*Известия вузов. Математика* *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
*2024, №11, с. 97–104* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым*

*Н.Н. РОМАНОВСКИЙ*

# ОБ ОБОБЩЕНИЯХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА МЕТРИЧЕСКИЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ СЛУЧАИ

*Аннотация.* В работе предложен подход, позволяющий единообразно описывать различные обобщения классических пространств Соболева для функций, заданных на метрическом или топологическом пространстве и для функций со значениями в метрическом или топологическом пространстве, а также пространства функций, удовлетворяющих некоторым дифференциальным соотношениям.

*Ключевые слова*: пространство Соболева, метрическое пространство, топологическое пространство.

*УДК*: 517.518: 517.518

*DOI*: 10.26907/0021-3446-2024-11-97-104

## Введение

Известно, что теория пространств Соболева имеет многочисленные эффективные применения в различных областях математики и других наук, во многих прикладных задачах (см., например, [1]–[5]). Некоторые обобщения этой теории и их применения можно найти в работах [6]–[18].

Имеются различные подходы к описанию пространств Соболева. Полезным оказался подход определения $W^{1,p}(V)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, как множества функций класса $L_p(V)$, удовлетворяющих поточечным оценкам

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|(h(x) + h(y)),$$

которые должны выполняться для п. в. $x, y \in V$, где функция $h \in L_p(V)$ называется верхним градиентом функции $u$ ([7]–[9]).

Такое описание может быть непосредственно использовано для доказательства теорем вложения и теорем о следах, а также может быть, без каких-либо изменений, применено для определения пространств Соболева для функций, заданных на метрическом пространстве с мерой.

Поступила в редакцию 03.09.2024, после доработки 03.09.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006).

В работах [19]–[22] этот подход несколько изменен, что позволило обобщить его для функций, заданных на топологическом пространстве, а также упростить доказательство некоторых теорем вложения. Новый подход оказался удобным для доказательства теорем вложения в весовые пространства Лебега, для функций, заданных в нерегулярных областях, для доказательства теорем вложения в пространства Орлича с быстро растущей порождающей функцией.

В данной работе мы определяем более широкую шкалу пространств типа Соболева для функций, заданных на топологическом пространстве со значениями в линейном топологическом пространстве.

Пусть $X$ — произвольное нормальное топологическое пространство, на котором задана борелевская счетно-аддитивная мера $\mu$. Пусть $V$ — открытое подмножество $X$, $\mu(V) < \infty$. Предположим, что $\mathcal{A}$ — система некоторых открытых подмножеств $V$ и что задана монотонная (возрастающая по включению множеств) функция $\eta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$, причем для всех множеств $A \in \mathcal{A}$ выполняется неравенство $\eta(A) \geq C(V)\mu(A)$, где $C(V)$ — константа, зависящая только от $V$.

**Определение 1.** Пусть $u \in L_p(V)$, $p \in (1,\infty)$. Определим функцию $D_{\eta,\max}u : V \to \mathbb{R}_+$:

$$[D_{\eta,\max}u](x) = \sup_{A_1,A_2\in\mathcal{A}:x\in A_1\cap A_2} \left(\frac{1}{\max(\eta(A_1),\eta(A_2))}|u_{A_1} - u_{A_2}|\right), \tag{1}$$

где $u_A = \dfrac{1}{\mu(A)} \displaystyle\int\limits_A u(x)\, d\mu(x)$.

**Определение 2.** Предположим, что $p \in (1,\infty)$. Будем говорить, что функция $u \in L_p(V)$ принадлежит множеству $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$, если $D_{\eta,\max}u$ принадлежит пространству $L_p(V)$. Функцию $D_{\eta,\max}u$ будем называть *точным верхним градиентом* функции $u$ в смысле функции множеств $\eta$.

