Известия вузов. Математика
2024, №12, с. 3–11

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Ж.И. АБДУЛЛАЕВ, А.М. ХАЛХУЖАЕВ, Й.С. ШОТЕМИРОВ

О БЕСКОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

Аннотация. Рассматривается оператор Шрёдингера $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$, ассоциированный системой двух частиц на двумерной решетке. Показывается инвариантность подпространств четных и нечетных функций относительно $H(\mathbf{k})$. Описываются множества квазиимпульсов $\mathcal{K}(1)$, $\mathcal{K}(2)$ и класс потенциалов $\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{P}(2)$, для которых при $\mathbf{k} \in \mathcal{K}(j)$, $\hat{v} \in \mathrm{P}(j)$ оператор $H(\mathbf{k})$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(\mathbf{k})$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Найдены явный вид $z_n(\mathbf{k})$ и скорость стремления последовательности $z_n(\mathbf{k})$ ко дну существенного спектра.

Ключевые слова: решетка, гамильтониан, оператор Шрёдингера, квазиимпульс, ширина непрерывного спектра, потенциал, собственное значение, собственная функция.

УДК: 517.946

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-12-3-11

Введение

Решетчатые модели играют важную роль в различных разделах физики. К числу таких моделей относятся решетчатые гамильтонианы малочастичных систем [1], которые можно рассматривать как минималистскую версию соответствующей модели Бозе или Ферми–Хаббарда, включающей фиксированное конечное число частиц определенного типа. Решетчатые гамильтонианы немногих тел представляют большой теоретический интерес уже сами по себе [2]–[6]. Кроме того, эти дискретные гамильтонианы можно рассматривать как естественную аппроксимацию их непрерывных аналогов [7], позволяющую изучать явления малого числа тел в контексте теории ограниченных операторов.

Кинематика квантовых квазичастиц на решетке довольно своеобразна даже в двухчастичном случае. Например, вследствие того, что дискретный аналог лапласиана или его обобщения не являются трансляционно-инвариантными, гамильтониан системы не разделяется на две части: относящуюся к движению центра масс и связанную с внутренними степенями свободы. Это так называемое явление "избытка масс" для решетчатых систем: эффективная масса двухчастичного связанного состояния больше, чем сумма эффективных масс двух квазичастиц (см., например, [1], [8]). Двухчастичная проблема на решетке, в отличие от непрерывного случая, когда отделяется движение центра масс, сводится к изучению одночастичной проблемы с помощью преобразования Гельфанда. А именно, гильбертово пространство $\ell_2((\mathbb{Z}^d)^2)$ разлагается в прямой интеграл фон Неймана, ассоциированный с представлением абелевой (дискретной) группы $\mathbb{Z}^d$, образованной с помощью

Поступила в редакцию 13.01.2024, после доработки 13.01.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

перестановочных операторов на решетке. Тогда двухчастичный гамильтониан также разлагается в прямой (непрерывный) интеграл фон Неймана. Спектр слойного оператора $H(\mathbf{k})$ оказывается довольно чувствительным к изменению квазиимпульса $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$.

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра кластерности впервые подробно исследовалась Ш.С. Маматовым и Р.А. Минлосом [9], а потом в более общей ситуации Р.А. Минлосом и А.И. Могильнером [10]. Конечность числа собственных значений оператора Шрёдингера $H(\mathbf{k})$ в d-мерной решетке установлена в работе [3]. Для контактных потенциалов существование и единственность собственного значения показано в [11]. В работе [12] рассматривается модельный оператор, ассоциированный с системой трех частиц на решетке, взаимодействующих с помощью парных нелокальных потенциалов. При некоторых естественных условиях на параметры, задающий этот модельный оператор, доказана конечность его дискретного спектра. В работе [13] исследуется матричный оператор, действующий в некотором подпространстве Фоковского пространства, третий диагональный элемент которого является модельный оператор Шрёдингера. Описано местоположение его существенного спектра (т. е. выделены "двухчастичные" и "трехчастичные" ветви существенного спектра). В работе [14] рассматривается семейство двухчастичных дискретных операторов Шрёдингера $H(\mathbf{k})$, ассоциированных с гамильтонианом системы двух фермионов на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$, где $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$ — двухчастичный квазиимпульс. Доказано, что для любой размерности $d = 1, 2, \ldots$ оператор $H(\mathbf{k}), \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, имеет собственное значение, лежащее левее существенного спектра, если оператор $H(\mathbf{0})$ имеет виртуальный уровень $(d = 1, 2)$ или собственное значение $(d \geq 3)$ на дне существенного спектра. В работе [15] показано, что оператор $H(\mathbf{k})$ может иметь бесконечное число собственных значений $z_n(\mathbf{k})$, накапливающихся в левому краю существенного спектра.

