Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №11, с. 81–87 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное С.К. Водопьяновым

С.Г. БАСАЛАЕВ

КРАТЧАЙШИЕ ЛОМАНЫЕ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Аннотация. Описаны кратчайшие ломаные, соединяющие две точки на первой группе Гейзенберга с субримановой структурой. Кратчайшая ломаная, соединяющая две точки с фиксированным числом звеньев — либо прямая, либо состоит из отрезков одной и той же длины и таких, что проекции их концов на горизонтальную плоскость вписаны в окружность. Получено аналитическое описание квазиметрики, порожденной кратчайшими трехзвенными ломаными.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, ломаная, кратчайшая.

УДК: 514.7: 517.97

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-81-87

В работах [1]–[4] исследуется вопрос о минимальном числе звеньев в ломаных, соединяющих две точки на различных группах Карно. В связи с этим возникает естественный вопрос о кратчайшем пути между двумя точками в классе ломаных с ограничением на максимальное число звеньев. В этой статье мы показываем, что на первой группе Гейзенберга данный вопрос имеет достаточно элегантное геометрическое решение.

Напомним, что группа Гейзенберга $\mathbb{H}^1$ — связная односвязная 3-мерная двухступенчатая нильпотентная группа Ли. Это означает, что существует базис X, Y, Z ее алгебры Ли $\mathfrak{h}^1$ левоинвариантных векторных полей такой, что

$$[X, Y] = Z, \quad [X, Z] = 0, \quad [Y, Z] = 0.$$

Алгебра Ли определяет такую группу однозначно с точностью до изоморфизма (см., например, [5], [6]). В канонических координатах, задаваемых экспоненциальным отображением $(x, y, z) \mapsto \exp(xX + yY + zZ)$, групповая операция имеет вид

$$(x, y, z) \cdot (x', y', z') = \Big(x + x', y + y', z + z' + \frac{xy' - x'y}{2}\Big),$$

а базис алгебры Ли $\mathfrak{h}^1$ имеет вид

$$X = \partial_x - \frac{y}{2}\partial_z, \quad Y = \partial_y + \frac{x}{2}\partial_z, \quad Z = [X, Y] = \partial_z.$$

Распределение $\mathcal{D} = \operatorname{span}\{X, Y\}$ и лежащие в нем векторные поля называем *горизонтальными.* Субриманова структура на $\mathbb{H}^1$ задается положительно определенной квадратичной

Поступила в редакцию 02.07.2024, после доработки 02.07.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации №075-15-2022-282.

формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathcal{D}$. Мы выбираем такую, что X, Y ортонормированы:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

(это не ограничение, поскольку всегда можно выбрать в качестве X, Y ортонормированный базис $\mathcal{D}$ и положить $Z = [X, Y]$). Абсолютно непрерывная кривая γ *горизонтальна*, если $\dot\gamma \in \mathcal{D}$ п. в. Поскольку $\mathcal{D}$ вполне неголономно, по теореме Рашевского–Чоу [7], [8] любые две точки в $\mathbb{H}^1$ можно соединить горизонтальной кривой.

Называем горизонтальную кривую *ломаной*, если она состоит из конечного числа отрезков интегральных линий левоинвариантных векторных полей, соединенных концами. Более точно, n-ломаная определяется последовательностью точек $p_0, p_1, \dots, p_n$ таких, что кривая между p_{k-1} и p_k может быть параметризована как

$$\gamma(t) = \exp\big(t(a_kX + b_kY)\big)(p_{k-1}), \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}, \ t \in [0, T_k],$$

и $\gamma(T_k) = p_k$. Считаем $(n-k)$-ломаные, $k = 1, \dots, n$, вырожденными случаями n-ломаных. Наконец, для всякой точки $p = (x, y, z)$ обозначим ее проекцию на Oxy как $\hat p = (x, y)$. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Кратчайшая n-ломаная, соединяющая начало координат с точкой (x, y, z), $z \neq 0$, — это такая n-ломаная, что ее звенья имеют одну и ту же длину, и вершины ее проекции $\hat\gamma$ вписаны в окружность. При этом, если $x^2 + y^2 \neq 0$, кратчайшая n-ломаная определена при $n \geq 2$ и единственна. Если $x^2 + y^2 = 0$, кратчайшие n-ломаные определены при $n \geq 3$ и образуют однопараметрическое семейство, которое можно получить вращением любой из них вокруг оси Oz. В случае $z = 0$ кратчайшая ломаная — отрезок прямой.*