**Теорема 1.** *Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mu$ — мера Лебега, область $V$ ограничена. Пусть множество $\mathcal{A}$ состоит из всех шаров, содержащихся в области $V$. Пусть $\{\eta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+\}_{v\in S}$ равна диаметру множества $A \in \mathcal{A}$.*

*Тогда множество $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$ совпадает с классическим пространством Соболева $W^1_p(V)$.*

*Схема доказательства.* Пусть функция $u$ принадлежит классическому пространству Соболева $W^1_p(V)$. Покажем, что $u \in W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$. Для п.в. $x \in B$ выполняется

$$|u(x) - u_B| \leq \eta(B) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int\limits_B |\nabla u|(x)\right) dx.$$

Пусть $g(x) = M(|\nabla u|)(x)$, где $M$ обозначает максимальный оператор. Поскольку максимальный оператор ограничен в $L_p(V)$ для $1 < p < \infty$, то $g \in L_p(V)$, $\|g\|_{L_p(V)} \leq C\|\nabla u\|_{L_p(V)}$. Следовательно, для п.в. $x \in V$ и для каждого шара $B \subset V$ такого, что $x \in B$, выполняется

$$|u(x) - u_B| \leq \eta(B)g(x).$$

Из (1) вытекает, что $D_{\eta,\max}u$ измерима, неотрицательна и удовлетворяет оценке

$$D_{\eta,\max}u \leq 2g(x).$$

Следовательно, $D_{\eta,\max}u \in L_p(V)$ и $\|D_{\eta,\max}u\|_{L_p(V)} \leq C\|\nabla u\|_{L_p(V)}$, $u \in W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$.

Обратно, пусть $u \in W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$. Покажем, что $u \in W^1_p(V)$ (см. также [23]). Фиксируем некоторое координатное направление $e_i$. Пусть $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Обозначим через $u_{i,h}(x)$ функцию, равную $\dfrac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$, если $x \in V$, $\operatorname{dist}(x, \partial V) > 3h$, и нулю в противном случае.

Рассмотрим в качестве $A_1$, $A_2$, $A_3$ шары, первые два из которых имеют центр в точке $x$ и радиусы $r < h$, $3h$, а последний имеет центр в точке $x + he_i$ и радиус $r$. Из (1) вытекает, что для любых множеств $A_1$, $A_2$, принадлежащих $\mathcal{A}$ и содержащих точку $x$, выполняется неравенство

$$\frac{1}{\max(\eta(A_1), \eta(A_2))}|u_{A_1} - u_{A_2}| \le [D_{\eta,\max}u](x).$$

Используя это неравенство для множеств $A_1$, $A_2$ и для множеств $A_2$, $A_3$, сложив полученные неравенства, воспользовавшись неравенством треугольника и устремив $r$ к нулю, получим $\|u_{i,h}\|_{L_p(V)} \le 2\|u_{\eta,\max}\|_{L_p(V)}$. Таким образом, мы получили равномерную по $h > 0$ оценку на $\|u_{i,h}\|_{L_p(V)}$. В силу слабой компактности замкнутых шаров в $L_p(V)$ для $p \in (1, \infty)$, найдется слабо сходящаяся к $u'_i \in L_p(V)$ последовательность $u_{i,h_k}$, $h_k \to 0$ при $k \to \infty$. Пусть $\varphi \in C^\infty_0(V)$, $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\varphi, \partial V) > 3h$, $\varphi_{i,h}(x) = \dfrac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}$. Имеем

$$\frac{1}{h}[u(x+he_i)\varphi(x+he_i) - u(x)\varphi(x)] = \frac{1}{h}[u(x+he_i)\varphi(x+he_i) - u(x)\varphi(x+he_i) + \\ + u(x)\varphi(x+he_i) - u(x)\varphi(x)] = u_{i,h}(x)\varphi(x+he_i) + \varphi_{i,h}(x)u(x).$$

Поскольку, если $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\psi, \partial V) > 2h$, то выполняется $\int\limits_V \psi(x)\,dx = \int\limits_V \psi(x+he_i)\,dx$, получаем $\int\limits_V u_{i,h}(x)\varphi(x+he_i)\,dx = -\int\limits_V u(x)\varphi_{i,h}(x)\,dx$. Переходя к пределу при $h \to 0$, выводим

$$\int\limits_V u'_i(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_V u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\,dx.$$

Таким образом, функция $u'_i \in L_p(V)$ является слабой $i$-й частной производной функции $u$. Поскольку выбор $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ был произволен, получаем $u \in W^1_p(V)$.