Здесь мы интересуемся собственными значениями $z_n(\mathbf{k})$ оператора Шрёдингера $H(\mathbf{k})$ (см. (2)) и их зависимостью от полного квазиимпульса $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2 = (-\pi, \pi]^2$. Задача о существовании решения стационарного уравнения Шрёдингера $H(\mathbf{k})f = zf$ сводится к изучению существования неподвижных точек компактного оператора $G(\mathbf{k}, z) = V^{\frac{1}{2}}(H_0(\mathbf{k}) - zI)^{-1}V^{\frac{1}{2}}$. Описываются множество квазиимпульсов $\mathcal{K}(j) \subset \mathbb{T}^2$, $j = 1, 2$ (см. (4)), и класс потенциалов $\mathrm{P}(j)$ (см. (5)) таких, что при $\mathbf{k} \in \mathcal{K}(j), \hat{v} \in \mathrm{P}(j)$ имеет место равенство $G(\mathbf{k}, z) = d(\mathbf{k}, z)V$, т. е. операторы V и $G(\mathbf{k}, z)$ имеют одинаковые собственные функции. Благодаря этому мы получим явный вид для собственных значений $z_n(\mathbf{k})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ (см (9)), и собственных функций f_n (см. (10)) оператора $H(\mathbf{k})$.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Гамильтониан $\hat{H}$ системы двух квантовых частиц на двумерной решетке $\mathbb{Z}^2$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2((\mathbb{Z}^2)^2) = \ell_2(\mathbb{Z}^2) \otimes \ell_2(\mathbb{Z}^2)$ по формуле

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m_1}\Delta_1 - \frac{1}{2m_2}\Delta_2 - \hat{V}.$$

Здесь m_1, m_2 означают массы частиц, которые в дальнейшем считаются равными единице, $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ и $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, решетчатый Лапласиан Δ — разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т. е.

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{n}) = \sum_{j=1}^{2} \left[\hat{\psi}(\mathbf{n} + \mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{n} - \mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{n})\right], \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2),$$

где $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ — единичные орты в $\mathbb{Z}^2$. Взаимодействие двух частиц описывается оператором $\hat{V}$:

$$\big(\hat{V}\hat{\psi}\big)(\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}) = \hat{v}(\mathbf{n_1}-\mathbf{n_2})\hat{\psi}(\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}), \quad \hat{\psi}\in\ell_2\big((\mathbb{Z}^2)^2\big).$$

Относительно потенциала $\hat{v}$ предположим, что

$$\hat{v}(-\mathbf{n}) = \hat{v}(\mathbf{n}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2, \quad \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\hat{v}(\mathbf{n}) < \infty. \tag{1}$$

При этом условии гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным, самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2\big((\mathbb{Z}^2)^2\big)$.

Исследование связанных состояний гамильтониана $\hat{H}$ системы двух частиц сводится к изучению собственных значений семейства самосопряженных операторов $\big\{H(\mathbf{k}),\, \mathbf{k}\in\mathbb{T}^2\big\}$ (см. [10], [3]). Оператор Шрёдингера $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) - V$ действует в гильбертовом пространстве $L_2\big(\mathbb{T}^2\big)$ по формуле

$$(H_0(\mathbf{k})f)(\mathbf{q}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})f(\mathbf{q}), \quad (Vf)(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}^2} v(\mathbf{q}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \tag{2}$$

Здесь

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}+\mathbf{q}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}-\mathbf{q}\right), \quad v(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^2}\hat{v}(\mathbf{n})\exp\{i(\mathbf{n},\mathbf{q})\},\ (\mathbf{n},\mathbf{q}) = n_1q_1 + n_2q_2, \tag{3}$$

$\varepsilon(\mathbf{q}) = \sum\limits_{j=1}^{2}(1-\cos q_j)$ — энергия отдельной частицы с импульсом $\mathbf{q}\in\mathbb{T}^2$. При выполнении условия (1) v является непрерывной функцией на $\mathbb{T}^2$.

