Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №11, с. 105–110 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное С.М. Скрябиным

Д.Т. ТАПКИН

ИНВОЛЮЦИИ ВТОРОГО РОДА В АЛГЕБРАХ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

Аннотация. Получен критерий эквивалетности инволюций второго рода в алгебре матриц над коммутативным кольцом. В частности, показано, что в алгебре $T_n(F)$ верхнетреугольных матриц над полем F произвольной характеристики две инволюции второго рода эквивалентны в точности тогда, когда они совпадают в ограничении на центр алгебры.

Ключевые слова: алгебра верхнетреугольных матриц, инволюция, эквивалентность инволюций.

УДК: 512.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-105-110

Введение

Одной из классических задач теории колец является описание инволюций в алгебрах. Стандартные примеры инволюций — транспонирование в алгебре матриц и сопряжение в поле комплексных чисел и алгебре кватернионов. Систематическое изучение инволюций центральных простых алгебр было впервые предпринято А. Альбертом в 30-е гг. Многие его результаты нашли отражение в монографии [1].

Так как композиция двух инволюций алгебры является ее автоморфизмом, то особый интерес представляет вопрос классификации инволюций в алгебрах, в которых все автоморфизмы являются внутренними. В [2] была получена классификация инволюций первого рода в алгебре $T_n(F)$ верхнетреугольных матриц над полем отличной от двух характеристики. В общем случае алгебры верхнетреугольных матриц над коммутативным кольцом вопрос классификации был решен в [3]. Как было показано, случай поля F характеристики 2 сильно отличается от случая поля отличной от двух характеристики. Классификация инволюций второго рода в алгебре $T_n(F)$ верхнетреугольных матриц над полем отличной от двух характеристики была получена в [4]. В текущей работе получен критерий эквивалентности инволюций второго рода в алгебре верхнетреугольных матриц над коммутативным кольцом. В частности, показано что в алгебре $T_n(F)$ верхнетреугольных матриц над полем F произвольной характеристики две инволюции второго рода эквивалентны в точности тогда, когда они совпадают в ограничении на центр алгебры $T_n(F)$.

Все рассматриваемые алгебры являются унитальными и конечномерными.

Поступила в редакцию 23.08.2024, после доработки 23.08.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 23-21-10086).

1. Предварительные сведения

Пусть R — кольцо. Отображение $\tau : R \to R$ будем называть инволюцией, если для всех $x, y \in R$

1) $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$,
2) $\tau(xy) = \tau(y)\tau(x)$,
3) $\tau^2(x) = x$.

Очевидно, что инволюция τ обязана сохранять центр кольца R: $\tau(Z(R)) = Z(R)$. Если инволюция τ действует тождественно на центре, то τ называется инволюцией первого рода. В противном случае τ называется инволюцией второго рода.

Пусть кольцо R коммутативно и A — центральная R-алгебра. Инволюции γ, τ R-алгебры A называются эквивалентными, если существует R-линейный автоморфизм φ алгебры A такой, что $\varphi \circ \gamma = \tau \circ \varphi$.

Леммы 2.1–2.4 из [4] были доказаны для алгебр над полем F отличной от двух характеристики. Нетрудно видеть, что доказательства остаются верными и для алгебр над произвольным коммутативным кольцом. Выделим отдельно следующее утверждение.

Лемма 1 ([4], лемма 2.4). *Пусть кольцо R коммутативно и A — R-алгебра. Пусть также γ — некоторая инволюция на A и V — обратимый элемент A. Отображение $a \mapsto V\gamma(a)V^{-1}$, определенное на A, будет инволюцией тогда и только тогда, когда $\gamma(V) = \varepsilon V$ для некоторого $\varepsilon \in Z(A)$. Более того, в этом случае $\varepsilon\gamma(\varepsilon) = 1$.*

Инволюцию вида $a \mapsto v\gamma(a)v^{-1}$ далее будем обозначать γ_v. Соответствующий элемент ε обозначим через ε_v. Индуцированную инволюцией γ инволюцию на центре алгебры будем обозначать $\bar{\gamma}$. Следующие два технических утверждения будут нам полезны при классификации инволюций.

