

Краткое сообщение

В.Н. ПАЙМУШИН

**ДВА ВАРИАНТА ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ
СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ С УЧАСТКОМ ОДНОСТОРОННЕГО
ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ НА ЖЕСТКОМ ОПОРНОМ
ЭЛЕМЕНТЕ**

Аннотация. Доказана эквивалентность двух вариантов постановки задач механики стержня-полосы, соединенного на участке конечного размера одной из лицевых поверхностей с жестким и неподвижным опорным элементом. Первый из них основан на использовании трансформационной модели деформирования стержня, базирующейся на преобразовании соотношений простейшей сдвиговой модели Тимошенко путем предварительного удовлетворения условиям кинематического сопряжения стержня с опорным элементом на участке закрепления с последующей формулировкой кинематических и силовых условий сопряжения закрепленного участка стержня с незакрепленным. Второй вариант, соответствующий контактной постановке задачи, базируется на использовании для всего стержня (для закрепленного и незакрепленного участков) единых соотношений уточненной теории типа Тимошенко, содержащих на закрепленном участке в точках поверхности соединения стержня с опорным элементом неизвестное касательное контактное напряжение, входящее в уравнения как внешняя нагрузка. Для его определения используются условия кинематического сопряжения стержня с опорным элементом.

Ключевые слова: стержень-полоса, участок закрепления, незакрепленный участок, модель Тимошенко, трансформационная модель деформирования, контактная постановка задачи, эквивалентность.

УДК: 539.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-88-96

ВВЕДЕНИЕ

В механике тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах, обычно, заменяют граничными условиями того или иного вида (например, шарнирного опирания или жесткого защемления, см., например, [1]–[3]), что, безусловно, вносит погрешность в решениях тех или иных задач. Так, например, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции с рассмотрением лишь их отдельных участков и формулировкой в концевых сечениях кинематических

Поступила в редакцию 05.08.2024, после доработки 05.08.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-19-00021, разделы 1, 2) и в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект FZSU-2024-0010, раздел 3).

граничных условий заземления может иметь недостаточную степень точности, если не учесть, что участки крепления конструкции всегда имеют некоторую конечную длину, в пределах которой необходимо учитывать податливость закрепленных участков.

Расчет конструкции с учетом податливости (деформируемости) участков закрепления, имеющих конечную длину, представляет весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлиненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих работах (например, [4]–[7]).

В ранее проведенных исследованиях [8]–[11] было показано, что для описания процессов статического и динамического деформирования удлиненных элементов тонкостенных конструкций (в том числе и плоских стержней), имеющих участки закрепления конечной длины, требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) и применяемых для их описания математических моделей, имеющей место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному). В них рассматривался простейший тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы с участками закрепления, расположенными только на одной из лицевых поверхностей, что, обычно, имеет место при креплении элементов тонкостенных конструкций на опорных элементах или соединении их между собою внахлест (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов). Для таких элементов в простейшем варианте учет податливости участков закрепления конечной длины может состоять в преобразовании известной сдвиговой модели Тимошенко в другую, названную трансформационной.

В данной работе, в отличие от [8]–[11], предложена контактная постановка задач исследуемого класса, базирующаяся на использовании для всего стержня (для закрепленного и незакрепленного участков) единых соотношений уточненной теории типа Тимошенко, содержащих на закрепленном участке в точках поверхности соединения стержня с опорным элементом неизвестное касательное контактное напряжение, входящее в уравнения как внешняя нагрузка. Для его определения используются условия кинематического сопряжения стержня с опорным элементом.

1. ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ С ОДНОСТОРОННИМ УЧАСТКОМ ЗАКРЕПЛЕНИЯ

При постановке задач механики стержня-полосы длиной a реальные условия закрепления на жестком опорном элементе с участком длиной l (рис.1а)), как правило, заменяют или условиями шарнирного опирания, или заземления (рис.1б)), что, безусловно, вносит погрешности в их решения.

