Известия вузов. Математика
2024, № 11, с. 61–80

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

В.И. ЩЕРБАКОВ

ПРИЗНАК ЖОРДАНА ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА ХААРА

Аннотация. В работе рассматриваются системы типа Хаара, порожденные (вообще говоря, неограниченной) последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и определенные на модифицированном отрезке $[0,1]^*$, т. е. на отрезке $[0,1]$ с "раздвоенными" $\{p_n\}$-рациональными точками. Основной результат данной работы — установление признаков поточечной и равномерной сходимости рядов Фурье по системам типа Хаара аналогичного признаку сходимости Жордана. Показана неулучшаемость полученного в работе условия. В случае $\sup\limits_n p_n = \infty$ построен пример функции ограниченной вариации, ряд Фурье которой по системе типа Хаара расходится в некоторой точке. Таким образом, для любых неограниченных последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют монотонные функции с расходящимися в некоторых точках их рядами Фурье по системе типа Хаара, порожденными данной последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Оказалось, что признак сходимости Жордана на системах типа Хаара не отличается от условия Дини–Липшица по этим же ортонормираванным системам функций. А так как признак Дини–Липшица был показан ранее, то основная ценность работы — построение соответствующего контрпримера, т. е. примера функции *ограниченной вариации* с расходящимся в некоторой точке рядом Фурье по системам типа Хаара. В контрпримерах более ранних работ для признака Дини–Липшица (а также всех признаков сходимости Дини) были функции, *не являющимися функциями ограниченной вариации.* В заключении статьи говорится о том, как изменялся признак сходимости Жордана при переходе от тригонометрических систем функций к системам Прайса (и к системам Н.Я. Виленкина), а от них — к обобщенным системам Хаара и системам типа Хаара.

Ключевые слова: абелева группа, модифицированный отрезок $[0;1]^*$, непрерывность на модифицированном отрезке $[0;1]^*$, система характеров, система Прайса, система типа Хаара, ядро Дирихле, признак Жордана, вариация функции.

УДК: 517.52

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-61-80

1. Введение. Основные определения

Пусть $\mathbb{N}$ — множество целых неотрицательных чисел, $p_0 = 1$, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — целочисленная последовательность с $p_n \geq 2$, $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$ ($n \in \mathbb{N}$). Всякое число $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ единственным образом можно представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

Поступила в редакцию 12.07.2023, после доработки 27.06.2024. Принята к публикации 26.09.2024.

где a_k, s и n' целые с $0 \le a_k \le p_{k+1} - 1$, $1 \le a_s \le p_{s+1} - 1$ (т.е. $m_s \le n \le m_{s+1} - 1$) и $0 \le n' \le m_s - 1$, а любое действительное число $x \in [0, 1]$ можно разложить по формуле

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_k}, \quad \text{где } x_k \text{ целые, } 0 \le x_k < p_k. \tag{2}$$

Если x — $\{p_n\}$-иррационально, а также $x = 0$ либо $x = 1$, то разложение (2) единственно. Для $x = \dfrac{l}{m_n}$ $(l = 1, 2, \ldots, p_n - 1; n = 1, 2, \ldots)$ существуют два представления по формуле (2), одно из которых конечно ($x_k = 0$ для всех $k \ge n$), которое мы обозначим через $\dfrac{l}{m_n}$, а другое бесконечно ($x_k = p_k - 1$, если $k \ge n$), его будем записывать как $\dfrac{l}{m_n} -$.

Таким образом, отрезок $[0, 1]$ перешел во множество последовательностей

$$G = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} | x_n = 0, 1, \ldots, p_n - 1\},$$

где все $\{p_n\}$-рациональные точки *интервала* $(0, 1)$ “раздвоились”.

На G определим операцию $\dot{+}$ покоординатного сложения по модулю

$$p_n : \{x_n\} \dot{+} \{y_n\} = \{(x_n + y_n) \mod p_n\},$$

относительно которой G стала абелевой группой; пусть $\dot{-}$ — обратная операция.

Положив $\dfrac{l}{m_n}- < \dfrac{l}{m_n}$, с $[0, 1]$ на G переносится понятие упорядочивания точек (это упорядочивание можно определить и эквивалентным образом:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} < \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \text{ если } x_k < y_k,$$

где $k = \min\{n | x_n \ne y_n\}$). Тогда *отрезком* $[a, b] \subseteq G$ назовем множество

$$[a, b] = \{x \in G | a \le x \le b, \ a, b \in G\}$$

(соответственно, *интервал* $(a, b) \subset G$ — это

$$(a, b) = \{x \in G | a < x < b, \ a, b \in G\}).$$

Такое упорядочивание позволяет ввести на G понятие *вариации* функции (для вещественной прямой под функцией будем понимать отображение группы G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$), при этом возможно

$$f\left(\frac{l}{m_n}-\right) \ne f\left(\frac{l}{m_n}\right).$$

Пусть $V([a, b], f)$ — вариация функции $f(t)$ на отрезке $[a, b] \subset G$. Аналогично действительной прямой показывается, что если $c \in (a, b)$, то

$$V([a, b], f) = V([a, c], f) + V([c, b], f). \tag{3}$$

Окрестностями нуля в G будут подгруппы

$$G_n = \left[0, \frac{1}{m_n}-\right] = \{\{x_k\} \in G | x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0\}.$$

По заданной топологии определяются предел и непрерывность на G. По сравнению с отрезком $[0, 1]$ эта непрерывность эквивалентна

— обычной непрерывности в $\{p_n\}$-иррациональной точке;

— непрерывности справа в точке $\dfrac{l}{m_n}$;

— непрерывности слева в точке $\dfrac{l}{m_n}-$.

Для действительной прямой показывается, что всякая вещественнозначная функция ограниченной вариации представима в виде разности двух возрастающих, а также

$$\lim_{n\to\infty} V(x\dot{+}G_n, f) = 0, \text{ если функция } f(t) \text{ непрерывна в точке } x \in G. \tag{4}$$

Пусть

$$\tilde{x}_0 = 0, \quad \tilde{x}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{m_k}. \tag{5}$$

Тогда

$$x \in \left[\tilde{x}_n, \left(\tilde{x}_n \dot{+} \frac{1}{m_n}\right) -\right], \quad x\dot{+}G_n = \left[\tilde{x}_n, \left(\tilde{x}_n \dot{+} \frac{1}{m_n}\right) -\right],$$

т. е. смежный класс $x\dot{+}G_n$ является отрезком $\left[\tilde{x}_n, \left(\tilde{x}_n \dot{+} \dfrac{1}{m_n}\right) -\right]$ в группе последовательностей G.

Обозначим через $\operatorname{osc}_E(f)$ колебание функции $f(t)$ на множестве $E \subset G$,

$$\omega_n(x, f) = \sup_{t\in G_n} |f(x\dot{+}t) - f(x)|, \quad \omega_n(f) = \sup_{x\in G} \omega_n(x, f). \tag{6}$$

Невозрастающую последовательность $\{\omega_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ называют *модулем непрерывности* функции $f(t)$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(f) = 0$, если $f(t)$ непрерывна на G, а также

$$\omega_n(x, f) \le \operatorname{osc}_{x\dot{+}G_n}(f) \le V(x\dot{+}G_n, f), \quad \operatorname{osc}_{x\dot{+}G_n}(f) \le 2\omega_n(x, f). \tag{7}$$

Так как группа последовательностей G и отрезок $[0, 1]$ отличаются лишь на счетное множество точек, то с $[0, 1]$ на G переносятся понятия меры и интеграла Лебега, ортогональные и ортонормированные системы функций, а также ряды Фурье по этим системам и классы функций $L^p(G)$. В дальнейшем будем обозначать ($l = 1, 2, \ldots, p_n - 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$)

$$G_n = \left[0, \frac{1}{m_n}-\right], \quad G_{l,n} = \left[\frac{l}{m_n}, \frac{l+1}{m_n}-\right], \tag{8}$$

вместо $\displaystyle\int_{\frac{l}{m_n}}^{\frac{l+1}{m_n}}$ писать $\displaystyle\int_{G_{l,n}}$, а вместо $\displaystyle\int_{\frac{1}{m_{n+1}}}^{\frac{1}{m_n}} - \int_{G_n\setminus G_{n+1}}$, ради экономии места, мы перешли к обозначениям нульмерных компактных абелевых групп (групп Виленкина [1], [2]).