Следствие 1. Пусть кольцо R коммутативно, A — центральная R-алгебра и все автоморфизмы алгебры A внутренние. Пусть также γ — некоторая инволюция на A. Инволюции γ_V и γ_U эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют обратимый элемент $W \in A$ и $\lambda \in U(R)$ такие, что $WU\gamma(W) = \lambda V$.

Лемма 2. *Пусть кольцо R коммутативно, A — центральная R-алгебра и все автоморфизмы алгебры A внутренние. Пусть также γ — некоторая инволюция на A. Если инволюции γ_V и γ_U эквивалентны, то для некоторого $\lambda \in U(R)$ имеет место равенство $\varepsilon_V = \dfrac{\lambda}{\bar{\gamma}(\lambda)}\varepsilon_U$.*

2. Инволюции над кольцом

Всюду далее рассматриваются только инволюции второго рода.

Пусть R — коммутативное кольцо. Для любого натурального n R-алгебра $T_n(R)$ является центральной и все ее автоморфизмы внутренние согласно [5]. Если алгебра $T_n(R)$ обладает инволюцией второго рода, то инволюцией второго рода обладает и кольцо R.

Пусть теперь кольцо R обладает инволюцией второго рода λ. В алгебре $T_n(R)$ определим отображение $t_\lambda : T_n(R) \to T_n(R)$ по правилу

$$(a_{ij}) \mapsto J(\lambda(a_{ij}))^t J,$$

где $J \in T_n(R)$ — перестановочная матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $J^2 = I_n$, то нетрудно видеть, что отображение t_λ является инволюцией второго рода алгебры $T_n(R)$. Для удобства записи будем предполагать, что инволюция t_λ определена для любого натурального n. Отметим, что инволюция t_λ симметрично отражает матрицу относительно побочной диагонали и применяет к элементам полученной матрицы инволюцию λ. Если матрица $V \in T_n(R)$ обратима и $t_\lambda(V) = \varepsilon_V V$ для некоторого скаляра ε_V, то под $t_{\lambda,V}$ будем понимать инволюцию $T_n(R)$ вида $a \mapsto V t_\lambda(a) V^{-1}$. Иными словами, $t_{\lambda,V}$ является инволюцией γ_V при $\gamma = t_\lambda$.

Как и в [3], квадратную матрицу размера $n \times n$, на побочной диагонали которой стоят элементы $a_1, \ldots, a_n$ (начиная с правого верхнего угла), будем обозначать через $\operatorname{adiag}(a_1, \ldots, a_n)$. Далее нас будут интересовать побочные диагонали матриц, поэтому под $(a_{n+1-j,\,i}) \in M_n(R)$ будем понимать матрицу, на пересечении строки i и столбца j которой стоит элемент $a_{n+1-j,\,i}$. При таком способе нумерации элементов в правом верхнем углу матрицы стоит элемент a_{11}, а в левом нижнем — a_{nn}.

Легко видеть, что если две инволюции R-алгебры $T_n(R)$ эквивалентны, то они совпадают в ограничении на центр $T_n(R)$. Следующие две технические леммы дают критерий эквивалентности двух инволюций при условии их совпадения на центре. В [3] аналогичные леммы были доказаны для инволюций первого рода. С некоторыми изменениями они сохраняются и для инволюций второго рода.

Лемма 3. *Пусть кольцо R коммутативно, $k \in \mathbb{N}$ и λ — инволюция на R. Пусть также даны обратимые матрицы $B, B' \in T_{2k+1}(R)$ такие, что $t_\lambda(B) = B$ и $t_\lambda(B') = B'$, причем*

$$B = \begin{pmatrix} X & a & Z \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & Y \end{pmatrix},\ B' = \begin{pmatrix} X' & a' & Z' \\ 0 & 1 & b' \\ 0 & 0 & Y' \end{pmatrix}, \quad X, Y, X', Y' \in T_k(R), \quad Z, Z' \in M_k(R).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *инволюции γ_B и $\gamma_{B'}$ эквивалентны*
2) *$Z = (z_{k+1-j,\,i})$, $Z' = (z'_{k+1-j,\,i})$ и существуют элементы $c_{ii} \in U(R)$, $e_i, c_{ij} \in R$, для всех $1 \le i \le k$ и $i < j \le k$ такие, что*

$$z'_{ii} - \left(c_{ii}\lambda(c_{ii}) z_{ii} + e_i \lambda(e_i) + \sum_{j=i+1}^{k} c_{ij}\lambda(c_{ij}) z_{jj} \right) \in \{a + \lambda(a) \mid a \in R\}.$$