Схема доказательства. Прежде всего отметим, что кратчайшая n-ломаная между двумя точками существует, так как множество n-ломаных, соединяющих их, непусто в силу того, что оно замкнуто и множество ломаных ограниченной длины компактно. Далее, заметим, что если параметризованная кривая $\gamma(t)$, $t \in [0, T]$, горизонтальна, ее длина совпадает с евклидовой длиной проекции $\hat\gamma(t)$:

$$\ell(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}\, dt.$$

Если $z = 0$, то точка $(x, y, 0)$ — конец интегральной кривой векторного поля $xX + yY$, которая имеет вид $\gamma(t) = (tx, ty, 0)$, $t \in [0, 1]$. Она кратчайшая, поскольку отрезок прямой.

Далее, пусть $z \neq 0$ и $\gamma : [0, T] \to \mathbb{H}^1$ — горизонтальная кривая, $\gamma(0) = 0$, $\gamma(T) = (x, y, z)$. Из условия $\dot\gamma \in \mathcal{D}$ следует $\dot z = \dfrac{x\dot y - y\dot x}{2}$ и по формуле Грина $z(T)$ — ориентированная площадь, заметаемая $\hat\gamma(t)$ в Oxy, когда t меняется от 0 к T. Заметим, что если γ — n-ломаная, ее проекция $\hat\gamma$ — евклидова n-ломаная на Oxy.

В случае $x^2 + y^2 = 0$ кривая $\hat\gamma$ есть n-угольник, и $|z(T)|$ — его площадь. Хорошо известно (см., например, [9], [10]), что из всех n-угольников заданной площади наименьший периметр имеет правильный многоугольник. Более того, отношение $L^2/A = 4n\tan\dfrac{\pi}{n}$ между его периметром L и площадью A монотонно убывает при возрастании n. Следовательно, кратчайшая n-ломаная γ, соединяющая $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, z)$, такова, что ее проекция $\hat\gamma$ есть правильный n-угольник, $n \geq 3$, площади $|z|$ с одной из вершин в начале координат. Такой многоугольник определяется с точностью до поворота в Oxy вокруг начала координат. Направление обхода многоугольника определяется знаком z.

Пусть теперь $x^2 + y^2 \neq 0$. Соединяя 0 и $\hat{\gamma}(T)$ в плоскости Oxy отрезком прямой $I = [0, \hat{\gamma}(T)]$, получим $(n+1)$-угольник P такой, что его периметр L равен $\ell(\gamma) + |\hat{\gamma}(T)|$, а его площадь A равна $|z(T)|$. Минимум $\ell(\gamma)$ достигается тогда, когда достигается минимум L при фиксированных площади A и стороне I. Довольно легко понять, что мы можем перейти к дуальной задаче максимизации площади A, когда L и сторона I фиксированы. Это по-прежнему вариация хорошо известной изопериметрической проблемы [9], [10]. Тот факт, что многоугольник с фиксированными периметром и стороной имеет максимальную площадь в том случае, если он вписан в окружность и все нефиксированные стороны равны, следует из следующих наблюдений.

1) Многоугольник максимальной площади выпуклый (иначе отражение вогнутых вершин увеличит его площадь).

2) Из всех треугольников с одной фиксированной стороной и фиксированным периметром наибольшую площадь имеет равнобедренный. Следовательно, многоугольники с нефиксированными смежными сторонами разных длин неоптимальны.

3) Из всех многоугольников с фиксированными длинами сторон наибольшую площадь имеет многоугольник, вписанный в окружность (см., например, [10], теорема 12.5a).

Для заданных стороны $I = [0, \hat{\gamma}(T)]$ и периметра L существует ровно два $(n+1)$-угольника максимальной площади (один — отражение другого относительно I). Следовательно, для заданных стороны I и площади A существует ровно два $(n+1)$-угольника наименьшего периметра. Поскольку $z(t)$ есть ориентированная площадь, лишь один из этих двух многоугольников дает искомое решение.