Простейшая модель деформирования стержней по схеме рис.1а) была предложена в работах [8]–[11]. Она названа трансформационной и основана на представлении перемещений незакрепленного и закрепленного участков в виде

$$U = u + z\gamma, \quad W = w, \quad 0 \leq x \leq a; \quad U_0 = u_0 + z\gamma_0, \quad W_0 = w_0 = 0; \quad -l \geq x \geq 0. \quad (1)$$

Если на функции u_0, γ_0 наложить кинематическое ограничение в виде зависимости

$$\gamma_0 = \frac{2}{t}u_0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (2)$$

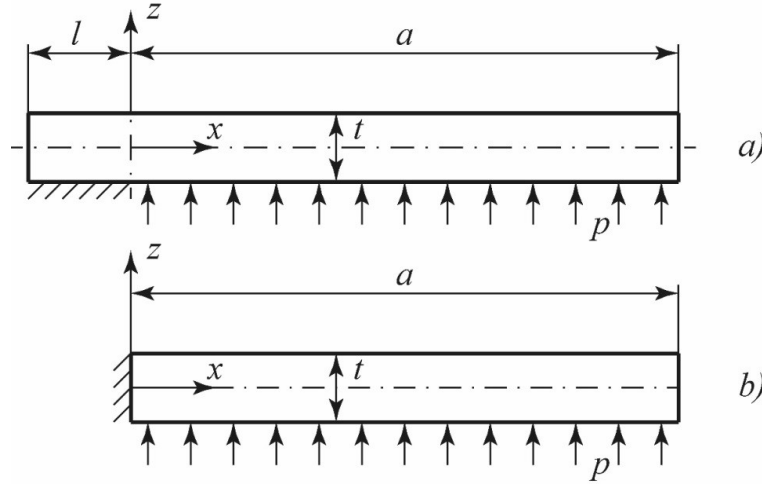


РИС. 1. Схемы консольного закрепления стержня при плоском изгибе: а) за-
щемление конечного участка граничной плоскости $z = -t/2$; б) за-
щемление

следующей из условия $U_0 \left(x, z = -\frac{t}{2} \right) = u_0(x) - \frac{t}{2} \gamma_0(x) = 0$, формулируемого на участке закрепления длиной l (рис.1а)), то из условия непрерывности перемещений U и U_0 в сечении $x = 0$, формулируемого в виде $U|_{x=0} = U_0|_{x=0}$, получим равенства

$$\gamma = \frac{2}{t} u_0, \quad u = u_0 \text{ при } x = 0. \quad (3)$$

В соответствии с (1), (2) в случае малых перемещений имеют место кинематические соотношения

$$\varepsilon_x = u' + z\gamma', \quad \gamma_{xz} = w' + \gamma, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (4)$$

$$\varepsilon_x^0 = U_{0,x} = \left(1 + \frac{2z}{t} \right) u'_0, \quad \gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x} = \frac{2}{t} u_0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (5)$$

а для формирующихся в стержне компонент напряжений — физические соотношения

$$\sigma_x = E_1 (u' + z\gamma'), \quad \sigma_{xz} = G (w' + \gamma), \quad 0 \leq x \leq a; \quad (6)$$

$$\sigma_x^0 = \left(1 + \frac{2z}{t} \right) E_1 u'_0, \quad \sigma_{xz}^0 = \frac{2G}{t} u_0, \quad -l \leq x \leq 0. \quad (7)$$

При действии поперечной нагрузки p для схемы 1а) путем использования (4), (5) в работе [8] составлено вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \delta\Pi_0 + \delta\Pi - \delta A = & \int_{-l}^0 (T_{11}^0 \delta u'_0 + T_{13}^0 \delta u_0) dx + \\ & + \int_0^a [T_{11} \delta u' + M_{11} \delta \gamma' + T_{13} (\delta w' + \delta \gamma) - p_3 \delta w] dx = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где в силу (6), (7)

$$T_{11}^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x^0 \left(1 + \frac{2z}{t}\right) dz = \frac{4E_1 t}{3} u'_0 = \frac{4B}{3} u'_0, \quad T_{13}^0 = \frac{4G}{t} u_0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= Bu', \quad M_{11} = D\gamma', \quad T_{13} = B_{13}(w' + \gamma), \quad B = E_1 t, \\ B_{13} &= Gt, \quad D = \frac{E_1 t^3}{12} = \frac{Bt^2}{12}. \end{aligned} \quad (10)$$

