

М. ШАФИ, Н.А. РАТХЕР, С. ГУЛЗАР

О НЕРАВЕНСТВЕ ВИССЕРА

Аннотация. Получены некоторые новые оценки для коэффициентов многочлена, которые, среди прочего, представляют новые, но эквивалентные формы некоторых хорошо известных результатов В.К. Джайна и С. Гулзара.

Ключевые слова: многочлен, неравенство Виссера, неравенство на комплексной плоскости.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-51-60

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{F}_n$ — класс всех комплексных многочленов степени n . Для $f \in \mathbb{F}_n$ мера Малера определена формулой

$$\|f\|_0 := \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(e^{i\theta})| d\theta \right).$$

Она также известна как контурное геометрическое среднее или норма пространства Харди H^0 . Согласно формуле Йенсена [1] мера Малера многочлена $f(z) = a \prod_{u=1}^n (z - z_u)$ степени n равна

$$\|f\|_0 = |a| \prod_{u=1}^n \max \{1, |z_u|\}.$$

Заметим, что $\|\cdot\|_0$ не является нормой и даже полунормой (неравенство треугольника не выполняется даже в своей слабой форме).

Отметим, что $\|f\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0^+} \|f(z)\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ обозначает норму (полунорму при $0 < p < 1$) в пространстве Харди, задаваемую формулой

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Для $p = \infty$ обозначим

$$\|f\|_\infty := \max_{|z|=1} |f(z)|.$$

Для любых двух многочленов $g(z) = \sum_{u=0}^n A_u z^u$ и $h(z) = \sum_{u=0}^n B_u z^u$ степени n их композиция Шура–Сегё задается формулой

$$g * h = \sum_{u=0}^n \frac{A_u B_u}{\binom{n}{u}} z^u.$$

Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то по теореме Руше многочлен

$$f(z) + \lambda \|f\|_\infty = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + (c_0 + \lambda \|f\|_\infty)$$

не имеет нулей в единичном круге $|z| < 1$ при любом выборе $\lambda \in \mathbb{C}$ с условием $|\lambda| = 1$. Следовательно, $|c_0 + \lambda \|f\|_\infty| \geq |c_n|$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с условием $|\lambda| = 1$. Выбирая аргумент λ подходящим образом, получаем

$$|c_n| + |c_0| \leq \|f\|_\infty. \quad (1)$$

Неравенство (1) принадлежит К. Виссеру [2], и равенство в нем выполняется тогда и только тогда, когда $f(z) = c_0 + c_n z^n$. В качестве последних публикаций, касающихся неравенства Виссера, можно указать работы [3]–[6].

Используя некоторые интегральные неравенства для многочлена, В.К. Джайн [7] установил следующую новую, но эквивалентную форму неравенства Виссера (1).

Теорема 1. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то для произвольных комплексных чисел α и β выполняется неравенство

$$|\alpha| |c_n| + |\beta| |c_0| \leq \|f\|_\infty \{\max(|\alpha|, |\beta|)\}. \quad (2)$$

Равенство в (2) достигается для $f(z) = \|f\|_\infty z^n$, $|\beta| \leq |\alpha|$.

В той же работе [7] автор получил следующее уточнение неравенства (2) для класса многочленов, имеющих нули в $|z| < 1$.

Теорема 2. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то для комплексных чисел α и β таких, что $|\beta| \leq |\alpha|$, выполняется неравенство

$$|\alpha| |c_n| + |\beta| |c_0| \leq \|f\|_\infty \{(|\alpha| + |\beta|)/2\}. \quad (3)$$

Равенство в (3) достигается для $f(z) = \frac{\|f\|_\infty}{2}(a + bz^n)$ с условием $|a| = |b| = 1$.

В [8] получена L_p -версия неравенства (1) и доказана

Теорема 3. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_j z^j$, то для любого $0 \leq p < \infty$ выполняется неравенство

$$|c_0| + |c_n| \leq 2 \frac{\|f\|_p}{\|1 + z\|_p}. \quad (4)$$

В [3] также получены разнообразные результаты, касающиеся оценок коэффициентов и включающие в себя, среди прочего, неравенства (1) и (4), как частные случаи. А именно, доказана

Теорема 4. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то для любых $0 \leq p < \infty$ и $0 \leq s \leq n-1$ выполняется неравенство

$$|c_n| + \frac{|c_s|}{\binom{n}{s}} \leq 2 \frac{\|f\|_p}{\|1+z\|_p}. \quad (5)$$

В той же статье [3] автор улучшил неравенство (5) для класса многочленов, не имеющих нулей в $|z| < 1$, и доказал следующий результат.