Ясно, что в силу левоинвариантности кратчайшие ломаные между двумя любыми точками получаются левыми сдвигами кратчайших ломаных, выходящих из начала координат. При этом в плоскости Oxy левому сдвигу соответствует параллельный перенос, следовательно, проекции кратчайших ломаных сохраняют вышеописанные свойства. Можем также отметить, что при $n \to \infty$ кратчайшие n-ломаные сходятся к кратчайшим кривым на группе Гейзенберга, которые как хорошо известно (см., например, [11], §3, или [12]), имеют своей проекцией дугу окружности.

Используя кратчайшие ломаные, можно определить на $\mathbb{H}^1$ квазиметрику $d_n(p,q)$, равную длине кратчайшей n-ломаной, соединяющей p и $q \in \mathbb{H}^1$. Несложно видеть, что d_n — лишь *квазиметрики*. С одной стороны, для точки p, не лежащей в плоскости Oxy, величина $d_n(0,p)$ строго монотонно убывает с ростом n. С другой стороны, кратчайшая $2n$-ломаная, соединяющая 0 и p, состоит из двух кратчайших n-ломаных, соединяющих 0 и p с некоторой промежуточной точкой q. Отсюда

$$d_n(0,p) > d_{2n}(0,p) = d_n(0,q) + d_n(q,p).$$

Далее получим аналитическое выражение для квазиметрики d_3 и опишем геометрию шара в ней. Для этого сначала отметим симметрии группы $\mathbb{H}^1$ и метрики ds^2 на ней.

1) Левые сдвиги суть изометрии группы. Следовательно, достаточно описать $d_3(0,p)$.

2) Анизотропные растяжения $\delta_\lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda^2 z)$, $\lambda > 0$, суть автоморфизмы группы, при этом $d_3(0, \delta_\lambda p) = \lambda d_3(0,p)$. Следовательно, достаточно описать единичный шар с центром в нуле.

3) Повороты вокруг оси Oz суть изометрии группы. Следовательно, единичная сфера есть поверхность вращения вокруг Oz. Перейдем в цилиндрические координаты (r,θ,z), где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, и будем искать уравнение единичной сферы в виде $f(r,z) = 0$.

4) Преобразование $(x,y,z) \mapsto (x,-y,-z)$ — изометрия, следовательно, $f(r,-z) = f(r,z)$.

Теорема 2. *Сфера* $\{p \in \mathbb{H}^1 : d_3(0,p) = \lambda\}$ *радиуса* $\lambda > 0$ *задается в цилиндрических координатах* (r, θ, z) *уравнением*

$$432z^2 = (\lambda - r)(\lambda + 3r)^3, \quad r \in [0, \lambda]. \tag{1}$$

Схема доказательства. Пусть точка $p = (r, \theta, z)$ лежит на единичной сфере. Проекция кратчайшей 3-ломаной между 0 и (r, θ, z) на плоскость Oxy образует вместе с отрезком $[0, \hat{p}]$ равнобедренную трапецию с основаниями длин $\frac{1}{3}$ и $r \in [0, 1]$ и боковыми сторонами длины $\frac{1}{3}$. Площадь трапеции, с одной стороны, равна $|z|$, с другой стороны, есть $\left(\frac{r + 1/3}{2}\right) h$, где h — ее высота. Высота h трапеции может быть найдена из условия $h^2 + \left(\frac{r - 1/3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Подставив выражение для h^2 в уравнение $z^2 = \left(\frac{r + 1/3}{2}\right)^2 h^2$ и факторизуя полученный многочлен получим

$$432z^2 = (1 - r)(1 + 3r)^3, \quad r \in [0, 1]. \tag{2}$$

Поскольку $d_3(0, p) = \lambda > 0$ тогда и только тогда, когда $d_3\Big(0, \delta_{\frac{1}{\lambda}} p\Big) = 1$, уравнение сферы радиуса λ получается подстановкой $\frac{r}{\lambda}$, $\frac{z}{\lambda^2}$ вместо r, z в (2).

На рис. 1 приведено сравнение профилей единичных сфер Карно–Каратеодори (линия выше) и сферы в квазиметрике d_3 (линия ниже).