Сначала изложим некоторые известные факты. Обозначим через $m(\mathbf{k})$ и $M(\mathbf{k})$, соответственно, минимальное и максимальное значения функции $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q})$. В силу теоремы Вейля о существенном спектре следует, что существенный спектр оператора $H(\mathbf{k})$ совпадает со спектром оператора $H_0(\mathbf{k})$. Спектр невозмущенного оператора $H_0(\mathbf{k})$ чисто непрерывный и совпадает с отрезком $[m(\mathbf{k}), M(\mathbf{k})]$. Длина этого отрезка $\omega(\mathbf{k}) = M(\mathbf{k}) - m(\mathbf{k})$ называется шириной непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$. Из вида функции

$$\omega(\mathbf{k}) = 4\cos\frac{k_1}{2} + 4\cos\frac{k_2}{2}$$

непосредственно вытекает, что она — регулярная функция на $\mathbb{T}^2$, симметричная относительно k_1 и k_2, четная по каждому $k_j\in[-\pi,\pi]$ и убывает по $k_j\in[0,\pi]$, $j=1,2$. Значит,

$$\min_{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2}\omega(\mathbf{k}) = \omega((\pi,\pi)) = 0, \quad \max_{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2}\omega(\mathbf{k}) = \omega((0,0)) = 8.$$

Из вышесказанного следует, что ширина непрерывного спектра $\omega(\mathbf{k})$ уменьшается при возрастании координаты $k_j\in[0,\pi]$ полного квазиимпульса $\mathbf{k}$ системы двух частиц. Ширина непрерывного спектра оператора $H(\mathbf{k})$ по направлению $\mathbf{e}_j$, $j=1,2$, определяется по формуле

$$\omega_j(\mathbf{k}) = \max_{p_j\in[-\pi,\pi]}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) - \min_{p_j\in[-\pi,\pi]}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}).$$

Заметим, что $\omega_j(\mathbf{k})\equiv 0$ при $\mathbf{k}\in\mathcal{K}(j)$, где $\mathcal{K}(1),\mathcal{K}(2)$ — ребра квадрата $\mathbb{T}^2$, т. е.

$$\mathcal{K}(1) = \big\{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2 : k_1 = \pi,\ k_2\in(-\pi,\pi)\big\}, \quad \mathcal{K}(2) = \big\{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2 :\ k_1\in(-\pi,\pi),\ k_2 = \pi\big\}. \tag{4}$$

Обозначим через $\mathrm{P}(j)$, $j=1,2$, класс потенциалов $\hat{v}$ таких, что

$$\mathrm{P}(j)=\{\hat{v}:\mathrm{supp}\hat{v}\subset \mathbf{e}_j\mathbb{Z};\quad \hat{v}(n\mathbf{e}_j)>\hat{v}((n+1)\mathbf{e}_j),\ n\in\mathbb{Z}_+=\{0\}\cup\mathbb{N}\}. \tag{5}$$

Пусть $L_2^+(\mathbb{T}^2)$ (соответственно $L_2^-(\mathbb{T}^2)$) — подпространство четных (соответственно нечетных) функций. Известно, что

$$L_2(\mathbb{T}^2)=L_2^+(\mathbb{T}^2)\oplus L_2^-(\mathbb{T}^2). \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть выполняется условие* (1). *Тогда подпространства $L_2^+(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^-(\mathbb{T}^2)$ являются инвариантными относительно оператора $H(\mathbf{k})$.*

Доказательство. Покажем инвариантность подпространства $L_2^+(\mathbb{T}^2)$ относительно $H_0(\mathbf{k})$ и V. Из представления (3) следует, что $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ принадлежит подпространству $L_2^+(\mathbb{T}^2)$, поэтому из включения $f\in L_2^+(\mathbb{T}^2)$ вытекает включение $\varepsilon_{\mathbf{k}}f\in L_2^+(\mathbb{T}^2)$. Это показывает инвариантность подпространства $L_2^+(\mathbb{T}^2)$ относительно оператора $H_0(\mathbf{k})$.