Теорема 5. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то для любого $0 \leq p < \infty$ выполняется неравенство

$$|c_n| + \frac{|c_s|}{\binom{n}{s}} \leq 2\Delta_1 \frac{\|f\|_p}{\|1+z\|_p}, \quad (6)$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$ и

$$\Delta_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } s = 0; \\ \frac{1}{\|1+z\|_p}, & \text{если } 0 < s < n. \end{cases}$$

В данной работе мы представляем некоторые оценки для коэффициентов многочлена. Начинаем эту работу с демонстрации следующего увлекательного результата, который, среди прочего, предоставляет новые, но эквивалентные формы неравенств (1), (4) и (5). Более точно, доказываем следующий результат.

Теорема 6. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то для любого $0 \leq p < \infty$ и для любых комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β выполняется следующее неравенство:

$$\left\| \alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s \right\|_p \leq \{\max(|\alpha|, |\beta|)\} \|f\|_p, \quad (7)$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$.

Применяя лемму 5 к неравенству (7), получаем

Следствие 1. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то для любого $0 \leq p < \infty$ и для любых комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β выполняется следующее неравенство:

$$|\alpha| |c_n| + |\beta| \frac{|c_s|}{\binom{n}{s}} \leq \frac{2}{\|1+z\|_p} \{\max(|\alpha|, |\beta|)\} \|f\|_p, \quad (8)$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$.

Неравенство (8) является новой, но эквивалентной формой неравенства (5). Если взять $s = 0$ в (8), то получим следующую новую, но эквивалентную форму неравенства (4).

Следствие 2. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то для любого $0 \leq p < \infty$ и для любых комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β выполняется неравенство

$$|\alpha||c_n| + |\beta||c_0| \leq \frac{2}{\|1+z\|_p} \{\max(|\alpha|, |\beta|)\} \|f\|_p. \quad (9)$$

Если устремить $p \rightarrow \infty$ в (9), получим следующее неравенство В.К. Джайна [7], являющееся эквивалентной формой неравенства Виссера (1).

Следствие 3. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$, то для комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β выполняется неравенство

$$|\alpha||c_n| + |\beta||c_0| \leq \{\max(|\alpha|, |\beta|)\} \|f\|_\infty.$$

Теорема 6 может быть улучшена, если ограничиться классом многочленов, не имеющих нулей в $|z| < 1$. Докажем в этом направлении следующий результат.

Теорема 7. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то для любого $0 \leq p < \infty$ и для любых комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β таких, что $|\beta| \leq |\alpha|$, выполняется неравенство

$$\left\| \alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s \right\|_p \leq \Delta_2 \|f\|_p, \quad (10)$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$ и

$$\Delta_2 = \begin{cases} \frac{\|\bar{\alpha} + \beta z\|_p}{\|1+z\|_p}, & \text{если } s = 0; \\ \frac{|\alpha|}{\|1+z\|_p}, & \text{если } 0 < s < n. \end{cases} \quad (11)$$

Применяя лемму 5 к неравенству (10), получаем

Следствие 4. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то для любого $0 \leq p < \infty$ и любых комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β таких, что $|\beta| \leq |\alpha|$, выполняется неравенство

$$|\alpha||c_n| + |\beta| \frac{|c_s|}{\binom{n}{s}} \leq 2\Delta_2 \frac{\|f\|_p}{\|1+z\|_p}, \quad (12)$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$ и Δ_2 из (11).

При $\alpha = \beta = 1$ неравенство (12) сводится к (6). Если же взять $s = 0$ и устремить $p \rightarrow \infty$ в (12), то оно сводится к неравенству (3).

2. ЛЕММЫ

Для доказательства вышеупомянутых теорем нам понадобятся следующие утверждения. Сначала опишем результат В.В. Арестова [9].

Для $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ и $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u \in \mathbb{F}_n$ определим

$$C_\gamma f(z) = \sum_{u=0}^n \gamma_u c_u z^u.$$

Оператор C_γ называется допустимым, если он сохраняет одно из следующих свойств:

- (i) $f(z)$ имеет все свои нули в $|z| \leq 1$,
- (ii) $f(z)$ имеет все свои нули в $|z| \geq 1$.

Результат В.В. Арестова ([9], теорема 2) можно теперь представить в следующем виде.

Лемма 1. Пусть $\varphi(x) = \psi(\log x)$, где ψ является выпуклой неубывающей функцией на $\mathbb{R}$. Тогда для любой $f \in \mathbb{F}_n$ и любого допустимого оператора C_γ выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|C_\gamma f(e^{i\theta})|) d\theta \leq \int_0^{2\pi} \varphi(c(\gamma)|f(e^{i\theta})|) d\theta,$$

где $c(\gamma) = \max(|\gamma_0|, |\gamma_n|)$.