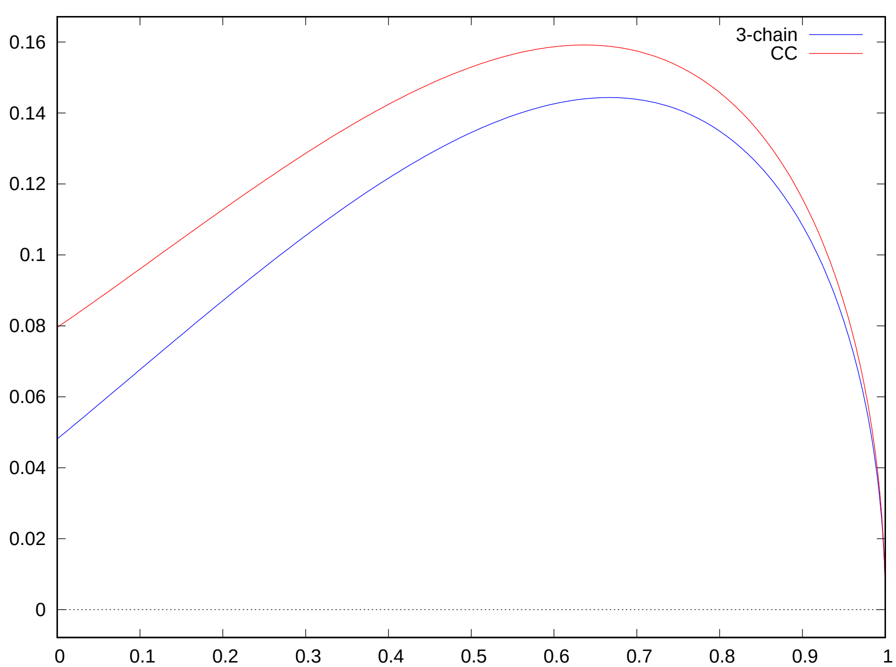

Рис. 1. Профили единичной сферы в метрике Карно–Каратеодори и квазиметрике d_3

Заметим, что уравнение (1) имеет четвертую степень относительно λ, а значит, оно разрешимо. Таким образом, в отличие от метрики Карно–Каратеодори, квазиметрика d_3 может быть аналитически выражена в элементарных функциях, хотя выражение при этом получается довольно громоздким.

Теорема 3. *Расстояние от нуля до точки (r,θ,z), $r \neq 0$, $z \neq 0$, в цилиндрических координатах в квазиметрике d_3 имеет вид*

$$d_3(0,(r,\theta,z)) = \frac{P+\sqrt{P^2-4Q}}{2} - 2r,$$

где

$$Q = \frac{(P^2-6r^2)+\sqrt{12(r^4+144z^2)+(P^2-6r^2)^2}}{2},$$

$$P = \sqrt{A - 576z^2/A + 4r^2}, \quad A = \left(3456z^2\left(\sqrt{r^4+16z^2}-r^2\right)\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В вырожденных случаях $r = 0$ и $z = 0$ имеем

$$d_3(0,(r,\theta,0)) = r, \quad d_3(0,(0,\theta,z)) = 432^{\frac{1}{4}}|z|^{\frac{1}{2}}.$$

Схема доказательства. Уравнение (1) тривиально решается в вырожденных случаях, поэтому далее считаем $r \neq 0$, $z \neq 0$. Заметим, что функция

$$f(\lambda) = (\lambda - r)(\lambda + 3r)^3 - 432z^2$$

монотонно возрастает при $\lambda > 0$, так как $f'(\lambda) = 4\lambda(\lambda+3r)^2$ при этом положительна. Кроме того, $f(r) = -432z^2 < 0$, следовательно, $f(x)$ имеет единственный корень в области $x > r$ и он же наибольший. Найдем его.

Напомним решение уравнения четвертой степени:

$$0 = (\lambda - r)(\lambda + 3r)^3 - 432z^2 = \lambda^4 + 8r\lambda^3 + 18r^2\lambda^2 - 27(r^4 + 16z^2).$$

Подстановкой $\lambda = u - 2r$ уравнение сводится к приведенному

$$0 = u^4 - 6r^2u^2 - 8r^3u - 3(r^4 + 144z^2).$$

Приведенный многочлен четвертой степени может быть факторизован в произведение квадратных вида

$$(u^2 + pu + q_1)(u^2 - pu + q_2), \tag{3}$$

откуда получаем уравнения на коэффициенты

$$q_1 + q_2 - p^2 = -6r^2, \quad p(q_2 - q_1) = -8r^3, \quad q_1q_2 = -3(r^4 + 144z^2). \tag{4}$$