При использовании условий (3) вариационное уравнение (8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &\left(T_{11}^0 - T_{11} - \frac{2M_{11}}{t}\right) \delta u_0 \Big|_{x=0} - T_{11}^0 \delta u_0 \Big|_{x=-l} + (T_{11} \delta u + M_{11} \delta \gamma) \delta u_0 \Big|_{x=a} + \\ &+ T_{13} \delta w \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_{-l}^0 (T_{11,x}^0 - T_{13}^0) \delta u_0 dx - \int_0^a [T_{11,x} \delta u + (M_{11,x} - T_{13}) \delta \gamma + \\ &+ (T_{13,x} + p_3) \delta w] dx = 0, \end{aligned}$$

откуда следуют уравнения равновесия

$$T_{11,x}^0 - T_{13}^0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (11)$$

$$T_{11,x} = 0, \quad M_{11,x} - T_{13} = 0, \quad T_{13,x} + p_3 = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (12)$$

соответствующие им граничные условия

$$T_{11}^0 \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta u_0 \neq 0, \quad (13)$$

$$T_{11} \Big|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad M_{11} \Big|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta \gamma \neq 0,$$

$$T_{13} \Big|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta w \neq 0, \quad (14)$$

а в сечении $x = 0$, в дополнение к кинематическим условиям сопряжения участков (3), в силу $\delta u_0 \neq 0$ формулируется статическое условие сопряжения участков стержня

$$\left(T_{11}^0 - T_{11} - \frac{2M_{11}}{t}\right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (15)$$

При использовании (9) уравнение (11) приводится к виду

$$u_0'' - k^2 u_0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (16)$$

где

$$k^2 = \frac{3G}{E_1 t^2}. \quad (17)$$

2. КОНТАКТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На участке соединения стержня с опорным элементом введем в рассмотрение неизвестное контактное усилие взаимодействия q_0 , для перемещений стержня в целом примем представления

$$U = u + z\gamma, \quad W = w, \quad 0 \leq x \leq a; \quad U_0 = u_0 + z\gamma_0, \quad W_0 = w_0, \quad -l \leq x \leq 0,$$

что позволяет вместо (8) записать в соответствии с [12] вариационное уравнение

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_0 + \delta\Pi - \delta A - \delta A_q^0 &= \int_{-l}^0 \left[\hat{T}_{11}^0 \delta u'_0 - q_0 \delta u_0 + \hat{M}_{11}^0 \delta \gamma'_0 + \left(\hat{T}_{13}^0 + \frac{t}{2} q_0 \right) \delta \gamma_0 + \right. \\
&\quad \left. + \hat{T}_{13}^0 \delta w'_0 + \left(u_0 - \frac{t}{2} \gamma_0 \right) \delta q_0 \right] dx + \\
&\quad + \int_0^a [T_{11} \delta u' + M_{11} \delta \gamma' + T_{13} (\delta w' + \delta \gamma) - p_3 \delta w] dx = \\
&= \left(\hat{T}_{11}^0 \delta u_0 + \hat{M}_{11}^0 \delta \gamma_0 + \hat{T}_{13}^0 \delta w_0 \right) \Big|_{x=-l}^{x=0} + (T_{11} \delta u + M_{11} \delta \gamma + T_{13} \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} - \\
&\quad - \int_{-l}^0 \left[\left(\hat{T}_{11,x}^0 + q_0 \right) \delta u_0 + \left(\hat{M}_{11,x}^0 - \hat{T}_{13}^0 - \frac{t}{2} q_0 \right) \delta \gamma_0 + \hat{T}_{13,x}^0 \delta w_0 \right] dx - \\
&\quad - \int_0^a [T_{11,x} \delta u_0 + (M_{11,x} - T_{13}) \delta \gamma + (T_{13,x} + p_3) \delta w] dx = 0,
\end{aligned} \tag{18}$$

где δA_q^0 — вариация работы контактного усилия взаимодействия q_0 на соответствующем перемещении [12] $U(x, z = -t/2)$, равная

$$\delta A_q^0 = \int_{-l}^0 \delta \left[q_0 \left(u_0 - \frac{t}{2} \gamma_0 \right) \right] dx = \int_{-l}^0 \left[\left(u_0 - \frac{t}{2} \gamma_0 \right) \delta q_0 + q_0 \left(\delta u_0 - \frac{t}{2} \delta \gamma_0 \right) \right] dx$$