2. Системы типа Хаара и Уолша

Пусть (названия систем даются в разделе 9)

$$\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}, \quad \text{где } \psi_0(x) \equiv 1;$$

$$r_k(x) = \psi_{m_k}(x) = \exp\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}, \quad \text{если } k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\psi_n(x) = \prod_{k=0}^{s} (r_k(x))^{a_k}, \quad \text{где } a_k \text{ и } s \text{ определены формулой (1).}$$

Как будет сказано в разделе 9, иногда $r_k(x)$ называют функциями Радемахера.

Функция $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система непрерывных на группе G функций со свойствами

$$\psi_n(x\dot{+}y) = \psi_n(x) \times \psi_n(y), \quad |\psi_n(x)| \equiv 1. \tag{9}$$

Равенство (9) означает, что система Прайса Ψ является системой характеров на модифицированном отрезке $[0,1]^*$ (в группе последовательностей $G=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}|x_n=0,1,\dots,p_n-1\}$).

Рассмотрим еще одну полную ортонормированную систему непрерывных на группе G кусочно-постоянных функций

$$\Gamma=\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty},\quad \gamma_0(x)\equiv 1;$$

$$\gamma_n(x)=\gamma_{a_s m_s+n'}(x)=\begin{cases}\sqrt{m_s}\exp\dfrac{2i\pi a_s x_{s+1}}{p_{s+1}}, & \text{если } n'=\tilde{x}_s m_s;\\ 0 & \text{для } n'\neq\tilde{x}_s m_s\end{cases}\tag{10}$$

($\tilde{x}_s$ определены формулой (5), а s, a_s и $n'-$ равенством (1)).

В дальнейшем в данной работе системы Γ, порожденные последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с

$$\sup_n p_n<\infty\tag{11}$$

и $p_n\not\equiv 2$ будем называть *обобщенными системами Хаара,* а если условие (11) не выполняется, то — *системами типа Хаара.* Как показано в работах [3]–[5], на обобщенные системы Хаара распространяется основное свойство систем Хаара о равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$ ряда Фурье по этим системам от любой непрерывной функции к самой функции, а как показано в работах [6], [7], на системы типа Хаара указанное выше свойство о равномерной сходимости ряда Фурье от непрерывной функции, вообще говоря, не распространяется (это можно определить и из данной работы).

Следует отметить, что введенные выше понятия обобщенных систем Хаара и систем типа Хаара относятся лишь к данной работе и общепринятыми не являются.

3. Условия Дини–Липшица

В ([8], следствия 2, 3) были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если*

$$\omega_n(x,f)=o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right),\tag{12}$$

то ряд Фурье по системе Γ от интегрируемой на группе G функции $f(t)$ сходится к ней в точке x.

Теорема 2 (признак Дини–Липшица по системам типа Хаара)**.** *Если*

$$\omega_n(f)=o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right),\tag{13}$$

то ряд Фурье по системе Γ от функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на группе G.

Теорема 2 является улучшением полученного в 2009 г. С.Ф. Лукомским [5] утверждения: *если* $\omega_n(f)=o\left(\dfrac{1}{p_{n+1}}\right)$, *то ряд Фурье по системе* Γ *от функции* $f(x)$ *сходится к ней равномерно на группе* G ([8], заключение, с. 445).

Условия (12) и (13) являются точными, ибо справедлива доказанная в ([8], теорема 2)

Теорема 3. *В случае $\sup_n p_n=\infty$ для любой точки $x\in G=[0,1]^*$ существует непрерывная на G функция такая, что $\omega_n(x,f)=O\left(\dfrac{1}{\ln p_{n+1}}\right)$, однако ее ряд Фурье по системе Γ (системе типа Хаара) расходится в точке x.*

4. Постановка задачи

Известна [9], [10]

Теорема 4 (признак сходимости Жордана для тригонометрических рядов). *Если $f(x)$ является 2π-периодической функцией ограниченной вариации, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ во всякой точке $x \in [0,2\pi]$ и равномерно сходится к $f(x)$ на любом отрезке $[a,b] \subset (0,2\pi)$, где $f(x)$ непрерывна.*

Основная цель работы — обобщить признак сходимости Жордана на системы типа Хаара для группы последовательностей G. Если этот признак не обобщается, то найти условия на вариацию функции, при выполнении которых будет сходимость в заданной точке (а также равномерная сходимость на группе последовательностей G) ряда Фурье от заданной функции по системам типа Хаара. Это условие, по возможности, должно быть точным (т. е. o в нем не может быть заменено на O).

Оказалось, что найденный признак сходимости рядов Фурье по системам типа Хаара, аналогичный признаку сходимости Жордана, ничем не отличается от найденного в [8] признака Дини–Липшица. Поэтому основная ценность данной работы — построение контрпримера (см. раздел 8) функции *ограниченной вариации* с расходящимся в некоторой точке рядом Фурье по системе Γ.

5. Формулировки основных теорем

Теорема 5 (признак сходимости Жордана для систем типа Хаара). *Если выполнено условие*

$$V(x\dot{+}G_n, f) = o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right), \tag{14}$$

то ряд Фурье по системе Γ от интегрируемой на G функции $f(t)$ сходится к ней в точке $x \in G$ (непрерывность функции $f(t)$ в точке x следует из условия (14)).

Теорема 5 легко следует из теоремы 5 и равенства (7).

Теорема 6. *Если условие (14) выполнено равномерно на группе G, то ряд Фурье по системе Γ от функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на G.*

Взаимосвязь формулировок теорем 5 и 6 с “классическим” признаком Жордана будет показана в разделе 9 этой работы.

Теорема 7 (контрпример на признак Жордана по системам типа Хаара). *Если $\sup\limits_n p_n = \infty$, то существует непрерывная функция ограниченной вариации на группе G (обозначим ее через $f(t)$) такая, что (множества G_n определены в (8))*

$$\operatorname{osc}_{G_n}(f) \le V(G_n, f) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right), \tag{15}$$

однако ее ряд Фурье по системе Γ расходится (ограниченно) в нуле (т. е. в нулевом элементе группы G или в последовательности, все элементы которой равны нулю).

Переходя от функции $f(t)$ к $f(x\dot{-}t)$ при фиксированном $x \in G = [0,1]^*$, получим, что верна

Теорема 8. *Если* $\sup\limits_n p_n = \infty$, *то существует непрерывная функция ограниченной вариации на группе* G (*обозначим ее через* $f(t)$) *такая, что* (*множества* G_n *определены в* (8)) *для произвольной фиксированной точки* $x \in G = [0,1]^*$

$$\mathrm{osc}_{x\dot{+}G_n}(f) \le V(x\dot{+}G_n, f) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right),$$

однако ее ряд Фурье по системе Γ *расходится* (*ограниченно*) *в точке* x.

Из теоремы 7 легко вытекает

Следствие 1. Если $\sup\limits_n p_n = \infty$, то существует монотонная непрерывная на группе G функция, ряд Фурье которой по системе Γ, порожденной данной последовательностью $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, расходится в некоторой точке.

В самом деле, либо действительная, либо мнимая часть функции из теоремы 7, должна иметь расходящийся в нуле ряд Фурье. А эта (уже *вещественнозначная* функция) представима в виде разности двух монотонно неубывающих функций, и тогда ряд Фурье по системе Γ у хотя бы одной из этих монотонных функций должен разойтись в нуле.