**Предложение.** *Пусть $0 < r < 1$, $\{\eta : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+\}_{v \in S}$ равна диаметру множества $A \in \mathcal{A}$ в степени $r$.*

*Тогда $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$ совпадает с пространством Соболева–Слободецкого $W^{(r)}_p(V)$, т. е. пространством функций $u \in L_p(V)$ с конечной полунормой*

$$[u]_{W^{(r)}_p(V)} := \sup_{y \in \mathbb{R}^n,\ y \ne 0}\left(\int_{V_y}\frac{|u(x+y)-u(x)|^p}{|y|^{rp}}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad V_y = \{x \in V : x+y \in V\}.$$

**Лемма 1.** *Предположим, что для любой функции $u \in L_p(V)$ для п.в. $x \in V$ и для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется множество $A_{u,x,\varepsilon} \in \mathcal{A}$, содержащее точку $x$ такое, что $|u(x) - u_{A_{u,x,\varepsilon}}| < \varepsilon$ и, кроме того, $\eta(A_{u,x,\varepsilon}) < \varepsilon$. Предположим, также, что оператор, сопоставляющий функции $u \in L_p(V)$ функцию*

$$M_{\mathcal{A}}u(x) = \sup_{A \in \mathcal{A} : x \in A} u_A,$$

*ограничен в $L_p(V)$.*

*Тогда функция $u \in L_p(V)$ принадлежит пространству $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$ в том и только том случае, если существует неотрицательная функция $h \in L_p(V)$ такая, что для любого $A \in \mathcal{A}$ для п. в. $x$, $y \in A$ выполняется поточечная оценка*

$$|u(x) - u(y)| \leq \eta(A)(h(x) + h(y)). \tag{2}$$

*Схема доказательства.* В силу (1) для любых двух множеств $A_1$, $A_2$ из семейства $\mathcal{A}$, содержащих $x$, выполняется $|u_{A_1} - u_{A_2}| \leq \max(\eta(A_1), \eta(A_2))D_{\eta,\max}u(x)$. Фиксирум произвольное $\varepsilon > 0$. Используем это неравенство для пары множеств $A_{u,x,\varepsilon}$, $A$ и для пары множеств $A_{u,y,\varepsilon}$, $A$. Сложив полученные неравенства, используя неравенство треугольника, получаем

$$|u_{A_{u,x,\varepsilon}} - u_{A_{u,y,\varepsilon}}| \leq \max(\eta(A_{u,x,\varepsilon}), \eta(A_{u,y,\varepsilon}), A)\left([D_{\eta,\max}u](x) + [D_{\eta,\max}u](y)\right).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, в силу предположений леммы, выводим, что для п.в. $x, y \in V$ выполняется $|u(x) - u(y)| \leq \eta(A)\left([D_{\eta,\max}u](x) + [D_{\eta,\max}u](y)\right)$. По определению $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$ функция $D_{\eta,\max}u$ принадлежит $L_p(V)$. Взяв в качестве $h$ функцию $D_{\eta,\max}u$, получаем (2).

Обратно, пусть (2) выполняется для некоторой функции из $L_p(V)$. Проинтегрировав левую и правую части неравенства (2) по множеству $A_1$ по переменной $x$ и по множеству $A_2$ по переменной $y$, и поделив на $\mu(A_1)\mu(A_2)$, получим

$$|u_{A_1} - u_{A_2}| \leq \max(\eta(A_1), \eta(A_2))\left(h_{A_1} + h_{A_2}\right) \leq 2\max(\eta(A_1), \eta(A_2))M_{\mathcal{A}}h(x).$$

Таким образом, измеримая неотрицательная функция $D_{\eta,\max}u$ не превосходит функции $2M_{\mathcal{A}}h$, принадлежащей $L_p(V)$. Таким образом, функция $D_{\eta,\max}u$ принадлежит $L_p(V)$, а функция $u$ принадлежит пространству $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$.

**Теорема 2.** *Пусть $V$ — метрическое пространство, $\mathcal{A}$ — множество шаров в этом метрическом пространстве, $\eta(A)$ — диаметр шара $A$, тогда функция $u \in L_p(V)$ принадлежит пространству $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$ тогда и только тогда, когда она принадлежит пространству Соболева в смысле Боярского и Хайлаша* [7]–[9], [17].