и, как и в (10),

$$\hat{T}_{11}^0 = B u'_0, \quad \hat{M}_{11}^0 = D \gamma'_0, \quad \hat{T}_{13}^0 = B_{13} (w'_0 + \gamma_0). \tag{19}$$

Из (18) следуют

- уравнения равновесия (12) незакрепленного участка $0 \leq x \leq a$ и уравнения равновесия

$$\hat{T}_{11,x}^0 + q_0 = 0 \text{ при } \delta u_0 \neq 0, \quad \hat{M}_{11,x}^0 - \hat{T}_{13}^0 - \frac{t}{2} q_0 = 0 \text{ при } \delta \gamma_0 \neq 0, \quad \underline{\hat{T}_{13,x}^0 = 0} \tag{20}$$

закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$;

- граничные условия (14) в сечении $x = a$ для уравнений (12) и граничные условия в сечении $x = -l$

$$\hat{T}_{11}^0 = 0 \text{ при } \delta u_0 \neq 0, \quad \hat{M}_{11}^0 = 0 \text{ при } \delta \gamma_0 \neq 0, \quad \hat{T}_{13}^0 = 0$$

для уравнений (20);

- в силу кинематических условий сопряжения

$$u_0|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad \gamma_0|_{x=0} = \gamma|_{x=0}, \quad w_0|_{x=0} = w|_{x=0}$$

силовые условия сопряжения участков

$$\left(\hat{T}_{11}^0 - T_{11} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\hat{M}_{11}^0 - M_{11} \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(\hat{T}_{13}^0 - T_{13} \right) \Big|_{x=0} = 0.$$

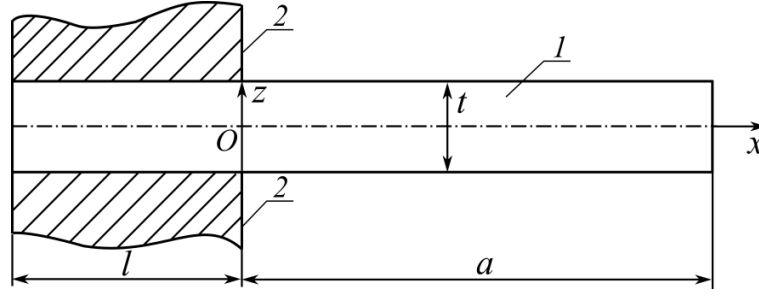


Рис. 2. Схема двухстороннего закрепления стержня-полосы 1 в опорном элементе 2

Заметим, что первые два уравнения в (20) содержат неизвестное контактное усилие q_0 , что требует для замыкания общей составленной системы уравнений (12), (20) добавления дополнительного уравнения

$$u_0 - \frac{t}{2}\gamma_0 = 0, \quad -l \leq x \leq 0, \quad (21)$$

к которому для преобразования в системе (20) третьего уравнения добавляется равенство $w_0 = 0$; $-l \leq x \leq 0$.

Покажем, что описанные выше две постановки задачи эквивалентны. В силу того, что $w_0 = 0$ на участке $-l \leq x \leq 0$, в системе (20) подчеркнутое уравнение становится ненужным, а второе уравнение запишем в виде

$$q_0 = \frac{2}{t} \left(\hat{M}_{11,x}^0 - \hat{T}_{13}^0 \right). \quad (22)$$

Исключая из первого уравнения q_0 с помощью (22), получим уравнение

$$\left(\hat{T}_{11}^0 + \frac{2}{t} \hat{M}_{11}^0 \right)_{,x} - \frac{2}{t} \hat{T}_{13}^0 = 0. \quad (23)$$

Внеся в (23) соответствующие соотношения (19), а также используя следующее из (21) равенство

$$\gamma_0 = \frac{2}{t} u_0 \quad (24)$$

и соотношения (9), получим уравнение

$$\frac{4E_1 t}{3} u_{0,xx} - \frac{4G}{t} u_0 = T_{11,x}^0 - T_{13}^0 = 0,$$

полностью совпадающее с уравнением (16) с коэффициентом (17).