6. Ядра Дирихле по системам Ψ, Γ и их взаимосвязь

Напомним, что n-е ядро Дирихле по ортонормированной системе функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ вычисляется по формуле

$$D_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(t)}.$$

Так как $|\psi_n(x)| \equiv 1$, то $\overline{\psi_k(t)} = \dfrac{1}{\psi_k(t)} = \psi_k(\dot{-}t)$, и, используя формулу (9), для системы Ψ имеем $D_n(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi_k(x)\overline{\psi_k(t)} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \psi_k(x\dot{-}t) = D_n(x\dot{-}t)$, т. е. здесь можно считать, что

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x), \text{ и тогда } D_n(\dot{-}x) = \overline{D_n(x)}. \tag{16}$$

А так как

$$|\psi_n(x)| \equiv 1 \text{ , то } |D_n(x)| \le n \text{ для всех } x \in G. \tag{17}$$

В дальнейшем ядра Дирихле по системе Ψ будем обозначать как $D_n(x\dot{-}t)$ (либо $D_n(x)$, как функцию одной переменной), а по системам Γ – как $D_n(x,t)$.

Справедливы следующие утверждения ([7], равенства (22), (23)).

Теорема 9. *Ядра Дирихле для систем* $\Psi = \{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *с номерами* jm_n $(j = 1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1)$ *совпадают, т. е.*

$$D_{jm_n}(x,t) = D_{jm_n}(x\dot{-}t). \tag{18}$$

Теорема 10. *Для систем* $\Gamma = \{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *либо* $D_n(x,t) = D_{a_s m_s + n'}(x,t) = D_{a_s m_s}(x,t)$, *либо* $D_n(x,t) = D_{a_s m_s + n'}(x,t) = D_{(a_s+1)m_s}(x,t)$, *а точнее* (*числа* a_s, m_s *и* n' *определяются формулой* (1))

$$D_n(x,t) = \begin{cases} D_{a_s m_s}(x,t), & \textit{если} \;\; x\dot{-}t \in G_s,\; n' \le \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s; \\ D_{(a_s+1)m_s}(x,t), & \textit{если} \;\; x\dot{-}t \in G_s,\; n' > \tilde{x}_s m_s = \tilde{t}_s m_s; \\ D_{a_s m_s}(x,t) = 0, & \textit{если} \;\; x\dot{-}t \in G \setminus G_s. \end{cases} \tag{19}$$

Известно также, что (см., например, [11]; [1], 2.2; [12], лемма 3; [13], введение, равенства (2), (3))

$$D_{m_n}(x) = \begin{cases} m_n, & \text{если } x \in G_n; \\ 0, & \text{если } x \in G \setminus G_n. \end{cases} \tag{20}$$

А если j целое с $1 \le j \le p_{n+1} - 1$, то

$$D_{jm_n}(x) = D_{m_n}(x) \frac{1 - (r_n(x))^j}{1 - r_n(x)} \tag{21}$$

и $\left(\text{ибо для } x \in G_{n+1} \text{ и } k < m_{n+1}\colon \psi_k(x) = 1, \text{ и тогда } D_{jm_n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{jm_n - 1} \psi_k(x) = jm_n\right)$ справедлива

Лемма 1. *Для $j \in \{1, 2, \ldots, p_{n+1} - 1\}$ выполнено равенство*

$$D_{jm_n}(x) = \begin{cases} jm_n, & \textit{если } x \in G_{n+1} = \left[0, \dfrac{1}{m_{n+1}} - \right]; \\ m_n \dfrac{1 - (r_n(x))^j}{1 - r_n(x)}, & \textit{если } x \in G_n \setminus G_{n+1} = \left[\dfrac{1}{m_{n+1}}, \dfrac{1}{m_n} - \right]; \\ 0, & \textit{если } x \in G \setminus G_n = \left[\dfrac{1}{m_n}, 1\right]. \end{cases} \tag{22}$$

Покажем, что также справедлива

Лемма 2. *Для $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in G_n \setminus G_{n+1}$ (т. е. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, а $x_{n+1} \ne 0$), целого j, $1 \le j \le p_{n+1} - 1$, верно равенство*

$$D_{jm_n}(x) = m_n \frac{\sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \dfrac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \exp \frac{i\pi x_{n+1}(j-1)}{p_{n+1}}. \tag{23}$$

Доказательство. Из равенства (22) и определения систем функций $r_n(x)$ (см. раздел 2) имеем

$$D_{jm_n}(x) = m_n \frac{1 - \exp \dfrac{2i\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{1 - \exp \dfrac{2i\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} = m_n \frac{1 - \cos \dfrac{2\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}} - i \sin \dfrac{2\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{1 - \cos \dfrac{2\pi x_{n+1}}{p_{n+1}} - i \sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} =$$

$$= m_n \frac{2\sin^2 \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}} - 2i \sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}} \cos \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{2\sin^2 \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}} - 2i \sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}} \cos \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}}} = m_n \frac{\sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}}} \; \frac{\sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}} - i \cos \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}} - i \cos \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}}} =$$

$$= m_n \frac{\sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}}} \; \frac{-i \left(\cos \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}} + i \sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}\right)}{-i \left(\cos \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}} + i \sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}}\right)} = m_n \frac{\sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \dfrac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \; \frac{\exp \left(i \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}\right)}{\exp \left(i \dfrac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}\right)} =$$

$$= m_n \frac{\sin \dfrac{\pi x_{n+1} j}{p_{n+1}}}{\sin \dfrac{2\pi x_{n+1}}{2p_{n+1}}} \exp\left(i \frac{\pi x_{n+1}(j-1)}{p_{n+1}}\right).$$

Равенство (23) доказано. □

Лемма 3. *Если* $x \in \left[\dfrac{l}{m_{n+1}}, \dfrac{l+1}{m_{n+1}} -\right]$, *числа* l, j *целые,* $1 \le l \le \dfrac{p_{n+1}}{3}$, $1 \le j \le p_{n+1} - 1$, *то справедливо равенство*

$$\operatorname{Im}(D_{jm_n}(x)) = \frac{m_n}{2\sin\frac{\pi l}{p_{n+1}}} \left(\cos\frac{\pi l}{p_{n+1}} - \cos\frac{\pi l(2j-1)}{p_{n+1}}\right). \tag{24}$$

Доказательство. Из (23) имеем

$$\operatorname{Im}(D_{jm_n}(x)) = m_n \frac{\sin\dfrac{\pi l j}{p_{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n+1}}} \sin\frac{\pi l(j-1)}{p_{n+1}} = \frac{m_n}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n+1}}} \left(\sin\frac{\pi l j}{p_{n+1}} \sin\frac{\pi l(j-1)}{p_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{m_n}{2\sin\dfrac{\pi l}{p_{n+1}}} \left(\cos\frac{\pi l(j-(j-1))}{p_{n+1}} - \cos\frac{\pi l(j+(j-1))}{p_{n+1}}\right).$$

Равенство (24) доказано. □

7. Утверждения, непосредственно не связанные с ядрами Дирихле

Лемма 4. *Пусть*

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{A} \frac{(-1)^{(l+1)}}{\sin\dfrac{\pi l}{n}}, \text{ где } A \text{ целое, } 1 \le A \le \frac{n}{2}. \tag{25}$$

Тогда для любого целого положительного n *выполнено неравенство*

$$0 < \varphi_n < \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Доказательство проводится тем же методом, что и признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Заметим, что сумма в (25) является знакочередующейся и абсолютные величины ее слагаемых убывают при возрастании l. Положим $\chi_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{l=1}^{k} \frac{(-1)^{l+1}}{\sin\dfrac{\pi l}{n}}$. Тогда

$$\chi_{2k+2} - \chi_{2k} = \frac{1}{n}\left(\frac{-1}{\sin\dfrac{\pi(2k+3)}{n}} + \frac{1}{\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{n}}\right) > 0$$