В частности, лемма 1 применима к $\varphi : x \mapsto x^p$ для любого $p \in (0, \infty)$ и $\varphi : x \mapsto \log x$. Следовательно, для $0 \leq p < \infty$ имеем

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |C_\gamma f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} \leq c(\gamma) \left\{ \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}.$$

Следующее утверждение снова принадлежит В.В. Арестову [10].

Лемма 2. Если g, h — любые два многочлена степени не выше n , то для $0 \leq p < \infty$ имеем

$$\|g * h(z)\|_p \leq \|g(z)\|_0 \|h(z)\|_p.$$

Лемма 3. Если $f \in \mathbb{F}_n$, $f(z) = \sum_{u=0}^n c_u z^u$ не имеет нулей в $|z| < 1$, то для комплексных чисел $\alpha \neq 0$ и β таких, что $|\beta| \leq |\alpha|$, вещественного ϕ и $p > 0$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \left| \left(\alpha c_n e^{in\theta} + \frac{\beta c_s}{\binom{n}{s}} e^{is\theta} \right) e^{i\phi} + \left(\frac{\beta c_{n-s}}{\binom{n}{s}} e^{i(n-s)\theta} + \alpha c_0 \right) \right|^p d\theta \leq \Delta^p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta,$$

где $s = 0, 1, \dots, n-1$ и

$$\Delta = \begin{cases} |\bar{\alpha} + \beta e^{i\phi}|, & \text{если } s = 0; \\ |\alpha|, & \text{если } 0 < s < n. \end{cases}$$

Доказательство. Для $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| \leq |\alpha|$, положим $\Lambda(z) = \alpha z^n + \beta z^s$ и $\Lambda^*(z) = z^n \overline{\Lambda(1/\bar{z})} = \bar{\beta} z^{n-s} + \bar{\alpha}$, тогда для любого вещественного числа ϕ все нули многочлена $\Lambda^\phi(z) = \Lambda(z)e^{i\phi} + \Lambda^*(z)$ лежат на окружности $|z| = 1$ (см. [11], ч. III, задача 26). Теперь по теореме

Шура–Сегё о композиции ([12], с. 161) все нули $\Lambda^\phi * f$ лежат вне $|z| < 1$, т. е. оператор

$$C_\gamma f(z) := \Lambda^\phi * f(z) = \Lambda * f(z) e^{i\phi} + \Lambda^* * f(z) = \left(\alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s \right) e^{i\phi} + \left(\bar{\beta} \frac{c_{n-s}}{\binom{n}{s}} z^{n-s} + \bar{\alpha} c_0 \right)$$

является допустимым. Применяя неравенство (12) из леммы 1, мы сразу получаем требуемый результат для любого $p > 0$. $\square$

Лемма 4. Пусть κ — комплексное число, не зависящее от вещественного числа θ . Тогда для любого $p > 0$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |\kappa + e^{i\theta}|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |1 + |\kappa| e^{i\theta}|^p d\theta.$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5 ([3]). Пусть $\kappa, \mu \in \mathbb{C}$, а n, s — положительные целые числа, $n > s$. Тогда для любого $p > 0$ имеем

$$\|\kappa z^n + \mu z^s\|_p \geq \frac{|\kappa| + |\mu|}{2} \|1 + z\|_p.$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим многочлен степени n

$$q(z) = \alpha z^n + \beta z^s \quad (0 \leq s < n) = \alpha z^s \left(z^{n-s} + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \alpha z^s \prod_{u=1}^{n-s} (z - z_u),$$

где z_u — корни степени $(n-s)$ из $-\frac{\beta}{\alpha}$. Тогда по формуле Йенсена [1] мера Малера многочлена

$$q(z) = \alpha z^s \prod_{u=1}^{n-s} (z - z_u) \text{ степени } n \text{ равна}$$

$$\|q\|_0 = |\alpha| \prod_{u=1}^{n-s} \max \left\{ 1, \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|^{1/(n-s)} \right\} = |\alpha| \max \left\{ 1, \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \right\} = \max \{ |\alpha|, |\beta| \}.$$