Через R^λ будем обозначать неподвижное подкольцо инволюции λ кольца R:

$$R^\lambda = \{a \in R \mid \lambda(a) = a\}.$$

Лемма 4. *Пусть кольцо R коммутативно, $k \in \mathbb{N}$, λ — инволюция на R, $\varepsilon \in R$ и $\varepsilon\lambda(\varepsilon) = 1$. Пусть также даны обратимые матрицы $B, B' \in T_{2k}(R)$ такие, что $t_\lambda(B) = \varepsilon B$ и $t_\lambda(B') = \varepsilon B'$, причем*

$$B = \begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} X' & Z' \\ 0 & Y' \end{pmatrix}, \quad X, Y, X', Y' \in T_k(R), \quad Z, Z' \in M_k(R).$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

1) *инволюции* γ_B *и* $\gamma_{B'}$ *эквивалентны*;
2) $Z = (z_{k+1-j,i})$, $Z' = (z'_{k+1-j,i})$ *и существуют элементы* $w \in U(R) \cap R^\lambda$, $c_{ii} \in U(R)$, $c_{ij} \in R$ *для всех* $1 \le i \le k$ *и* $i < j \le k$ *такие, что*

$$z'_{ii} - w\left(c_{ii}\lambda(c_{ii})z_{ii} + \sum_{j=i+1}^{k} c_{ij}\lambda(c_{ij})z_{jj}\right) \in \{a + \lambda(\varepsilon a) \mid a \in R\}.$$

Как показывают леммы 3 и 4, нас интересует только побочная диагональ матрицы Z. Для удобства дальнейших рассуждений нам потребуется техническое предложение.

Пусть кольцо R коммутативно, λ — инволюция второго рода на R, $\varepsilon \in R$ и $\varepsilon\lambda(\varepsilon) = 1$. Положим

$$R^{\lambda,\varepsilon} = \{r \in R \mid \lambda(r) = \varepsilon r\}.$$

В частности, $R^\lambda = R^{\lambda,1}$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. На множестве $(R^{\lambda,\varepsilon})^k$ введем два отношения эквивалентности. Пусть $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_k)$, $\overline{h} = (h_1, \ldots, h_k) \in (R^{\lambda,\varepsilon})^k$. Положим

1) $\overline{z} \sim_{\mathrm{even}} \overline{h} \Leftrightarrow$ существуют $w \in U(R) \cap R^\lambda$ и наборы $c_{ii} \in U(R)$, $c_{ij} \in R$ такие, что

$$h_i - w\left(c_{ii}\lambda(c_{ii})z_i + \sum_{j=i+1}^{k} c_{ij}\lambda(c_{ij})z_j\right) \in \{a + \lambda(\varepsilon a) \mid a \in R\};$$

2) $\overline{z} \sim_{\mathrm{odd}} \overline{h} \Leftrightarrow$ существуют наборы $c_{ii} \in U(R)$, $e_i, c_{ij} \in R$ такие, что

$$h_i - \left(c_{ii}\lambda(c_{ii})z_i + e_i\lambda(e_i) + \sum_{j=i+1}^{k} c_{ij}\lambda(c_{ij})z_j\right) \in \{a + \lambda(a) \mid a \in R\}.$$

Предложение. *Пусть кольцо* R *коммутативно,* $k \in \mathbb{N}$, λ *— инволюция на* R, $\varepsilon \in R$ *и* $\varepsilon\lambda(\varepsilon) = 1$. *Тогда*

1) *если* $n = 2k$ *четно, то множество классов эквивалентности инволюций* $T_n(R)$ *вида* $t_{\lambda,B}$, *где* $t_\lambda(B) = \varepsilon B$, *находится в биективном соответствии с* $(R^{\lambda,\varepsilon})^k/\sim_{\mathrm{even}}$;
2) *если* $n = 2k+1$ *нечетно, то множество классов эквивалентности инволюций* $T_n(R)$, *совпадающих с* λ *на* R, *находится в биективном соответствии с* $(R^\lambda)^k/\sim_{\mathrm{odd}}$.