или $\chi_{2k+2} > \chi_{2k}$ для всех целых k, $1 \le k \le \dfrac{n}{4} - 2$, и поэтому

$$\chi_{2k+2} > \chi_{2k} > \ldots > \chi_2 = \frac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{n}} - \frac{1}{n\sin\dfrac{2\pi}{n}} > 0. \tag{27}$$

Также

$$\chi_{2k+1} - \chi_{2k-1} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{n}} - \frac{1}{\sin\dfrac{2k-1}{n}}\right) < 0,$$

т. е.

$$\chi_{2k+1} < \chi_{2k-1} < \ldots < \chi_1 = \frac{1}{n\sin\dfrac{\pi}{n}} \leq \frac{1}{n\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\pi}{n}} = \frac{1}{2}, \tag{28}$$

ибо $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$ для всех $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Верно неравенство

$$\chi_{2k+1} - \chi_{2k} = \frac{1}{n\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{n}} > 0.$$

Поэтому из (27), (28) следует

$$0 < \chi_2 < \ldots < \chi_{2k} < \chi_{2k+1} < \chi_{2k-1} < \ldots < \chi_1 < \frac{1}{2},$$

т. е. для любого целого $n > 0$ будет $0 < \chi_n = \varphi_n < \dfrac{1}{2}$. Неравенство (25) доказано. □

Лемму 4 можно доказать и из следующего неравенства, которое можно получить из преобразования Абеля (преобразование Абеля определено, например, в начале работы [9]): *если* $B_k = \sum\limits_{j=1}^{k} b_j$ *ограничены, т. е.* $B_k \leq B$ *для некоторого* B *и всех* $k = 1, 2, \ldots, n$, *а также* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$, *то*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k B_k < Ba_1. \tag{29}$$

Тогда для вывода леммы 4 в (29) надо положить $b_k = (-1)^{k+1}$, $a_k = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi k}{n}}$, оценить снизу $\sin x$ через аргумент $\left(\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x, \text{ если } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ и сделать несложные преобразования.

Почти дословно повторяя доказательство леммы 4, поменяв только χ_k на

$$\tilde{\chi}_k = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{l+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{n}$$

$\left(\text{тогда ввиду неравенства (28) } \tilde{\chi}_1 \leq \chi_1 \leq \dfrac{1}{2}\right)$, а φ_n– на $\tilde{\varphi}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{A}(-1)^{l+1}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi l}{n}$, получим, что верна

Лемма 5. *Пусть*

$$\tilde{\varphi}_n = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{A}(-1)^{(l+1)}\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{n}, \quad \text{где } A \text{ целое, } 1 \leq A \leq \frac{n}{2}. \tag{30}$$

Тогда для любого целого положительного n *выполнено неравенство*

$$0 < \tilde{\varphi}_n < \frac{1}{2}. \tag{31}$$

8. Доказательство теоремы 3 (построение контрпримера)

8.1. Одна лемма о неограниченных последовательностях.

Лемма 6. *Пусть* $\sup\limits_n p_n = \infty$ (*напоминаем также, что* $p_n \ge 2$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$). *Тогда существует такая подпоследовательность* $\{p_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, *что имеют место неравенства*

$$p_{n+1} < p_{n_{k+1}+1} \quad \text{для всех} \quad n = 1, 2, \ldots, p_{n_{k+1}} \quad \left(\text{и поэтому} \quad \frac{1}{\ln p_{n+1}} > \frac{1}{\ln p_{n_{k+1}+1}}\right), \tag{32}$$

$$p_{n_1+1} > 600, \quad p_{n_{k+1}+1} \ge p_{n_k+1}^2 > p_{n_k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{33}$$

Отметим, что если $\{p_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию (32), то и любая ее подпоследовательность также удовлетворяет (32). Поэтому для вывода леммы 6 достаточно доказать только существование подпоследовательности, удовлетворяющей (32).

Не лишне также заметить, что для ограниченных последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ лемма 6 неверна, ибо тогда существует $p_j = \max\limits_n p_n$, и для всех $n > j$ неравенство (32) уже не выполняется.

Доказательство. Как было отмечено ранее, достаточно доказать существование подпоследовательности $\{p_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (32).

Положим $n_0 = 0$. Так как последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то найдется такое j, что $p_j + 1 > p_1$. Пусть $n_1 = \min\{n | p_n > p_1 = p_{n_0}\} - 1$. Положим далее

$$n_2 = \min\{n \ge n_1 + 1 | p_n < p_{n_2}\} - 1.$$

Тогда $p_{n_1+1} < p_{n_2+1}$ и для всех $n < n_2$ имеем $p_n < p_{n_2+1}$.

Продолжая этот процесс, получаем число n_k такое, что $p_n < p_{n_k+1}$ для всех целых положительных $n < n_k$. Полагаем далее $n_{k+1} = \min\{n | n_k + 1 \le n \text{ и } p_n > p_{n_k+1}\} - 1$. Тогда и для всех целых $n > 0$ выполнено условие (32), ибо если $n < n_j + 1 < n_{k+1} + 1$, то и $p_n < p_{n_j+1} < p_{n_{k+1}+1}$. □

Для доказательства теоремы 3 будем рассматривать следующие случаи:

a) удовлетворяющая лемме 6 $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет подпоследовательность, состоящую только из нечетных чисел;

b) такой подпоследовательности в $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ нет.

8.2. Последовательность $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет бесконечную подпоследовательность, состоящую только из нечетных чисел.

Перенумеровав подпоследовательность

$$\{p_{n_k+1}\}_{r-1}^{\infty}$$

(т. е. отбросив из нее все четные числа), можно считать, что подпоследовательность

$$\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$$

состоит только из нечетных чисел. Тогда числа

$$j_k = \frac{p_{n_k+1} + 1}{2} \quad \text{целые.} \tag{34}$$

Положим

$$r = 0 \tag{35}$$

(смысл введения числа r будет пояснен в подразделе 8.3). Тогда для $l \ge r$ имеет место неравенство

$$\ln p_{n_l+1} \ge 2 \ln p_{n_{l-1}+1} \ge 4 \ln p_{n_{l-2}+1} \ge \ldots \ge 2^{l-r} \ln p_{n_r+1}. \tag{36}$$

Определим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln p_{n_k+1}}, & \text{если } x \in \left[\dfrac{1}{m_{n_k+1}}, \dfrac{B}{m_{n_k+1}}\right], \ k = r+1, r+2, \ldots; \\ 0 & \text{для остальных } x, \end{cases} \quad \text{где} \tag{37}$$

$$B = \left[\frac{p_{n_k+1}}{3}\right], \tag{38}$$

а $[x]$ означает целую часть действительного числа x. Отметим, в частности, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

В частности, $f(x) = 0$ для всех $x \in \left[\dfrac{1}{m_{n_{k+1}}}, \dfrac{1}{m_{n_k+1}}-\right]$, и поэтому

$$V\left(\left[\frac{1}{m_{n_{k+1}}}, \frac{1}{m_{n_k+1}}-\right], f\right) = 0. \tag{39}$$

Также отметим, что

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \tag{40}$$

т. е. $f(x)$ — непрерывная на группе G (модифицированном отрезке $[0,1]^*$) функция.

Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $\left[\dfrac{1}{m_{n_k+1}}-, \dfrac{1}{m_{n_k}}-\right]$ (число B определено в формуле (38)):

$$\frac{1}{m_{n_k+1}}- = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_s \le \frac{B}{m_{n_k+1}} < x_{s+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = \frac{1}{m_{n_k}}- \tag{41}$$

$\Bigg($точка $\dfrac{B}{m_{n_k+1}}$, вообще говоря, может и не войти в данное разбиение; неравенство (41) лишь показывает, что $\dfrac{B}{m_{n_k+1}}$ входит лишь в некоторый отрезок $[x_s, x_{s+1}]$ данного разбиения$\Bigg)$.