Из четности функции $\hat{v}$ на $\mathbb{Z}^2$ имеем четность функции v на $\mathbb{T}^2$. Из этого получаем, что функция $g(\mathbf{p})=(Vf)(\mathbf{p})$ принадлежит подпространству $L_2^+(\mathbb{T}^2)$ при $f\in L_2^+(\mathbb{T}^2)$. Тем самым доказана инвариантность $L_2^+(\mathbb{T}^2)$ относительно оператора $H(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V$.

Так как $H(\mathbf{k})$ — самосопряженный оператор, ортогональное дополнение

$$L_2^-(\mathbb{T}^2)=\left(L_2^+(\mathbb{T}^2)\right)^{\perp}$$

также является инвариантным подпространством относительно оператора $H(\mathbf{k})$. □

Обозначим через $H^+(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V^+$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ на подпространство $L_2^+(\mathbb{T}^2)$. Этот оператор описывает бозон-бозонное взаимодействие на решетке (см. [5]). Обозначим через $H^-(\mathbf{k})=H_0(\mathbf{k})-V^-$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ на подпространство $L_2^-(\mathbb{T}^2)$. Этот оператор описывает взаимодействие двух фермионов на двумерной решетке (см. [14]).

Таким образом, прямая сумма (6) порождает прямую сумму

$$H(\mathbf{k})=H^+(\mathbf{k})\oplus H^-(\mathbf{k}).$$

Пусть $\hat{v}\in\mathrm{P}(j)$. После несложных вычислений, получим

$$(V^+f)(\mathbf{q})=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[\hat{v}(\mathbf{0})+2\sum_{n=1}^{\infty}\hat{v}(n\mathbf{e}_j)\cos(np_j)\cos(nq_j)\right]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}, \tag{7}$$

$$(V^-f)(\mathbf{q})=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\hat{v}(n\mathbf{e}_j)\sin(np_j)\sin(nq_j)\right]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

Для любого $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^2$ и $z<m(\mathbf{k})$ положим

$$d(\mathbf{k},z)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{d\mathbf{t}}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{t})-z}.$$

При $\mathbf{k}\in\mathcal{K}(j)$ этот интеграл вычисляется явно

$$d(\mathbf{k},z)=\frac{1}{\sqrt{m(\mathbf{k})-z}\sqrt{M(\mathbf{k})-z}}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathbf{k}\in\mathcal{K}(j)$ и $\hat{v}\in\mathrm{P}(j)$.*

а) *Дискретный спектр $\sigma_{\mathrm{disc}}(H^+(\mathbf{k}))$ оператора $H^+(\mathbf{k})$ состоит из бесконечного числа невырожденных собственных значений $z_n(\mathbf{k}), n\in\mathbb{Z}_+$, вида*

$$z_n(\mathbf{k})=4-\sqrt{(\omega(\mathbf{k})/2)^2+\hat{v}^2(n\mathbf{e}_j)}. \tag{9}$$

Собственным значениям $z_n(\mathbf{k})$ *соответствуют собственные функции*

$$f_n^+(\mathbf{p}) = \frac{\cos(np_j)}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) - z_n(\mathbf{k})} \in L_2^+(\mathbb{T}^2); \tag{10}$$

b) *дискретный спектр* $\sigma_{\rm disc}(H^-(\mathbf{k}))$ *оператора* $H^-(\mathbf{k})$ *состоит из невырожденных собственных значений*

$$\{z_1(\mathbf{k}), z_2(\mathbf{k}), \ldots, z_n(\mathbf{k}), \ldots\} = \sigma_{\rm disc}(H^-(\mathbf{k})),$$

где $z_n(\mathbf{k})$ *определяется по формуле* (9). *Им соответствуют собственные функции*

$$f_n^-(\mathbf{p}) = \frac{\sin(np_j)}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) - z_n(\mathbf{k})} \in L_2^-(\mathbb{T}^2).$$

Замечание 1. Оператор $H(\mathbf{k})$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(\mathbf{k})$, лежащих левее существенного спектра, причем $z_0(\mathbf{k})$ невырожденное, а остальные $z_n(\mathbf{k}), n \in \mathbb{N}$, являются двухкратными.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{k} \in \mathcal{K}(j)$ *и* $\hat{v} \in \mathrm{P}(j)$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$0 < m(\mathbf{k}) - z_n(\mathbf{k}) < \frac{\hat{v}^2(n\mathbf{e}_j)}{\omega(\mathbf{k})}.$$

Замечание 2. Разница между n-м собственным значением $z_n(\mathbf{k})$ оператора $H(\mathbf{k})$ и левым краем существенного спектра $m(\mathbf{k})$ оценивается через отношение значения потенциала $\hat{v}^2(n, 0)$ и ширины непрерывного спектра $\omega(\mathbf{k})$.