*Схема доказательства.* Отметим, что семейство множеств $\mathcal{A}$ в формулировке теоремы удовлетворяет всем условиям леммы 1. Действительно, при $r \to 0$ для п.в. $x \in V$ одновременно $u_{B(x,r)} \to u(x)$ и $\operatorname{diam}(B(x,r)) \to 0$. Кроме того, $M_{\mathcal{A}}$ совпадает с классическим максимальным оператором и, следовательно, ограничен в $L_p(V)$ для $1 < p < \infty$. Таким образом, утверждение теоремы является непосредственным следствием леммы 1.

**Замечание.** Если в качестве метрического пространства рассмотреть некоторую область $V$ пространства $\mathbb{R}^n$, то множество $\mathcal{A}$ из формулировки теоремы 2 не будет совпадать с множеством $\mathcal{A}$ из формулировки теоремы 1. В формулировке теоремы 2 множество шаров представляет собой множество всевозможных пересечений евклидовых шаров с областью $V$, а в формулировке теоремы 1 мы рассматривали только евклидовы шары, полностью содержащиеся в области $V$. В частности, для области с вырезом определение из теоремы 1 совпадает с классическим, а определение из теоремы 2 более сильное, чем классическое, соответствующее пространство Соболева содержит меньше функций чем классическое пространство Соболева.

**Лемма 2.** *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда функция $u \in L_p(V)$ принадлежит пространству $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V)$ в том и только том случае, если функция*

$$[\tilde{D}_{\eta,\max}u](x) = \limsup_{A \in \mathcal{A}: x \in A, \eta(A) \to 0} \left( \inf_{E:\mu(E)=0} \frac{\operatorname{diam}(u(A \setminus E))}{\eta(A)} \right)$$

*принадлежит пространству $L_p(V)$.*

Последняя лемма позволяет сформулировать определение классов Соболева для отображений со значениями в метрическом пространстве.

**Определение 3.** Будем говорить, что отображение $u : V \to Y$, где $Y$ — метрическое пространство с метрикой $\rho$, принадлежит пространству $W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V;Y)$, если функция

$$[\tilde{D}_{\eta,\max}u](x) = \limsup_{A\in\mathcal{A}:x\in A,\eta(A)\to 0}\left(\inf_{E:\mu(E)=0}\frac{\operatorname{diam}(u(A\setminus E))}{\eta(A)}\right)$$

принадлежит пространству $L_p(V)$.

Приведем также определения соболевских классов функций, заданных в области евклидова пространства, со значениями в метрическом пространстве из [11] и [14].

**Определение 4** ([11])**.** Отображение $u : V \to Y$ принадлежит $W^1_p(V;Y)$, если для любой точки $y \in Y$ функция $u_y(x) = \rho(y, u(x))$ принадлежит $W^1_p(V)$, причем существует функция $w(x) \in L_p(V)$ такая, что для всех $y \in Y$ и для п.в. $x \in V$ выполняется неравенство $|\nabla_x v_y(x)| \le w(x)$.

**Определение 5** ([14])**.** Отображение $u : V \to Y$ принадлежит $W^1_p(V;Y)$, если $L_p$-нормы разностных метрических соотношений $\dfrac{\rho(u(x+he_i),u(x))}{h}$ ограничены равномерно по $h \in \mathbb{R}$.

**Теорема 3.** *В случае* $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ — *множество всех шаров, содержащихся в* $V$, $\eta(A) = \operatorname{diam}(A)$, *определение* 3 *эквивалентно определениям* 4 *и* 5.

*Схема доказательства.* В [14] доказана эквивалентность определений 4 и 5.