Путем использования (19), (24) в силу $w_0 \equiv 0$, $-l \leq x \leq 0$ для входящих в (18) слагаемых можно получить

$$\hat{T}_{11}^0 \delta u_0 + \hat{M}_{11}^0 \delta \gamma_0 = \left(\hat{T}_{11}^0 + \frac{2}{t} \hat{M}_{11}^0 \right) \delta u_0 \equiv T_{11}^0 \delta u_0, \quad (25)$$

если использовать первое соотношение в (19). При учете (25) из (18) следуют граничное условие (13) и силовое условие сопряжения участков (15).

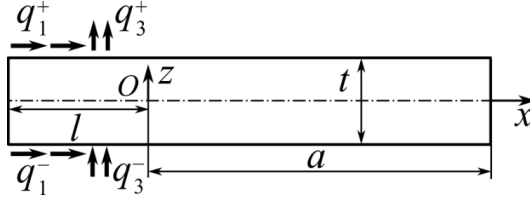


Рис. 3. Расчетная схема для контактной постановки задачи

3. ДВУСТОРОННЕЕ ЗАКРЕПЛЕНИЕ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ В АБСОЛЮТНО ЖЕСТКОМ И НЕПОДВИЖНОМ ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

Схема закрепления стержня рассматриваемого класса показана на рис.2.

В отличие от простейших аппроксимаций $U_0 = (1 + 2z/t) u_0$, $W_0 \equiv 0$, используемых для схемы одностороннего закрепления (рис.1а)), в случае двухстороннего закрепления простейшая трансформационная модель деформирования требует использования аппроксимаций

$$U_0 = u_0 + z\gamma_0 + z^2\psi_0/2 + z^3\chi_0/3, \quad W_0 = w_0 + z\varphi_0 + z^2\theta_0/2, \quad (26)$$

в которых

$$u_0, \gamma_0, \psi_0, \chi_0, w_0, \varphi_0, \theta_0$$

— неизвестные одномерные функции. Если их подчинить шести условиям неподвижности опорного элемента в точках отрезка $-l \leq x \leq 0$ на поверхностях $z = \pm t/2$

$$u_0 \pm \frac{t}{2}\gamma_0 + \frac{t^2}{8}\psi_0 \pm \frac{t^3}{24}\chi_0 = 0, \quad w_0 \pm \frac{t}{2}\varphi_0 + \frac{t^2}{8}\theta_0 = 0, \quad (27)$$

то входящие в (26) функции ψ_0, χ_0 могут быть выражены через функции u_0, γ_0 , а φ_0, θ_0 — через функцию w_0 . Тем самым удастся построить относительно оставшихся функций u_0, γ_0, w_0 простейшую одномерную трансформационную модель деформирования, имеющую высокий порядок аппроксимации по толщине.

Если же осуществить декомпозицию конструкции и на участке закрепления $-l \leq x \leq 0$ ввести в рассмотрение четыре неизвестные контактные усилия взаимодействия $q_1^\pm, q_3^\pm$, то при использовании (26) можно построить систему шести уравнений равновесия (движения), содержащих десять введенных в рассмотрение неизвестных функций, для замыкания которой добавляются четыре уравнения (26).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При использовании первого варианта постановки задач механики рассматриваемого класса в рамках принятой модели деформирования задача сводится к интегрированию простейшего уравнения (16) с коэффициентом (17), характеризующим степень локализации напряженно-деформированного состояния в окрестностях сечений $x = 0$ и $x = -l$. Аналитические решения таких задач о свободных и вынужденных колебаниях, сформулированных в геометрически линейной и нелинейной постановках, даны в работах [13] и др.