Тогда $f(x_1) - f(x_0) = f(x_s) - f(x_{s+1}) = \dfrac{1}{\ln p_{n_k+1}}$ и $f(x_{k+1}) - f(x_k) = 0$, если $k \ne 0$ и $k \ne s$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_{s+1}) - f(x_s)| = \frac{2}{\ln p_{n_k+1}},$$

или (см. также (36))

$$V\left(\left[\frac{1}{m_{n_k+1}}-, \frac{1}{m_{n_k}}-\right], f\right) = \frac{2}{\ln p_{n_k+1}} \le \frac{2}{2^{k-r}\ln p_{n_r+1}} \tag{42}$$

(при выводе последнего неравенства в (42) нужно использовать (36)).

Рассмотрим (см. также равенство (3))

$$\begin{gathered} V\left(\left[\frac{1}{m_{n_{k+1}}}-, \frac{1}{m_{n_k}}-\right], f\right) = V\left(\left[\frac{1}{m_{n_{k+1}}}-, \frac{1}{m_{n_k+1}}-\right], f\right) + \\ +V\left(\left[\frac{1}{m_{n_k+1}}-, \frac{1}{m_{n_k}}-\right], f\right) \le \frac{1}{2^{k-r}\ln p_{n_r+1}}, \end{gathered} \tag{43}$$

ибо первое слагаемое в средней части (43) обращается в нуль ввиду равенства (39), а для второго слагаемого применяем неравенство (42).

Отсюда, используя соотношения (3), (4), из (42) для целого $\nu \ge k$ при целом $l \le \nu$ получим (ибо $V(G_{n_l}, f) = V(G_{n_\nu}, f) + V(G_{n_l} \setminus G_{n_\nu}, f)$)

$$
\begin{aligned}
V(G_{n_{r+1}},f) &= \sum_{l=r+1}^{\nu} V(G_{n_l}\setminus G_{n_{l+1}},f)+V(G_{n_\nu},f)= \\
&= \sum_{l=r+1}^{\nu} V\left(\left[\frac{1}{m_{l+1}}-,\frac{1}{m_{n_l}}-\right]\right)+V\left(\left[0,\frac{1}{m_{n_\nu}}-\right],f\right).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Ввиду непрерывности функции $f(x)$ в нуле, а также равенства (4) последнее слагаемое в правой части (44) стремится к нулю при $\nu\to\infty$. Поэтому, перейдя в правой части (44) к $\lim\limits_{\nu\to\infty}$, получим

$$
\begin{aligned}
V(G_{n_{r+1}},f) &= \sum_{l=r+1}^{\infty} V\left(\left[\frac{1}{m_{n_l+1}}-,\frac{1}{m_{n_l}}-\right],f\right)\le \sum_{l=r+1}^{\infty}\frac{2}{\ln p_{n_l+1}}\le \\
&\le \frac{2}{\ln p_{n_{r+1}}}\sum_{l=r+1}^{\infty}\frac{1}{2^{l-r-1}}=\frac{4}{\ln p_{n_{r+1}+1}},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

т. е. $V(G,f)=V(G_{n_{r+1}},f)<\infty$ или $f(t)$ — функция ограниченной вариации на G и на подпоследовательности $\{p_{n_k+1}\}_{k=r+1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (15).

Если же $n\notin\{n_l\}_{l=r+1}^{\infty}$, то подбираем k из условия $n_k+1\le n<n_{k+1}$. Из определения (37) функции $f(x)$ следует, что $V(G_n\setminus G_{n_{k+1}},f)=0$ (последнее равенство можно получить и из (39)). Тогда из условия (39) получаем (см. также неравенство (45) и второе неравенство в (32))

$$
V(G_n,f)=V(G_{n_{k+1}},f)+V(G_n\setminus G_{n_{k+1}},f)=V(G_{n_{k+1}},f)\le\frac{4}{\ln p_{n_{k+1}+1}}\le\frac{4}{\ln p_{n+1}}. \tag{46}
$$

Таким образом, условие (15) выполнено для любого натурального n.

Обозначим через S_n n-ю частичную сумму Фурье от функции $f(t)$, определенной равенством (37), по системе Γ в нуле.

Напомним, что $f(t)$ непрерывна на группе G (см., например, равенства (40), (37), определение функции $f(t)$, (36)). В [4]–[6] показано, что для систем типа Хаара Γ

$$
\lim_{n\to\infty} S_{m_n}=f(0)\ \ (=0 \text{ по определению функции } f(t)). \tag{47}
$$

Найдем $S_{j_k m_{n_k}}$, где j_k определено в (34) (см. также (16), (18) и (8)):

$$
\begin{aligned}
S_{j_k m_{n_k}} &= \int_G f(t)D_{j_k m_{n_k}}(0,t)\,dt=\int\limits_{G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt+ \\
&+\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt+\int\limits_{G\setminus G_{n_k}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt.
\end{aligned}
$$

Ввиду формулы (22) и теоремы 9, третье слагаемое в правой части последнего равенства обращается в нуль. Таким образом, мы показали, что

$$
S_{j_k m_{n_k}}=\int\limits_{G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt+\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt,
$$

откуда следует неравенство

$$|S_{j_k m_{n_k}}| \geq \left| \int\limits_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\, dt \right| - \left| \int\limits_{G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\, dt \right|. \tag{48}$$

Исходя из теоремы 9 и (22), оценим сверху вычитаемое в (48) (см. также (8)):

$$\left| \int\limits_{G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\, dt \right| = j_k m_{n_k} \left| \int\limits_{G_{n_k+1}} f(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \frac{p_{n_k+1}+1}{2} m_{n_k} \int\limits_{G_{n_k+1}} |f(t)|\, dt < \frac{p_{n_k+1} m_{n_k}}{\ln p_{n_k+1}} \int\limits_0^{\frac{1}{m_{n_k+1}}} dt = \frac{m_{n_k+1}}{m_{n_k+1} \ln p_{n_k+1}} = \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}.$$

Мы получили неравенство

$$\left| \int\limits_{G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\, dt \right| \leq \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} = o(1) \quad (k \to \infty). \tag{49}$$

Оценим (снизу) мнимую часть второго слагаемого в формуле (48). По лемме 3 ($j = j_k$ определены в (34), а B — в (38)), для $k \geq 2$ имеем (см. также (8))

$$\left| \operatorname{Im} \left(\int\limits_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\, dt \right) \right| = \left| \sum_{l=1}^{B-1} \operatorname{Im} \left(\int\limits_{G_{l,n_k+1}} \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} \overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)} \right) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{\ln p_{n_k+1}} \left| \sum_{l=1}^{B-1} \int\limits_{G_{l,n_k}} \operatorname{Im} \left(\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)} \right) dt \right| =$$

$$= \frac{m_{n_k}}{2 \ln p_{n_k+1}} \left| \sum_{l=1}^{B-1} \frac{\cos \dfrac{\pi l (2j_k - 1)}{p_{n_k+1}}}{\sin \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \sum_{l=1}^{B-1} \frac{\cos \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} \right| \int\limits_{\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} dt \geq$$

$$\geq \frac{m_{n_k}}{2 m_{n_k+1} \ln p_{n_k+1}} \left(\sum_{l=1}^{B-1} \frac{\cos \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \left| \sum_{l=1}^{B-1} \frac{\cos \dfrac{\pi l((p_{n_k+1}+1)-1)}{p_{n_k+1}}}{\sin \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} \right| \right),$$

т. е.