Пусть $V$ — область $\mathbb{R}^n$, отображение $u$ принадлежит классу Соболева

$$W^1_p(V;Y), \quad 1 < p < \infty,$$

согласно определению 4. Повторяя рассуждения из первой части теоремы 1, получаем, что для любого $y \in Y$ для любого евклидова шара $B$, содержащегося в области $V$ и содержащего точку $x$, найдется множество $E$ меры нуль такое, что выполняется оценка $\operatorname{diam}(u_y(B\setminus E)) \le \operatorname{diam}(B)\operatorname{ess\,sup}_{x\in B}\tilde{w}(x)$, где $\tilde{w} = Mw$. Учитывая, что $\operatorname{diam}(u(B\setminus E)) = \sup_{y\in Y}\operatorname{diam}(u_y(B\setminus E))$ и то, что правая часть последнего неравенства не зависит от $y$, приходим к оценке

$$\operatorname{diam}(u(B\setminus E)) \le \operatorname{diam}(B)\operatorname*{ess\,sup}_{x\in B}\tilde{w}(x),$$

где $\tilde{w} \in L_p(V)$ в силу ограниченности нормы максимального оператора в $L_p$ для $1 < p < \infty$. Устремляя радиус шара $B$ к нулю, получаем $u \in W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V;Y)$.

Обратно, предположим, что $u \in W^{\eta}_{\mathcal{A},p}(V;Y)$. Покажем, что $u \in W^1_p(V;Y)$ согласно определению 5. Последнее означает, что $L_p$-нормы разностных метрических соотношений $\dfrac{\rho(u(x+he_i),u(x))}{h}$ ограничены равномерно по $h \in \mathbb{R}$. Эту равномерную ограниченность можно доказать дословно повторяя рассуждения из второй части схемы доказательства теоремы 1.

Также, исходя из идей леммы 2, можно сформулировать определение классов Соболева для отображений со значениями в линейном топологическом пространстве.

**Определение 6.** Пусть $X$ — нормальное топологическое пространство, $Y$ — линейное нормальное топологическое пространство. Пусть $V \subset X$ — открытое множество. Пусть на $X$ задана счетно-аддитивная борелевская мера $\mu$. Предположим, что задано некоторое семейство $\mathcal{A}$ открытых подмножеств $V$ и некоторое семейство $\mathcal{B}$ открытых подмножеств $Y$. Пусть на $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{B}$ заданы семейство монотонных функций множеств $\eta_X^\omega$, $\omega \in \Omega$, и семейство монотонных функций множеств $\eta_Y^\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. Предположим, что $p \in (1, \infty)$.

Будем говорить, что функция $u : X \to Y$ принадлежит множеству $W^{\eta_X, \eta_Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}(V; Y)$, если функция

$$[D_{\eta_X^\omega, \eta_Y^\gamma, \max} u](x) = \limsup_{A \in \mathcal{A}: x \in A, \eta(A) \to 0} \left( \inf_{B \in \mathcal{B}, E \subset V: \mu(E)=0, u(A \setminus E) \subset B} \frac{\eta_Y^\gamma(B)}{\eta_X^\omega(A)} \right)$$

принадлежит $L_p(V)$ для каждого $\omega \in \Omega$ и $\gamma \in \Gamma$.

Будем говорить, что последовательность отображений $u_n$ сходится к отображению $u$, если для любого $\omega \in \Omega$ и $\gamma \in \Gamma$ последовательность функций $D_{\eta_X^\omega, \eta_Y^\gamma, \max}(u - u_n)$ сходится к нулю в $L_p(V)$.

**Теорема 4.** *Пусть для любых двух множеств $B_1$, $B_2 \in \mathcal{B}$ и чисел $\lambda_1$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ линейная комбинация $B = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2$ также принадлежит $\mathcal{B}$, причем*

$$\eta_Y^\gamma(B) \le C_\gamma(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \max(\eta_Y^\gamma(B_1), \eta_Y^\gamma(B_2)),$$

*где положительная конечная функция $C_\gamma(t_1, t_2)$ не убывает при росте $t_1$, $t_2$ и не зависит от выбора $B_1$, $B_2$. Тогда множество $W^{\eta_X, \eta_Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}(V; Y)$ является линейным топологическим пространством.*

*Схема доказательства.* Нетрудно видеть, что $[\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2](S) \subset \lambda_1 u_1(S) + \lambda_2 u_2(S)$. Следовательно,

$$[D_{\eta_X^\omega, \eta_Y^\gamma, \max}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)](x) \le C_\gamma(|\lambda_1|, |\lambda_2|) \max\{[D_{\eta_X^\omega, \eta_Y^\gamma, \max} u_1](x), [D_{\eta_X^\omega, \eta_Y^\gamma, \max} u_2](x)\}$$

для всех $x$. Последнее означает, что $W^{\eta_X, \eta_Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}(V; Y)$ является линейным пространством.