Предложенный второй вариант постановки задач ориентирован на использование численных методов их решения, требующий интегрирования уравнений равновесия (движения) одного вида на всех закрепленных и незакрепленных участках в случае многоопорного стержня. Одним из таких методов является метод конечных сумм (интегрирующих матриц М.Б. Вахитова), относящийся к классу абсолютно устойчивых [14] при весьма больших градиентах изменения решений в окрестностях переходов от закрепленных участков к незакрепленным.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алгазин С.Д., Селиванов И.А. *Задача о собственных колебаниях прямоугольной пластины со смешанными краевыми условиями*, Прикл. механ. Техн. физ. **62** (2 (366)), 70–76 (2021).
- [2] Алгарай А.Ф.А., Джун Х., Махди И.Э.М. *Влияние краевых условий на безразмерные собственные частоты перекрестно армированной слоистой композитной балки*, Прикл. механ. Техн. физ. **58** (6 (346)), 177–185 (2017).
- [3] Крылова Е.Ю., Папкина И.В., Ерофеев Н.П., Захаров В.М., Крысько В.А. *Сложные колебания гибких пластин под действием продольных нагрузок с учетом белого шума*, Прикл. механ. Техн. физ. **57** (4 (338)), 163–169 (2016).
- [4] Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. *Forced vibration analysis of beams with frictional clamps*, Appl. Math. Model. **128**, 450–469 (2024), DOI: 10.1016/j.apm.2024.01.031.
- [5] Banks H.T., Inman D.J. *On damping mechanisms in beams*, J. Appl. Mech. **58** (3), 716–723 (1991), DOI: 10.1115/1.2897253.
- [6] Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. *Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface*, J. Sound Vibrat. **331** (21), 4704–4712 (2012), DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.026.
- [7] Ferri A.A., Bindemann A.C. *Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions*, J. Vib. Acoust. **114** (3), 289–296 (1992), DOI: 10.1115/1.2930260.
- [8] Паймушин В.Н. *Плоские задачи механики прямых стержней с учетом деформируемости участков закрепления, имеющих конечную длину*, Изв. вузов. Матем. (3), 89–96 (2022), DOI: 10.26907/0021-3446-2022-3-89-96.
- [9] Паймушин В.Н., Шишкин В.М. *Деформирование тонкостенных элементов конструкций, на граничных лицевых поверхностях которых имеются закрепленные участки*, Прикл. механ. Техн. физ. **64** (2 (378)), 155–173 (2023).
- [10] Паймушин В.Н., Шишкин В.М. *Уточненная модель динамического деформирования стержня-полосы с закрепленным участком конечной длины на одной из лицевых поверхностей*, Прикл. механ. Техн. физ. **65** (1 (383)), 181–197 (2024).
- [11] Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. *Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments*, J. Appl. Math. Mechan. **104** (2), article e202300214. (2023), DOI: 10.1002/zamm.202300214.
- [12] Паймушин В.Н. *К вариационным методам решения нелинейных пространственных задач сопряжения деформируемых тел*, Докл. АН СССР **273** (5), 1083–1086 (1983).
- [13] Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Газизуллин Р.К., Нуриев А.Н. *Исследование прохождения вибраций через закрепленный участок удлиненной пластины при действии осевой силы на торце*, Пробл. прочности и пластичности **85** (3), 356–374 (2023), DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-356-374.
- [14] Даутов Р.З., Паймушин В.Н. *О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвертого порядка*, Изв. вузов. Матем. (10), 13–25 (1996).

Виталий Николаевич Паймушин

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева,
ул. К. Маркса, д.10, г. Казань, 420111, Россия;
Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: vpajmushin@mail.ru

*V.N. Paimushin***Two variants of stating problems of mechanics of a rod-strip with a section of one-sided fixing of finite length on a rigid support element**

Abstract. The equivalence of two variants of problem formulation for rod-strip mechanics connected to a rigid and fixed support element on a finite-size section of one of its face surfaces is proved. The first of them is based on the use of a transformation model of rod deformation based on the transformation of the relations of the simplest Timoshenko shear model by preliminary satisfying the conditions of kinematic conjugation of the rod with the support element on the fastening section with the subsequent formulation of the kinematic and force conditions of conjugation of the fixed section of the rod with the unfastened one. The second variant, corresponding to the contact formulation of the problem, is based on the use of uniform relations of the refined theory of the Timoshenko type for the entire rod (for the fixed and unfastened sections), containing an unknown tangential contact stress at the points of the surface of the connection of the rod with the support element on the fixed section, which is included in the equations as an external load. To determine this, the conditions of kinematic conjugation of the rod with the support element are used.

Keywords: rod-strip, fixed section, unfixed section, Timoshenko model, transformation model of deformation, contact formulation of the problem, equivalence.

*Vitaly Nikolaevich Paimushin**Kazan National Research Technical University,**10 K.Marks str., Kazan, 420111 Russia;**Kazan Federal University,**18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,***e-mail:** vpajmushin@mail.ru