$$\left| \operatorname{Im} \left(\int\limits_{G_{n_k} \setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\, dt \right) \right| \geq \frac{1}{2 \ln p_{n_k+1}} \left(\frac{1}{p_{n_k+1}} \sum_{l=1}^{B-1} \frac{\cos \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \frac{1}{p_{n_k+1}} \left| \sum_{l=1}^{B-1} \frac{(-1)^l}{\sin \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} \right| \right). \tag{50}$$

Оценим уменьшаемое в (50). Если $l \leq B \leq \dfrac{p_{n_k+1}}{3}$, то

$$\cos \frac{\pi l}{p_{n_k+1}} \geq \cos \frac{\pi p_{n_k+1}}{3 p_{n_k+1}} \geq \frac{1}{2}, \ \text{ а } \ \sin \frac{\pi l}{p_{n_k+1}} \leq \frac{\pi l}{p_{n_k+1}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{p_{n_k+1}}\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}\ge\frac{1}{2p_{n_k+1}}\sum_{l=1}^{B-1}\frac{p_{n_k+1}}{\pi l}=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{B-1}\frac{1}{l}\ge\frac{\ln(B-1)}{2\pi}\ge\frac{1}{2\pi}\ln\left(\left[\frac{p_{n_k+1}}{3}\right]-1\right).\tag{51}$$

По условию (33) $p_{n_k+1}>600>12$, и тогда $\dfrac{p_{n_k+1}}{3}>4$, т. е. $2<\dfrac{1}{2}\dfrac{p_{n_k+1}}{3}=\dfrac{p_{n_k+1}}{6}$ или

$$\left[\frac{p_{n_k+1}}{3}\right]-1>\frac{p_{n_k+1}}{3}-2>\frac{p_{n_k+1}}{3}-\frac{p_{n_k+1}}{6}.\tag{52}$$

Поэтому (используем нервенство $p_{n_k+1}>600$)

$$\frac{1}{p_{n_k+1}}\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}>\frac{1}{2\pi}\ln\left(\left[\frac{p_{n_k+1}}{3}\right]-1\right)>\frac{1}{2\pi}\ln\frac{p_{n_k+1}}{6}>\frac{1}{2\pi}\ln 100=\frac{1}{2\pi}2\ln 10>\frac{1}{\pi}\ln e^2=\frac{2}{\pi}.\tag{53}$$

Однако, по лемме 4, вычитаемое в формуле (50) по модулю меньше, чем $\dfrac{1}{2}$. Тогда, подставляя (53) в (50), получим неравенство $\left(\text{ибо } \pi<3.2=\dfrac{16}{5}\right)$

$$\left|\mathrm{Im}\left(\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_km_{n_k}}(t)}\,dt\right)\right|\ge\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}>\frac{2}{16/5}-\frac{1}{2}=\frac{10}{16}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.\tag{54}$$

Подставляя далее (49) в (48) и, используя оценку (54), показываем, что

$$\left|\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_km_{n_k}}(t)}\,dt\right|\ge\left|\mathrm{Im}\left(\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_km_{n_k}}(t)}\,dt\right)\right|\ge\frac{1}{8}.\tag{55}$$

Подставляя (55) и (49) в (48), получим, что $|S_{j_km_{n_k}}|\ge\dfrac{1}{8}+o(1)$ $(k\to\infty)$, т. е. *если существует* $\lim\limits_{k\to\infty}S_{j_km_{n_k}}$, то он не меньше, чем $\dfrac{1}{8}$. Сравнивая последний вывод с равенством (47), приходим к выводу, что предел частичных сумм Фурье по системе типа Хаара $\left(\lim\limits_{n\to\infty}S_n\right)$ не существует, т. е. ряд Фурье по системе типа Хаара от функции *ограниченной вариации* $f(t)$ расходится в точке $x=0$ (т. е. $x=0_G$).

8.3. **Случай, когда неограниченная последовательность $\{p_{n_k+1}\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяет условию подраздела 8.2.** Всякая бесконечная подпоследовательность (а она должна быть, ибо $\sup\limits_n p_n=\infty$) неограниченной последовательности $\{p_{n_k+1}\}_{n=1}^{\infty}$ может содержать не более, чем конечное число нечетных чисел. Положим

$$r=\max\{k|p_{n_k+1}\text{ нечетно}\}\tag{56}$$

(если в подпоследовательности $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ нечетных чисел нет, то полагаем $r=0$).

Таким образом, подпоследовательноть $\{p_{n_k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ состоит только из четных чисел. Тогда числа

$$j_k=\frac{p_{n_k+1}}{2}\tag{57}$$

целые. Определим функцию $f(x)$ формулой (37). Дословно посторяя все рассуждения подраздела 8.2 между равенствами (35) (только (35) заменяется на (56)) и вплоть до (48) (включая последнее), мы устанавливаем, что $f(t)$ — функция ограниченной вариации, вариация которой удовлетворяет условию теоремы 3. Причем все формулы между (35) и (48) справедливы.

Оценим (снизу) $\left|\operatorname{Im}\left(\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt\right)\right|$ (функция $f(t)$ определена в подразделе 8.2), справедливы соотношения (48) и (49). По лемме 3 ($j = j_k$ заданы в (57), а B — в (38)) для $k \geq 2$ имеем (см. также (8))

$$\left|\operatorname{Im}\left(\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt\right)\right| = \left|\sum_{l=1}^{B-1}\operatorname{Im}\left(\int\limits_{G_{l,n_k+1}} \frac{1}{\ln p_{n_k+1}}\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt\right)\right| = \frac{m_{n_k}}{2\ln p_{n_k+1}}\times$$

$$\times\left|\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l(2j_k-1)}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}\right|\int\limits_{\frac{l}{m_{n_k+1}}}^{\frac{l+1}{m_{n_k+1}}} dt \geq$$

$$\geq \frac{m_{n_k}}{2m_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}}\left(\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \left|\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l(p_{n_k+1}-1)}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2p_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}}\left(\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \left|\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\left(\pi l - \dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}\right)}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}\right|\right) = \frac{1}{2p_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}}\times$$

$$\times\left(\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \left|\sum_{l=1}^{B-1}\frac{(-1)^l\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}\right|\right) =$$

$$= \frac{1}{2p_{n_k+1}\ln p_{n_k+1}}\left(\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \left|\sum_{l=1}^{B-1}(-1)^l\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{p_{n_k+1}}\right|\right)$$

или

$$\left|\operatorname{Im}\left(\int\limits_{G_{n_k}\setminus G_{n_k+1}} f(t)\overline{D_{j_k m_{n_k}}(t)}\,dt\right)\right| \geq$$
$$\geq \frac{1}{2\ln p_{n_k+1}}\left(\frac{1}{p_{n_k+1}}\sum_{l=1}^{B-1}\frac{\cos\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}}{\sin\dfrac{\pi l}{p_{n_k+1}}} - \frac{1}{p_{n_k+1}}\left|\sum_{l=1}^{B-1}(-1)^l\operatorname{ctg}\frac{\pi l}{p_{n_k+1}}\right|\right). \tag{58}$$

Уменьшаемое в формуле (58) оценено в неравенстве (53). А вычитаемое в (58), по лемме 5, по модулю меньше, чем $\dfrac{1}{2}$. Поэтому справедливо (54). Рассуждая далее как в подразделе

8.2, приходим к выводу, что ряд Фурье по системе Γ от функции ограниченной вариации $f(t)$ расходится в нуле. Теорема 3 полностью доказана.