Очевидно, что базой топологии на $W^{\eta_X, \eta_Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}(V; Y)$ являются множества функций

$$K_{\omega,\gamma,r} = \{u \in W^{\eta_X, \eta_Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}(V; Y) : \|D_{\eta_X^\omega, \eta_Y^\gamma, \max} u\|_{L_p(V)} < r\}, \ \omega \in \Omega, \ \gamma \in \Gamma, \ r \in \mathbb{R}, \ r > 0.$$

Покажем, что операции сложения и умножения на скаляр непрерывны по этой топологии.

Рассмотрим отображение $F_{v,\lambda} : u \mapsto v + \lambda u$. Очевидно, что для любых $\omega \in \Omega$, $\gamma \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $u - u_0 \in K_{\omega,\gamma,\delta}$ следует, что $F_{v,\lambda}(u) - F_{v,\lambda}(u_0) \in K_{\omega,\gamma,\varepsilon}$. Действительно, $F_{v,\lambda}(u) - F_{v,\lambda}(u_0) = \lambda(u - u_0)$, $u - u_0 = \lambda^{-1}(F_{v,\lambda}(u) - F_{v,\lambda}(u_0))$. Далее требуемое утверждение следует непосредственно из условия теоремы.

**Пример 1.** Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, $\mu$ — мера Лебега, $V$ — ограниченная область с гладкой границей. Пусть множество $\mathcal{A}$ состоит из всех выпуклых множеств, содержащихся в области $V$, множество $\mathcal{B}$ также состоит из выпуклых множеств, содержащихся в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\eta_X(A)$ равна диаметру проекции множества $A$ на фиксированную координатную плоскость или координатное направление в $\mathbb{R}^n$, а $\eta_Y(B)$ равна диаметру проекции множества $B$ на фиксированную координатную плоскость или координатное направление в $\mathbb{R}^m$.

В этом случае, элементами $W^{\eta_X, \eta_Y}_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}(V; Y)$ являются вектор-функции, чьи проекции на фиксированные на $\mathbb{R}^m$ направления имеют суммируемые в степени $p$ обобщенные производные, равные (п.в.) нулю вдоль направлений, ортогональных фиксированной на $\mathbb{R}^n$ координатной плоскости или фиксированному на $\mathbb{R}^n$ координатному направлению.

**Пример 2** (анизотропный случай)**.** Пусть $X = \mathbb{R}^n$, $\mu$ — мера Лебега, $V$ — ограниченная область с гладкой границей, $Y = \mathbb{R}^m$. Пусть семейство $\mathcal{A}$ состоит из всех выпуклых открытых множеств, содержащихся в области $V$, $\mathcal{B}$ состоит из всех выпуклых ограниченных открытых множеств, содержащихся в $\mathbb{R}^m$. Пусть

$$\eta(A) = \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(A)^{s_i}\right)^{\frac{1}{s}}, \quad \eta(B) = \left(\sum_{j=1}^{m} d_i(B)^{r_j}\right)^{\frac{1}{r}},$$

где $d_k(S)$ обозначает диаметр проекции множества $S$ на фиксированное $k$-е координатное направление, суммирование ведется по всем координатным направлениям, $s$, $r$, $s_i$, $r_j$ — некоторые положительные числа.

**Пример 3.** Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mu$ — мера Лебега, область $V$ ограничена, $Y = W_p^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$. Пусть семейство $\mathcal{A}$ состоит из всех шаров, содержащихся в области $V$, $\mathcal{B}$ состоит из всех шаров, содержащихся в $W_p^1(U)$. Пусть $\eta(A) = \operatorname{diam}(A)$, $\eta(B) = \operatorname{diam}(f_\gamma(B))$, где $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ обозначает множество всех линейных ограниченных функционалов на $W_p^1(U)$.