2. Доказательства основных результатов

Из самосопряженности оператора $H^\pm(\mathbf{k})$ $\big($т. е. $H^+(\mathbf{k})$ или $H^-(\mathbf{k})\big)$ следует $\sigma\big(H^\pm(\mathbf{k})\big) \subset \mathbb{R}$. А из положительности оператора V вытекают положителность операторов V^+, V^-. Значит, $\sigma\big(H^\pm(\mathbf{k})\big) \cap (M(\mathbf{k}), \infty) = \emptyset$, поэтому собственные значения оператора $H^\pm(\mathbf{k})$ могут лежать только в полуоси $(-\infty,\, m(\mathbf{k}))$.

Для каждого $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ и $z < m(\mathbf{k})$ определим интегральные операторы, действующие в подпространстве $L_2^\pm(\mathbb{T}^2)$:

$$G^\pm(\mathbf{k}, z) = \big(V^\pm\big)^{\frac{1}{2}} r_0(\mathbf{k}, z) \big(V^\pm\big)^{\frac{1}{2}}, \quad Q^\pm(\mathbf{k}, z) = \big(V^\pm\big)^{\frac{1}{2}} r_0^{\frac{1}{2}}(\mathbf{k}, z),$$

где $r_0(\mathbf{k}, z)$ — резольвента невозмущенного оператора $H_0(\mathbf{k})$, а $\big(V^+\big)^{\frac{1}{2}}$ — положительный квадратный корень положительного оператора V^+. При условии (1) оператор $\big(V^\pm\big)^{\frac{1}{2}}$ принадлежит классу Гильберта–Шмидта Σ_2, поэтому $Q^\pm(\mathbf{k}, z) \in \Sigma_2$. Из представления

$$G^\pm(\mathbf{k}, z) = Q^\pm(\mathbf{k}, z)(Q^\pm(\mathbf{k}, z))^*$$

следует положительность оператора $G^\pm(\mathbf{k}, z)$ и его принадлежность классу со следом Σ_1 при всех $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$ и $z < m(\mathbf{k})$. Решение f стационарного уравнения Шрёдингера

$$H^\pm(\mathbf{k}) f = zf \tag{11}$$

и неподвижные точки φ оператора $G^\pm(\mathbf{k}, z)$ связаны соотношениями

$$f = r_0(\mathbf{k}, z)\big(V^\pm\big)^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad \varphi = \big(V^\pm\big)^{\frac{1}{2}} f. \tag{12}$$

Лемма 2. *Число* $z < m(\mathbf{k})$ *является собственным значением оператора* $H^\pm(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда число* $\lambda = 1$ *есть собственное значение оператора* $G^\pm(\mathbf{k}, z)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_2^{\pm}(\mathbb{T}^2)$ — нетривиальное решение уравнения (11). Вводя обозначение $\varphi = \big(V^{\pm}\big)^{\frac{1}{2}} f$, из (11) получаем $f = r_0(\mathbf{k}, z)\big(V^{\pm}\big)^{\frac{1}{2}}\varphi$, следовательно, $\big(V^{\pm}\big)^{\frac{1}{2}} f = \big(V^{\pm}\big)^{\frac{1}{2}} r_0(\mathbf{k}, z)\big(V^{\pm}\big)^{\frac{1}{2}}\varphi$. Отсюда приходим к выводу, что уравнение

$$\varphi = G^{\pm}(\mathbf{k}, z)\varphi \tag{13}$$

имеет ненулевое решение, т. е. φ является собственной функцией оператора $G^{\pm}(\mathbf{k}, z)$, соответствующей собственному значению $\lambda = 1$. Из $\varphi = 0$ следовало бы $f = 0$, противоречащее тому, что f — собственная функция. Обратно, если уравнение (13) имеет ненулевое решение $\varphi \in L_2^{\pm}(\mathbb{T}^2)$, то функция f, построенная по (12), также отлична от нуля, удовлетворяет уравнению (11) и принадлежит $L_2^{\pm}(\mathbb{T}^2)$. □

