^1 G(1,s)\,(T\varphi)^{\frac{1}{2}}\ ds\right)^2 = \frac{6.25b^2}{80}.$$

Наконец, из (14) следует $\zeta = \frac{\xi}{5} = \frac{6.25b^2}{400}$.

Легко видеть, что функция $f(t,u)$ дифференцируема по u, а ее производная $f'_u(t,u) = \frac{\lambda a(t)}{2\sqrt{u}}$ монотонно убывает по второму аргументу. С учетом того, что норма оператора T равна $\frac{1}{4}$, а $p' = 2$, условие (13) примет вид

$$\frac{\lambda}{2\sqrt{\zeta}}\sqrt{\int\limits_0^1 a^2(s)ds} < \frac{4}{\gamma}.$$

Подставив найденные выше значения величин ζ и γ в это неравенство, окончательно получим

$$\frac{\sqrt{\int\limits_0^1 a^2(s)ds}}{\min\limits_{0\le t\le 1} a(t)} < \frac{16}{15}. \tag{18}$$

Таким образом, взяв в уравнении (15) функцию $a(t)$, удовлетворяющую, помимо введенных в постановке задачи ограничений, условию (18), в соответствии с теоремой 2 мы можем гарантировать единственность положительного решения задачи (15)–(17).

Литература

[1] Benchohra M., Nieto J.J., Ouahab A. *Second-Order Boundary Value Problem with Integral Boundary Conditions*, Bound Value Probl. **2011**, 1–9 (2011).

[2] Li H., Sun F. *Existence of solutions for integral boundary value problems of second-order ordinary differential equations*, Bound Value Probl. **2012** (147), 1–7 (2012).

[3] Cabada A., Iglesias J. *Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions*, Bound Value Probl. **2021** (66), 1–19 (2021).

[4] Ghanmii A., Jebari R., Zhang Z. *Multiplicity results for a boundary value problem with integral boundary conditions*, SeMA **76** (2), 365–381 (2019).

[5] Djourdem H., Benaicha S. *Positive solutions of nonlinear third-order boundary value problem with integral boundary conditions*, Malaya J. Matem. **7** (2), 269–175 (2019).

[6] Егоров И.Е., Ефимова Е.С. *О разрешимости краевой задачи с интегральным граничным условием по времени для уравнения нечетного порядка с меняющимся направлением времени*, Матем. заметки СВФУ **26** (1), 6–11 (2019).
[7] Benaicha S., Bouteraa N., Djourdem H. *Triple positive solutions for a class of boundary value problems with integral boundary conditions*, Bull. Transilvania Univ. Brasov, Ser. III **13 (62)** (1), 51–68 (2020).
[8] Bugajewska D., Mawhin J. *Boundary value problems with bounded φ-Laplacian and nonlocal conditions of integral type*, Czech. Math. J., 1–12 (2023), DOI : 10.21136/CMJ.2023.0154-23.
[9] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1991).
[10] Бравый Е.И. *Краевые задачи для семейств линейных функционально-дифференциальных уравнений*, дисс. ... докт. физ.-матем. наук (ПГТУ, Пермь, 2017).
[11] Абдурагимов Г.Э. *О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с интегральными граничными условиями*, Матем. физика и компьютер. моделирование **25** (4), 5–14 (2022).
[12] Абдурагимов Г.Э. *О существовании положительного решения краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка*, Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прил. Темат. обз. **221**, 3–9 (2023).
[13] Крейн С.Г. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1972).
[14] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа* (Наука, М., 1975).

Гусен Эльдерханович Абдурагимов

Дагестанский государственный университет,
ул. Гаджиева, д. 43 а, г. Махачкала, 367000, Россия,

e-mail: gusen_e@mail.ru

G.E. Abduragimov

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary value problem with integral boundary conditions for one nonlinear ordinary differential equation of the second order

Abstract. The article considers a boundary value problem with integral boundary conditions for one nonlinear second-order functional differential equation. Using Green's function, the boundary value problem is reduced to the equivalent nonlinear Hammerstein integral equation. Next, having identified the necessary properties of Green's function, we prove that the Hammerstein operator contracts the corresponding cone. The last circumstance, by virtue of the well-known Krasnoselsky theorem, guarantees the existence of at least one positive solution to the boundary value problem. Using a priori estimates and the principle of compressed mappings, sufficient conditions for the uniqueness of a positive solution were obtained. At the end of the article, there is a non-trivial example illustrating the results obtained here.

Keywords: positive solution, integral boundary value problem, Green's function, cone compression.

Gusen El'derhanovich Abduragimov

Dagestan State University,
43 a Gadzhieva str., Makhachkala, 367000 Russia,

e-mail: gusen_e@mail.ru