9. Заключение. Некоторые дополнительные замечания

9.1. **Названия систем Ψ и Γ.** Систему Ψ (систему типа Уолша или систему Прайса) рассматривали Н.Я. Виленкин [1] для простых p_n как систему характеров нульмерной компактной абелевой группы и Дж. Прайс [14] на отрезке $[0,1]$ (условия простоты p_n Дж. Прайс не накладывал). В данной работе система Ψ рассматривается на группе последовательностей G, которая равенством (2) взаимно-однозначно отображается на модифицированный отрезок $[0,1]^*$ (т. е. отрезок $[0,1]$ с “раздвоенными” $\{p_n\}$-рациональными точками) с сохранением меры и интеграла Лебега. Условие простоты на числа из последовательности $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ не накладывается. Поэтому рассматриваемую в работе систему Ψ лучше называть системой Прайса.

Для $p_n \equiv p$ система Ψ переходит в систему Крестенсона [15] (либо Крестенсона–Леви); для $p_n \equiv 2$ – в систему Уолша [16] $W = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли [17].

При $p_n \equiv 2$ функции $r_n(x) = \psi_{m_n}(x) = w_{2^n}(x)$ рассматривались Г. Радемахером [18]. Поэтому их часто называют функциями Радемахера (для систем Виленкина либо Прайса).

Систему Γ (систему типа Хаара) рассматривал (по-видимому, впервые) Н.Я. Виленкин [3]. Эта система функций в [3] обозначена как $\{\rho_{n'}^{s,a_s}(x)\}$, где $\rho_{n'}^{s,a_s}(x) = \gamma_n(x)$, а s, a_s и n' связаны с n по формуле (1). Он показал, что множество функций $\{\rho_{n'}^{s,a_s}(x)\}$ при $\sup\limits_n p_n < \infty$ является системой сходимости (под системой сходимости здесь будет пониматься такая ортонормированная система, ряд Фурье по которой от любой непрерывной функции сходится к ней равномерно). Однако в [3] для системы $\{\rho_{n'}^{s,a_s}(x)\}$ не выделено даже подпункта.

Следует отметить, что система $\{\rho_{n'}^{s,a_s}(x)\}$ появилась в [3] при переводе [19] на русский язык. В подлиннике [19] системы $\{\rho_{n'}^{s,a_s}(x)\}$ нет.

В статьях система Γ (под другим названием и также с трехиндексной нумерацией) изучали Б.И. Голубов и А.И. Рубинштейн [4] (с ограничением $\sup\limits_n p_n < \infty$) и Б.И. Голубов [6] (без ограничений на последовательность $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$; сама система Γ обозначена в честь Б.И. Голубова). В случае $p_n \equiv 2$ последовательность функций $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой Хаара [20] $H = \{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. Поэтому систему Γ часто называют *обобщенной системой Хаара* либо *системой типа Хаара*. Следует отметить, что, как показывает теорема 7, а также [6]–[8], [21], система типа Хаара Γ, в отличие от системы Хаара H для $\sup\limits_n p_n = \infty$ уже не является системой сходимости и, следовательно, перестает соответствовать той задаче, которую решал А. Хаар [20] при построении системы H. Поэтому называть Γ системой Хаара будет уже некорректно. А как в данной работе различаются обобщенные системы Хаара и системы типа Хаара сказано в конце раздела 2 настоящей работы.

Одноиндексная нумерация систем типа Хаара появилась в работе [7]. Более ранние одноиндексные нумерации обобщенных систем Хаара мне неизвестны.

9.2. **Признак Жордана.** Для тригонометрических систем функций ([9], §39; [10], гл. II, п. 8) признак сходимости Жордана выглядит следующим образом.

Теорема 11. *Если $f(t)$ — функция ограниченной вариации, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней во всякой ее точке непрерывности.*

Теорема 12. *Если $f(t)$ — непрерывная на $[-\pi,\pi]$ функция ограниченной вариации, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится к ней равномерно на любом отрезке интервала $(-\pi,\pi)$.*

Для $\sup\limits_n p_n < \infty$ теоремы 11, 12 безо всяких изменений переносятся и на системы Прайса Ψ.

Если же $\sup\limits_n p_n = \infty$, то теоремы 11, 12 для систем Прайса становятся неверными. В [22] приведены следующие утверждения.

Теорема 13. *Если $f(t)$ — функция ограниченной вариации на G и в точке $x \in G$*

$$V\left(x\dot{+}\left[0, \frac{1}{m_n}-\right]\right) = o\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right), \tag{59}$$

то ее ряд Фурье по системе Прайса Ψ сходится к ней в точке x.

Теорема 14. *В случае, когда $f(t)$ — функция ограниченной вариации на G и условие* (59) *выполнено равномерно на G, то ряд Фурье по системе Прайса Ψ от функции $f(t)$ сходится к ней равномерно на группе G.*

Теорема 15. *Для $\sup\limits_n p_n = \infty$ существует непрерывная функция $f(t)$ ограниченной вариации на G такая, что*

$$V\left(\left[0, \frac{1}{m_n}-\right]\right) = O\left(\frac{1}{\ln p_{n+1}}\right), \tag{60}$$

однако ее ряд Фурье по системе Прайса Ψ расходится в точке $x = 0$.

С.М. Мирмухамедов [23]–[25] доказал, что условие (59) можно заменить (для функций ограниченной вариации по системам Прайса) на более слабое (19).

В случае $\sup\limits_n p_n < \infty$ система типа Хаара Γ является системой сходимости (см., например, [3], [4]), и поэтому все признаки сходимости для нее неуместны. Если же $\sup\limits_n p_n = \infty$, то, как показано в разделе 3, из (12) уже следует сходимость ряда Фурье по обобщенной системе Хаара. Условие на то, что $f(t)$ — функция ограниченной вариации, накладывать не обязательно. Впрочем, учитывая указанные выше замечания С.М. Мирмухаммедова, теоремы 1, 2 также можно считать признаками Жордана по системе типа Хаара, т. е. признак Жордана на системах типа Хаара полностью совпал с признаком Дини–Липшица по этим системам.

Следует отметить, что теорему 3 настоящей работы для достаточно быстро растущих последовательностей $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ получил Б.И. Голубов. Он в [6] доказал, что если $p_{n+1} > e^{m_n}$, то ряд Фурье по системе типа Хаара от функции $f(x) \equiv x$ расходится в нуле. В данной работе показано, что расходимость рядов Фурье по системе типа Хаара будет для любых $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ с $\sup\limits_n p_n = \infty$.

9.3. **Распространение на нульмерные группы.** На нульмерных компактных абелевых группах система $\{\gamma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ (с трехиндексной нумерацией) была рассмотрена С.Ф. Лукомским [5]. Результаты данной работы на нульмерные компактные абелевы группы распространить затруднительно, ибо (это отмечал еще Н.Я. Виленкин [1]) упорядочивание элементов зависит от способа отображения группы на отрезок $[0, 1]$. На нульмерных группах все привязано к выбору базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, которые отображением Монна [26], [27] переходят в $\dfrac{1}{m_n}\left(e_n \mapsto \dfrac{1}{m_n},\ n = 1, 2, \dots\right)$; в качестве такого e_n может быть выбран любой элемент из $G_n \setminus G_{n+1}$. В зависимости от выбора базисных элементов e_n могут получаться разные вариации. Но это уже тема отдельной статьи.

9.4. **Точки разрыва первого рода.** В ([9], §39; [10], гл. II, п. 8) показано, что тригонометрический ряд Фурье от функции ограниченной вариации (на $[-\pi, \pi]$) сходится к $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$, где $f(x+) = \lim\limits_{t\to x, t>x} f(t)$, $f(x-) = \lim\limits_{t\to x, t<x} f(t)$.

Для систем Хаара и Уолша (а также типа Хаара и Уолша) положение совсем иное. Г. Фабер [28] (см., например, [29]) и П.Л. Ульянов [30] показали, что справедлива

Теорема 16. *Если $f(t)$ — интегрируемая (по Лебегу) функция и в двоично-иррациональной точке $x \in [0,1]$ существуют $\lim\limits_{t\to x+} f(t) = f(x+)$ и $\lim\limits_{t\to x-} f(t) = f(x-)$, а также $f(x+) \neq f(x-)$, то ряд Фурье по системе Хаара от функции $f(t)$ расходится в точке x.*

Однако полное исследование данного вопроса для систем типа Хаара и Уолша занимает более сорока страниц машинописного текста и является темой отдельной статьи (по-видимому, и не одной).