Из доказательства леммы 2 следует

$$\dim Ker\big(H^{\pm}(\mathbf{k}) - zI\big) = \dim Ker\big(G^{\pm}(\mathbf{k}, z) - I\big). \tag{14}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathbf{k} \in \mathcal{K}(j)$ и $\hat{v} \in \mathrm{P}(j)$.

а) Не нарушая общности, предположим, что $j = 1$. В этом случае ядро $v_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{p})$ интегрального оператора $(V^+)^{\frac{1}{2}}$ имеет вид

$$v_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{v}^{\,\frac{1}{2}}(n\mathbf{e}_1)\cos np_1$$

и зависит только от p_1, а для функции $\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})$ имеет место представление

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 4 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2,$$

которая зависит только от p_2. Поэтому для ядра $G^+(\mathbf{k}, z; \mathbf{p}, \mathbf{q})$ интегрального оператора $G^+(\mathbf{k}, z)$ имеет место

$$G^+(\mathbf{k}, z; \mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \frac{v_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{p}-\mathbf{t})v_+^{\frac{1}{2}}(\mathbf{t}-\mathbf{q})}{\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) - z} d\mathbf{t} = \frac{1}{2\pi} v_+(\mathbf{p}-\mathbf{q}) d(\mathbf{k}, z), \tag{15}$$

где $v_+(\mathbf{p}-\mathbf{q})$ — ядро интегрального оператора V^+ (см. (7)).

Из равенства (15) следует операторное равенство

$$G^+(\mathbf{k}, z) = d(\mathbf{k}, z)V^+. \tag{16}$$

Это означает, что собственные функции оператора V^+ также являются собственными функциями оператора $G^+(\mathbf{k}, z)$. При условии теоремы 1 ненулевыми собственными значениями оператора V^+ являются числа $\hat{v}(n\mathbf{e}_1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, им соответствуют собственные функции $\varphi_n(p_1) = \cos np_1$. Тогда в силу (16) числа

$$\lambda_n(\mathbf{k}, z) = \hat{v}(n\mathbf{e}_1)d(\mathbf{k}, z), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{17}$$

являются собственными значениями оператора $G^+(\mathbf{k}, z)$. Ввиду монотонности потенциала $\hat{v}(n\mathbf{e}_1) > \hat{v}((n+1)\mathbf{e}_1)$

$$\lambda_0(\mathbf{k}, z) > \lambda_1(\mathbf{k}, z) > \cdots > \lambda_n(\mathbf{k}, z) > \cdots .$$

Заметим, что при каждом $n \in \mathbb{Z}_+$ число $\hat{v}(n\mathbf{e}_1)$ — невырожденное собственное значение оператора V^+, поэтому $\lambda_n(\mathbf{k}, z)$ является невырожденным собственным значением оператора $G^+(\mathbf{k}, z)$, т. е.

$$\dim Ker\big(G^+(\mathbf{k}, z) - \lambda_n(\mathbf{k}, z)I\big) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

Теперь покажем, что для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ уравнение
$$\lambda_n(\mathbf{k}, z) = 1 \tag{19}$$
имеет единственное решение. Учитывая (8) и (17), получим эквивалентное к (19) уравнение
$$(m(\mathbf{k}) - z)(M(\mathbf{k}) - z) = \hat{v}^2(n\mathbf{e}_1). \tag{20}$$
Решая квадратное уравнение (20) относительно z и учитывая $z < m(\mathbf{k})$, убедимся, что решение $z_n(\mathbf{k})$ имеет вид (9). Из леммы 1 следует, что числа $z_n(\mathbf{k})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ являются собственными значениями оператора $H^+(\mathbf{k})$. Утверждение теоремы о невырожденности собственных значений следует из (18) и (14). Так как собственным значениям $\lambda_n(\mathbf{k}, z)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, оператора $G^+(\mathbf{k}, z)$ соответствуют собственные функции $\varphi_n(\mathbf{p}) = \cos np_1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то из соотношения (12) мы заключаем, что собственным значениям $z_n(\mathbf{k}), n \in \mathbb{Z}_+$, соответствуют собственные функции f_n^+ вида (10).