В этом случае, элементами $W_{\mathcal{A},\mathcal{B},p}^{\eta_X,\eta_Y}(V;Y)$ являются функции, заданные в области $\mathbb{R}$ со значениями в пространстве Соболева $W_p^1(U)$, которое рассматривается как топологическое пространство с топологией, определяемой слабой сходимостью.

## Литература


[1] Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике* (Наука, М., 1988).

[2] Maz'ya V. *Sobolev Spaces: with Applications to Elliptic Partial Differential Equations* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2011).

[3] Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения* (Наука, М., 1977).

[4] Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения* (Наука, М., 1996).

[5] Maz'ya V., Isakov V. *Sobolev Spaces in Mathematics* 1, 2 *and* 3 (Springer, New York, 2009).

[6] Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J.T. *Sobolev spaces on metric measure spaces. An approach based on upper gradients* (Cambridge Univ. Press, 2015).

[7] Bojarski B. *Pointwise characterization of Sobolev classes*, Тр. МИАН **255**, 71–87 (2006).

[8] Hajłasz P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric space*, Potential Anal. **5** (4), 403–415 (1996).

[9] Franchi B., Hajłasz P., Koskela P. *Definitions of Sobolev classes on metric spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **49** (6), 1903–1924 (1999).

[10] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians* (Springer, Berlin, 2007).

[11] Решетняк Ю.Г. *Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве*, Сиб. матем. журн. **38** (3), 657–675 (1997).

[12] Меджидов З.Г. *Оценки в $L^2$ и теоремы существования для обобщенных аналитических функций многих переменных*, Сиб. матем. журн. **45** (4), 843–854 (2004).

[13] Решетняк Ю.Г. *К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве*, Сиб. матем. журн. **47** (1), 146–168 (2006).

[14] Водопьянов С.К., Романовский Н.Н. *Классы отображений Соболева на пространствах Карно–Каратеодори. Различные нормировки и вариационные задачи*, Сиб. матем. журн. **49** (5), 1028–1045 (2008).

[15] Barlow M.T. *Diffusions on fractals. Lectures on probability theory and statistics*, Lect. Notes Math. **1690** (Springer, Berlin, 1998).

[16] Lott J., Villani C. *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. Math. **169** (3), 903–991 (2009).

[17] Ambrosio L., Gigli N., Savare G. *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures,* Lect. Math. ETH Zürich, 2nd edition (Birkhauser Verlag, Basel, 2007).

[18] Villani C. *Optimal transport. Old and new*, Grundlehren der Math. Wissenschaften **338** (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009).

[19] Романовский Н.Н. *Классы Соболева на произвольном метрическом пространстве с мерой. Компактность операторов вложения*, Сиб. матем. журн. **54** (2), 450–467 (2013).

[20] Романовский Н.Н. *Теоремы вложения и вариационная задача для функций, заданных на произвольном метрическом пространстве с мерой*, Сиб. матем. журн. **55** (3), 627–649 (2014).

[21] Романовский Н.Н. *Теоремы вложения Соболева и некоторые их обобщения для функций, заданных на метрическом пространстве с мерой*, Сиб. матем. журн. **59** (1), 158–170 (2018).

[22] Романовский Н.Н. *Теоремы вложения Соболева и некоторые их обобщения для отображений, заданных на топологическом пространстве с мерой*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механ. (1), 25–37 (2022).

[23] Брудный Ю.А. *Критерии существования производных в $L_p$*, Матем. сб. **73** (115), 42–64 (1967).

*Николай Николаевич Романовский*

*Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук ,*
*пр. ак. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия,*

e-mail: nnrom@math.nsc.ru

*N.N. Romsnovskii*

**Generalizations of Sobolev classes to the metric and topological cases**

*Abstract.* The paper proposes an approach that makes it possible to describe in the same way classical Sobolev spaces, various generalizations of classical Sobolev spaces for functions defined on a metric or topological space and for functions with values in a metric or topological space, as well as spaces of functions that satisfy certain differential relations.

*Keywords*: Sobolev class, metric space, topological space.

*Nikolai Nikolaevich Romanovskii*

*Sobolev Institute of Mathematics of Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,*
*4 ak. Koptuga str., Novosibirsk, 630090 Russia,*

e-mail: nnrom@math.nsc.ru