Стоит отдельно указать, что при классификации инволюций при четном n нас интересуют не все значения ε, отвечающие равенству $\varepsilon\lambda(\varepsilon) = 1$. Если $S = \{r \in R \mid r\lambda(r) = 1\}$, то на S можно ввести отношение эквивалентности по правилу

$$r \sim_S r' \quad \Leftrightarrow \quad \exists w \in U(R)\ r' = \frac{w}{\lambda(w)} r.$$

Необходимо из каждого класса эквивалентности взять ровно по одному представителю и для него рассмотреть классы эквивалентности из п. 1) предложения.

Выделим частный случай булевых колец.

Теорема 1. *Пусть* R *— булево кольцо и число* $n = 2k+1$ *нечетно. Множество классов эквивалентности инволюций второго рода в* R*-алгебре* $T_n(R)$ *находится в биективном соответствии с множеством инволюций второго рода в* R.

Если R — конечное булево кольцо, то можно считать, что $R = \mathbb{Z}_2^m$ и элементами кольца являются вектор-строки из m элементов. Пусть λ — инволюция второго рода на R. Для каждого i от 1 до m положим

$$f_i = (\delta_{1,i}, \delta_{2,i}, \ldots, \delta_{m,i}),$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Легко проверить, что набор $f_1, \ldots, f_m$ — единственный набор из m попарно ортогональных ненулевых идемпотентов в кольце R. Следовательно, λ переводит этот набор в себя. Так как λ — инволюция, то из $\lambda(f_i) = f_j$ следует, что $\lambda(f_j) = f_i$. Поэтому множество инволюций второго рода в R находится в биективном соответствии с множеством перестановок порядка 2 в S_m.

Если мы фиксировали инволюцию λ на кольце $R = \mathbb{Z}_2^m$, то можно выбрать такое векторное представление элементов кольца R, что для некоторой константы $q \in \mathbb{N}$

1) для $1 \le i \le q$ имеем $\lambda(f_{2i-1}) = f_{2i}$, $\lambda(f_{2i}) = f_{2i-1}$;
2) для $j > 2q$ имеем $\lambda(f_j) = f_j$.

Соответственно для вектора $(a_1, \ldots, a_m) \in R$ инволюция λ переставляет между собой элементы на первых q парах мест и оставляет на месте остальные элементы. Инволюцию такого вида обозначим через λ_q.

Теорема 2. *Пусть $R = \mathbb{Z}_2^m$ — конечное булево кольцо, число $n = 2k$ четно и $q \in \mathbb{N}$. Инволюции второго рода в R-алгебре $T_n(R)$, которые действуют на R как λ_q, распадаются в $(k+1)^q$ классов эквивалентности.*

3. Инволюции над полем

Перейдем к классификации инволюций второго рода в F-алгебре $T_n(F)$, где F — поле характеристики 2. Для начала пусть $n = 2k+1$. В условиях леммы 3 для матриц Z и Z' должны выполняться тождества $Z = t_\lambda(Z)$ и $Z' = t_\lambda(Z')$. Таким образом, имеет место включение

$$z'_{ii} - \left(c_{ii}\lambda(c_{ii})z_{ii} + e_i\lambda(e_i) + \sum_{j=i+1}^{k} c_{ij}\lambda(c_{ij})z_{jj} \right) \in F^\lambda.$$

Возьмем произвольный $f \in F^\lambda$. В силу того, что λ является инволюцией второго рода, в поле F существует элемент α такой, что $\lambda(\alpha) \ne \alpha$. Отсюда $c = \alpha + \lambda(\alpha) \ne 0$ и $f = (\alpha c^{-1} f) + \lambda(\alpha c^{-1} f) \in \{a + \lambda(a) \mid a \in R\}$. Таким образом, любые две инволюции, совпадающие на центре $T_{2k+1}(F)$, эквивалентны, и мы получаем

Следствие 2. Пусть поле F характеристики 2 и $n = 2k+1$ — нечетное натуральное число. Множество классов эквивалентности инволюций второго рода в F-алгебре $T_n(F)$ находится в биективном соответствии с множеством инволюций второго рода в F.