Доказательство п. b) теоремы аналогично доказательству п. a), поэтому мы пропускаем его. □

Замечание 3. Каждое собственное значение
$$z_n((\pi, k_2)) = 4 - \sqrt{4\cos^2\frac{k_2}{2} + \hat{v}^2(n\mathbf{e}_1)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$
оператора $H^+((\pi, k_2))$ есть четная функция от $k_2 \in [-\pi, \pi]$, которая возрастает на отрезке $[0, \pi]$. Из монотонности $\hat{v}$ и (9) следует $z_n(\mathbf{k}) < z_{n+1}(\mathbf{k})$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство теоремы 2. Не нарушая общности, рассмотрим случай $j = 1$. В этом случае $\omega((\pi, k_2)) = 4\cos\frac{k_2}{2}$. Из определения $m(\mathbf{k})$ и $z_n(\mathbf{k})$ вытекает, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место
$$m((\pi, k_2)) - z_n((\pi, k_2)) = \frac{\hat{v}^2(n\mathbf{e}_1)}{\sqrt{4\cos^2\frac{k_2}{2} + \hat{v}^2(n\mathbf{e}_1)} + 2\cos\frac{k_2}{2}} < \frac{\hat{v}^2(n\mathbf{e}_1)}{\omega((\pi, k_2))}.$$
Отсюда следует утверждение теоремы.

Заключение

Таким образом, при $k \in \mathcal{K}(1)$, $\hat{v} \in P(1)$ существенный и дискретный спектры оператора $H(\mathbf{k})$ описываются явно:
$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H(\mathbf{k})) = \left[4 - 2\cos\frac{k_2}{2},\ 4 + 2\cos\frac{k_2}{2}\right], \quad \sigma_{\mathrm{disc}}(H(\mathbf{k})) = \{z_0(\mathbf{k}), z_1(\mathbf{k}), \ldots, z_n(\mathbf{k}), \ldots\}.$$

Если потенциал $\hat{v}(n\mathbf{e}_1)$ стремится к нулю по степеням n, т. е. $\hat{v}(n\mathbf{e}_1) = n^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, то разность $m(\mathbf{k}) - z_n(\mathbf{k})$ также стремится к нулю по $n^{-2\alpha}$. Теперь допустим, что $\hat{v}(n\mathbf{e}_1) = ae^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда разность $m(\mathbf{k}) - z_n(\mathbf{k})$ экспоненциально убывает к нулю, т. е.
$$m(\mathbf{k}) - z_n(\mathbf{k}) \approx \frac{a^2}{4\cos\frac{k_2}{2}} e^{-2n}.$$
Кроме того, коэффициент перед экспонентой находится точно. Он четно зависит от второй координаты k_2 полного квазиимпульса $\mathbf{k}$ и монотонно возрастает по $k_2 \in (0, \pi)$.

Проверяем существенность условий, заданных на потенциал $\hat{v}$. Допустим $k \in \mathcal{K}(1)$ и $\operatorname{supp}\hat{v} \subset \mathbf{e}_1\mathbb{Z}$. Тогда оператор $H(\mathbf{k})$ имеет бесконечное число собственных значений $z_n(\mathbf{k})$, определенных по формуле (9). Если потенциал $\hat{v}$ не является четным, то подпространства

$L_2^+(\mathbb{T}^2)$ и $L_2^-(\mathbb{T}^2)$ не являются инвариантными относительно оператора $H(\mathbf{k})$. Если не требуем монотонность от потенциала $\hat{v}$, то утверждение о кратности собственных значений $z_n(\mathbf{k})$, вообще говоря, теряет свою силу.

Литература

[1] Mattis D.C. *The Few-Body Problem on a Lattice*, Rev. Modern Phys. **58** (2), 361–379 (1986).

[2] Faria da Veiga P.A., Ioriatti L., O'Carroll M. *Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schrödinger Hamiltonians*, Phys. Rev. E, **66** (1) (2002).

[3] Abdullaev J.I., Ikromov I.A. *Finiteness of the number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice*, Theor. and Math. Phys. **152** (3), 1299–1312 (2007).