Обратим внимание, что q_1 и q_2 имеют разные знаки. Пусть $q_1 > 0$. Тогда $p = \dfrac{8r^3}{q_1 - q_2} > 0$. Из первого и третьего уравнений в (4) получаем

$$q_{1,2} = \frac{1}{2}\left((p^2-6r^2) \pm \sqrt{12(r^4+144z^2)+(p^2-6r^2)^2}\right).$$

Возводя в квадрат второе уравнение в (4), получаем $p^2(q_1 - q_2)^2 = 64r^2$. После подстановки выражения для $(q_1 - q_2)^2$ и упрощения получаем приведенное уравнение третьей степени относительно $p^2 - 4r^2$:

$$(p^2 - 4r^2)^3 + 1728z^2(p^2 - 4r^2) + 6912r^2z^2 = 0,$$

решением которого является

$$p^2 - 4r^2 = A - 576z^2/A, \quad \text{где } A = \left(3456z^2\left(\sqrt{r^4+16z^2}-r^2\right)\right)^{\frac{1}{3}},$$

в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Отсюда можно найти корни многочлена (3). Напомним, что нас интересует наибольший корень. Единственный корень, больший $\frac{p}{2}$, — это $u = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q_1}}{2}$.

Автор благодарит А.В. Грешнова за постановку задачи и анонимного рецензента за ценные замечания.

Литература

[1] Greshnov A.V. *Optimal horizontal joinability on the Engel group*, Atti Accad. Naz. Lincei Classe Sci. Fis. Mat. Natur. **32** (3), 535–547 (2021), DOI: 10.4171/RLM/947.

[2] Грешнов А.В., Жуков Р.И. *Горизонтальная соединимость на канонической 3-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коранга 2*, Сиб. матем. журн. **62** (4), 736–746 (2021), DOI: 10.33048/smzh.2021.62.403.

[3] Грешнов А.В. *Метод Аграчева–Барилари–Боскайна и оценки числа звеньев горизонтальных ломаных, соединяющих точки в канонической группе Карно $G_{3,3}$*, Тр. МИАН **321** (1), 108–117 (2023), DOI: 10.4213/tm4320.

[4] Жуков Р.И., Грешнов А.В. *Горизонтальная соединимость на 5-мерной 2-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коразмерности 2*, Алгебра и логика **62** (2), 205–218 (2023), DOI: 10.33048/alglog.2023.62.203.

[5] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F. *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics (Springer Berlin, Heidelberg, 2007), DOI: 10.1007/978-3-540-71897-0.

[6] Hall B.C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations. An Elementary Introduction* GTM **222** (Springer Cham, Cham, 2015), DOI: 10.1007/978-3-319-13467-3.

[7] Рашевский П.К. *О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией*, Учен. зап. пед. ин-та им. Либкнехта, Сер. физ.-матем. (2), 83–94 (1938).

[8] Chow W.L. *Über systeme von linearen partiallen differentialgleichungen erster ordnung*, Mathematische Annalen **117**, 98–105 (1939).

[9] Courant R., Robbins H. *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1941).

[10] Niven I. *Maxima and Minima Without Calculus*, Dolc. Math. Exp. (6) (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981).

[11] Gaveau B. *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimees sous elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. **139**, 95–153 (1977), DOI: 10.1007/BF02392235.

[12] Берестовский В.Н. *Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского*, Сиб. матем. журн. **35** (1), 3–11 (1994).

Сергей Геннадьевич Басалаев

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, д. 1, г. Новосибирск, 630090, Россия,

`e-mail:` s.basalaev@g.nsu.ru

S.G. Basalaev

The shortest polygonal chains in the Heisenberg group

Abstract. We describe the shortest polygonal chains that connect two points on the first Heisenberg group with the sub-Riemannian structure. The shortest polygonal chain connecting two points with a fixed number of links either is a straight line or consists of segments of the same length such that the projections of their endpoints are inscribed in a circle. The analytical description is obtained for the spheres of the quasimetric generated by the shortest polygonal chains with 3 links.

Keywords: Heisenberg group, polygonal chain, shortest path.

Sergey Gennad'evich Basalaev

Novosibirsk State University,
1 Pirogova str., Novosibirsk, 630090 Russia,

e-mail: s.basalaev@g.nsu.ru