Пусть теперь $n = 2k$. Можно аналогично показать, что в условиях леммы 4 инволюции γ_B и $\gamma_{B'}$ всегда эквивалентны. Однако останется вопрос эквивалентности инволюций γ_B и $\gamma_{B'}$, если $t_\lambda(B) = \varepsilon B$ и $t_\lambda(B') = \varepsilon' B'$. Поэтому перейдем к данному вопросу напрямую.

Лемма 5. *Пусть поле F характеристики 2 обладает инволюциями второго рода и $n = 2k$ — четное натуральное число. Если γ — инволюция второго рода алгебры $T_n(F)$, то инволюции γ_V и γ_U эквивалентны тогда и только тогда, когда для некоторого $\lambda \in U(R)$ имеет место равенство $\varepsilon_V = \dfrac{\lambda}{\bar{\gamma}(\lambda)}\varepsilon_U$.*

Пусть F — поле характеристики 2, число n четно и γ — инволюция второго рода F-алгебры $T_n(F)$. Так как инволюции γ и $t_{\bar{\gamma}}$ совпадают в ограничении на F, то $\gamma = t_{\bar{\gamma},V}$ для некоторой обратимой матрицы V и $t_{\bar{\gamma}}(V) = \varepsilon V$, где $\varepsilon\bar{\gamma}(\varepsilon) = 1$. Через H обозначим неподвижное поле инволюции $\bar{\gamma}$. Тогда F/H — циклическое расширение Галуа и выражение $\varepsilon\bar{\gamma}(\varepsilon)$ совпадает с нормой элемента ε. Согласно теореме Гильберта существует $\lambda \in F$ такой, что $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{\bar{\gamma}(\lambda)}$. Следовательно, инволюции γ и $t_{\bar{\gamma}}$ эквивалентны по лемме 5. С учетом ([4], теорема 3.2; [4], теорема 4.4) нами доказана

Теорема 3. *Пусть F — поле и n — натуральное число. Две инволюции второго рода F-алгебры $T_n(F)$ эквивалентны в точности тогда, когда они совпадают в ограничении на центр $T_n(F)$. В частности, множество классов эквивалентности инволюций второго рода в F-алгебре $T_n(F)$ находится в биективном соответствии с множеством инволюций второго рода в F.*

Рассмотрим два примера: конечные поля и поля рациональных функций над конечным полем.

Теорема 4. *В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k}})$ все инволюции второго рода попарно эквивалентны.*

Теорема 5. *В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k}}(x))$ имеется ровно $2^{4k} + 2^{3k} + 2^k - 1$ классов эквивалентности инволюций второго рода. В алгебре $T_n(\mathbb{F}_{2^{2k-1}}(x))$ имеется ровно $2^{4k-2} - 1$ классов эквивалентности инволюций второго рода.*

Литература

[1] Albert A.A Ivanov I.I. *Structure of algebras*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **24** (AMS, Providence, R.I., 1961).

[2] Vincenzo O.M., Koshlukov P., Scala R. *Involutions for upper triangular matrix algebras*, Adv. Appl. Math. **37** (4), 541–568 (2006).

[3] Кульгускин И.А., Тапкин Д.Т. *Инволюции в алгебрах верхнетреугольных матриц*, Изв. вузов. Матем. (6), 11–30 (2023).

[4] Urure R.I.Q., Silva D.C. *Involutions of the second kind for upper triangular matrix algebras*, Commun. Algebra **51** (6), 2326–2333 (2023).

[5] Kezlan T.P. *A note on algebra automorphisms of triangular matrices over commutative rings*, Linear Algebra Appl. **135**, 181–184 (1990).

Даниль Тагирзянович Тапкин

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: danil.tapkin@yandex.ru

D.T. Tapkin

The second-kind involutions of upper triangular matrix algebras

Abstract. We provide a criterion for the equivalency of the second-kind involutions of upper triangular matrix algebras over commutative rings. For an algebra $T_n(F)$ of upper triangular matrices over a field F it is proven that two involutions are equivalent if and only if they coincide after restriction to F.

Keywords: upper triangular matrix algebra, involution, equivalency of involutions.

Danil Tagirzyanovich Tapkin

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: danil.tapkin@yandex.ru