9.5. **Признаки Дини–Липшица и Жордана.** Таким образом, как показано в данной работе и в [8], для обобщенных систем Хаара признак сходимости Жордана не отличается от условия Дини–Липшица. Однако функция из контрпримера [8] не является, в отличие от функции из контрпримера в данной работе, функцией ограниченной вариации. Впрочем, вопрос о вариации функции в [8] не ставился; результаты [8] распространяются и на нульмерные компактные абелевы группы, а функции ограниченной вариации, как упоминается в подразделе 9.3, перенести на нульмерные группы затруднительно.

Благодарю С.М. Воронова, Б.И. Голубова, В.В. Казакова, Т.П. Лукашенко, С.Ф. Лукомского и В.А. Скворцова за ценные советы и замечания. Выражаю признательность А.А. Гаврилястому, С.А. Маненкову и А.Ю. Кудрявцеву за их помощь при оформлении работы. Благодарю также организаторов 12-й Казанской летней [31] и Воронежской зимней [32] международных математических школ-конференций за предоставленную мне возможность изложить на них основные результаты данной работы.

Литература

[1] Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем*, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **11** (4), 363–400 (1947).

[2] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах* (ЭЛМ, Баку, 1981).

[3] Качмаж С., Штейнгауз Г. *Теория ортогональных рядов.* Дополнения Н.Я. Виленкина, §1, п. 6, с. 475–479 (Физматгиз, М., 1958).

[4] Голубов Б.И., Рубинштейн А.И. *Об одном классе систем сходимости*, Матем. сб. **71 (113)** (1), 96–115 (1966).

[5] Лукомский С.Ф. *О рядах Хаара на компактной нульмерной группе*, Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Матем. Механ. Информатика **9** (1), 24–29 (2009).

[6] Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортогональных систем*, Сиб. матем. журн. **9** (2), 297–314 (1968).

[7] Щербаков В.И. *Расходимость рядов Фурье по обобщенным системам Хаара в точках непрерывности функции*, Изв. вузов. Матем. (1), 49–68 (2016).

[8] Щербаков В.И. *Признак Дини–Липшица для обобщенных систем Хаара*, Изв. Саратовск. ун-та, Сер. Матем. Механ. Информатика **16** (4), 435–448 (2016).

[9] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (Физматгиз, М., 1961).

[10] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т. 1 (Мир, М., 1965).

[11] Щербаков В.И. *О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. (2), 37–42 (1983).

[12] Onneweer C.W., Waterman D. *Uniform convergence of Fourier Series on groups.* I, Michigan Math. J. **18** (3), 265–273 (1971).

[13] Щербаков В.И. *Признак Дини–Липшица и сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам*, Anal. Math. **10** (1), 133–150 (1984).
[14] Price J.J. *Certain groups of orthonormal step functions*, Canadian J. Math. **9** (3), 417–425 (1957).
[15] Chrestenson H.E. *A class of generalized Walsh functions*, Pacific J. Math. **5** (1), 17–31 (1955).
[16] Walsh J.L. *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer. J. Math. **45** (1), 5–24 (1923).
[17] Paley R.E.A.C. *A remarkable series of orthogonal functions* (I), Proc. London Math. Soc. **34** (1), 241–264 (1932).
[18] Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunctionen, Math. Ann. **87** (1–2), 112–138 (1922).
[19] Kaczmashz S., Steinhaus H. *Theorie der Orthogonalreichen* (Warszava–Wroclav, 1936).
[20] Haar A. *Zur Theorie der Orthogonalischen Functionensysteme*, Math. Ann. **69** (3), 331–371 (1910).
[21] Щербаков В.И. *Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщенных систем Хаара*, Матем. заметки **101** (3), 446–473 (2017).
[22] Shcherbakov V.I. *A test of convergence of Fourier series with respect to multiplicative systems, analogous to the Jordan test*, Anal. Math. **15** (1), 37–54 (1989).
[23] Мирмухамедов С.М. *О сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам и системам типа Хаара.* Автореферат дис. ... канд. физ.-матем. наук (МГУ, М., 1988).
[24] Мирмухамедов С.М. *О равномерной сходимости рядов по мультипликативным системам*, Вестн. Московск. ун-та. Сер. 1. Матем., механ. (5), 55–59 (1988).
[25] Мирмухамедов С.М. *О признаке типа Салема для переставленных мультипликативных систем*, ДАН Таджикск. ССР **31** (7), 436–441 (1988).
[26] Monna F. *Analyse non-archimédienne* (Springer–Veilag, Berlin–New-York, 1970).
[27] Хренников А.Ю., Шелкович В.М. *Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения* (Физматгиз, М., 2012).
[28] Faber G. *Über die Orthogonalfunctionen des Herr Haar*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **19**, 104–112 (1910).
[29] Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов* (Ин.лит., М., 1963).
[30] Ульянов П.Л. *О рядах по системе Хаара*, Матем. сб. **63 (105)** (3), 356–391 (1964).
[31] Щербаков В.И. *О признаке Жордана или во что он переходит на обобщенных системах Хаара*, Матер. 12-ой международн. Казанской летней научной школы-конференции. Т. 51, 493–496 (Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2015).
[32] Щербаков В.И. *О признаке Жордана для обобщенных систем Хаара*, Современные методы теории функций и смежные проблемы. Матер. Международн. конференции “Воронежская Зимняя математическая школа, 28 января – 2 февраля”, 299–301 (ВГУ, Воронеж, 2019).

Виктор Иннокентьевич Щербаков

Московский технический университет связи и информатики,
ул. Народного Ополчения, д. 32, г. Москва, 123423, Россия,

e-mail: kafmathan@mail.ru

V.I. Shcherbakov

Jordan test for the Haar-type systems

Abstract. We consider Haar-type systems, which are generated by a (generally speaking, unbounded) sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, and which are defined on the modified segment $[0,1]^*$, i. e., on the segment $[0, 1]$ whose $\{p_n\}$-rational points are calculated two times. The main result of this work is a Jordan-type test for the pointwise and uniform convergence of Fourier series with respect to Haar-type systems. It is shown that the test obtained in the paper can not be improved. An example of a function of bounded variation, whose Fourier series with respect to Haar-type system diverges at some point, is constructed in the case of $\sup\limits_n p_n = \infty$. Thus for any unbounded sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ there exists a monotone function whose Fourier series with respect to Haar-type system, generated by the given sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, diverges at some point. It is found that the Jordan test of convergence of Fourier series with respect to Haar-type systems does not differ from the Dini–Lipschitz condition for those systems. As the Dini–Lipschitz condition was considered earlier, the main value of this work is the construction of a corresponding counterexample, i. e., the construction of an example (a model) of a function of bounded variation whose Fourier series with respect to Haar-type Systems diverges at some point. In the counterexamples from the earlier works on the Dini–Lipschitz criterion (as well as for all Dini convergence criteria), the functions were *not of bounded variation*. The article's conclusion discusses how the Jordan convergence criterion evolved when transitioning from trigonometric systems of functions to Price systems (and to N.Ya. Vilenkin systems), and from there to generalized Haar systems and Haar-type systems.

Keywords: abelian group, modified segment $[0; 1]$, continuity on the modified segment $[0; 1]$, system of characters, Price system, Haar-type system, Dirichlet kernel, Jordan test, variation of function.

Viktor Innokent'evich Shcherbakov

Moscow Technical University of Communication and Information,
32 Narodnogo Opolchenija str., Moscow, 123423 Russia,

`e-mail:` kafmathan@mail.ru