[4] Abdullaev J.I., Khalkhuzhaev A.M., Usmonov L.S. *Monotonicity of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator a lattice*, Nanosystems Phys. Chemistry Math. **12** (6), 657–663 (2021).

[5] Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Расулов Т.Х. *Инвариантные подпространства и собственные значения трехчастичного дискретного оператора Шрёдингера*, Изв. вузов. Матем. (9), 3–19 (2023).

[6] Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М. *Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамилтониана*, Изв. вузов. Матем. (7), 3–12 (2023).

[7] Faddeev L.D., Merkuriev S.P. *Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems* (Kluwer Academic Publ., 1993).

[8] Mogilner A.I. *Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and result, Many Particle Hamiltonians: Spectra and Scattering*, Adv. Soviet Math. **5**, 139–194 (1991).

[9] Маматов Ш.С., Минлос Р.А. *Связанные состояния двухчастичного кластерного оператора*, Теор. и матем. физ. **79** (2), 163–179 (1989).

[10] Minlos R.A., Mogilner A.I. *Some Problems Concerning Spectra of Lattice Models, in: Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard*, Proc. Conf. in Dubna, USSR, 6–10 September, P. Exner and P. Seba, eds., World Sci., Singapore, 243–257 (1989).

[11] Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Хужамиеров И.А. *Условие существования собственного значения трехчастичного оператора Шрёдингера на решетке*, Изв. вузов. Матем. (2), 3–25 (2023).

[12] Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. *Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Изв. вузов. Матем. (1), 61–70 (2014).

[13] Расулов Т.Х. *Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц*, Изв. вузов. Матем. (12), 59–69 (2008).

[14] Лакаев С.Н., Халхужаев А.М. *О спектре двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке*, Теор. и матем. физ. **155** (2), 287–300 (2008).

[15] Абдуллаев Ж.И., Мамиров Б.У. *Асимптотика собственных значений двухчастичного дискретного оператора Шрёдингера*, Теор. и матем. физ. **176** (3), 417–428 (2013).

Жаникул Ибрагимович Абдуллаев

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова,
Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

`e-mail:` jabdullaev@mail.ru

Ахмад Мияссарович Халхужаев

Институт математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан,
просп. М. Улугбека, д. 81, г. Ташкент, 100170, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбала, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан;
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова,
Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

`e-mail:` ahmad_x@mail.ru

Йулдош Сафарович Шотемиров

Навоийский государственный педагогический институт,
ул. Ибн Сино, д. 45, г. Навои, 210100, Республика Узбекистан,

e-mail: shotemirov.y@gmail.com

J.I. Abdullaev, A.M. Khalkhuzhaev, and Yu.S. Shotemirov

On the infinite number of eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on a lattice

Abstract. We consider the Schrödinger operator $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^2$, associated with a system of two particles on a two-dimensional lattice. It is shown that the subspaces of even as well as odd functions are invariant under operator $H(\mathbf{k})$. The sets of quasimomenta $\mathcal{K}(1)$, $\mathcal{K}(2)$ and the class of potentials $\mathrm{P}(1)$, $\mathrm{P}(2)$ are described, for which the operator $H(\mathbf{k})$ has infinite number of eigenvalues $z_n(\mathbf{k})$, $n \in \mathbb{Z}_+$, for $\mathbf{k} \in \mathcal{K}(j)$, $\hat{v} \in \mathrm{P}(j)$. The explicit form of $z_n(\mathbf{k})$ and the rate of convergence of the sequence $z_n(\mathbf{k})$ to the bottom of the essential spectrum are found.

Keywords: lattice, Hamiltonian, Schrödinger operator, quasimomentum, width of the continuous spectrum, potential, eigenvalue, eigenfunction.

Janikul Ibragimovich Abdullaev

Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
15 University blv., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: jabdullaev@mail.ru

Ahmad Miyassarovich Khalkhuzhaev

V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences,
81 M. Ulugbek Ave., Tashkent, 100170 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan;
Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
15 University blv., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan,

e-mail: ahmad_x@mail.ru

Yuldosh Safarovich Shotemirov

Navoi State Pedagogical Institute,
45 Ibn Sino str., Navoi, 210100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: shotemirov.y@gmail.com