Применяя теперь лемму 2 к многочленам q и f , получаем

$$\left\| \alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s \right\|_p \leq \{ \max(|\alpha|, |\beta|) \} \|f\|_p,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Доказательство теоремы 7. Так как все нули многочлена $f(z)$ лежат в $|z| \geq 1$, то все нули $f^*(z) = z^n \overline{f(1/\bar{z})}$ лежат в $|z| \leq 1$ и $|f(z)| = |f^*(z)|$ для $|z| = 1$. Следовательно, $f^*(z)/f(z)$ является аналитической в $|z| \leq 1$. По принципу максимума модуля $|f^*(z)| \leq |f(z)|$ для $|z| \leq 1$, что эквивалентно $|f(z)| \leq |f^*(z)|$ для $|z| \geq 1$. Тогда по теореме Руше все нули многочлена

$$f(z) + \lambda f^*(z) = \sum_{u=0}^n (c_u + \lambda \bar{c}_{n-u}) z^u$$

лежат в $|z| \leq 1$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ со свойством $|\lambda| > 1$. Если $w_1, w_2, \dots, w_n$ — корни $f(z) + \lambda f^*(z)$, то $|w_u| \leq 1$, $u = 1, 2, \dots, n$, и по формуле Виета для $s = 0, 1, \dots, n-1$ имеем

$$(-1)^{n-s} \left(\frac{c_s + \lambda \bar{c}_{n-s}}{c_n + \lambda \bar{c}_0} \right) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-s} \leq n} w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_{n-s}},$$

откуда

$$\left| \frac{c_s + \lambda \bar{c}_{n-s}}{c_n + \lambda \bar{c}_0} \right| \leq \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-s} \leq n} |w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_{n-s}}| \leq \binom{n}{n-s} = \binom{n}{s}. \quad (13)$$

Теперь для чисел $0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ таких, что $|\beta| \leq |\alpha|$, имеем

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \left| \frac{c_s + \lambda \bar{c}_{n-s}}{c_n + \lambda \bar{c}_0} \right| \leq \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \binom{n}{s} \leq \binom{n}{s}.$$

Следовательно, все нули многочлена

$$H(z) = \alpha(c_n + \lambda \bar{c}_0)z^n + \beta \frac{(c_s + \lambda \bar{c}_{n-s})}{\binom{n}{s}} z^s = \alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s + \lambda \left(\alpha \bar{c}_0 z^n + \beta \frac{\bar{c}_{n-s}}{\binom{n}{s}} z^s \right)$$

лежат в $|z| \leq 1$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ со свойством $|\lambda| > 1$. Поэтому при $r > 1$ многочлен

$$H(rz) = \alpha c_n (rz)^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} (rz)^s + \lambda \left(\alpha \bar{c}_0 (rz)^n + \beta \frac{\bar{c}_{n-s}}{\binom{n}{s}} (rz)^s \right)$$

имеет все свои корни в $|z| < 1$. Отсюда следует

$$\left| \alpha c_n (rz)^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} (rz)^s \right| \leq \left| \alpha \bar{c}_0 (rz)^n + \beta \frac{\bar{c}_{n-s}}{\binom{n}{s}} (rz)^s \right| \quad (14)$$

для $|z| \geq 1$. Действительно, если неравенство (14) не выполняется, то существует точка z_0 со свойством $|z_0| \geq 1$ такая, что

$$\left| \alpha c_n (rz_0)^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} (rz_0)^s \right| > \left| \alpha \bar{c}_0 (rz_0)^n + \beta \frac{\bar{c}_{n-s}}{\binom{n}{s}} (rz_0)^s \right|.$$

Поскольку все нули $f^*(z)$ лежат в $|z| \leq 1$, то аналогичными рассуждениями, как и в (13), получаем $|\bar{c}_0| \geq |\bar{c}_{n-s}| / \binom{n}{s}$, откуда следует, что $\alpha \bar{c}_0 (rz_0)^n + \beta \bar{c}_{n-s} / \binom{n}{s} (rz_0)^s \neq 0$. Возьмем

$$\lambda = - \frac{\alpha c_n (rz_0)^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} (rz_0)^s}{\alpha \bar{c}_0 (rz_0)^n + \beta \frac{\bar{c}_{n-s}}{\binom{n}{s}} (rz_0)^s},$$

тогда λ является корректно заданным комплексным числом, причем $|\lambda| > 1$, и с таким выбором λ получаем $H(rz_0) = 0$, где $|z_0| \geq 1$. Это противоречит тому факту, что все нули $H(rz)$ лежат в $|z| < 1$. Таким образом, неравенство (14) выполнено. Полагая $r \rightarrow 1$ в (14) и используя непрерывность, в частности, для $|z| = 1$ получаем

$$\left| \alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s \right| \leq \left| \alpha \bar{c}_0 z^n + \beta \frac{\bar{c}_{n-s}}{\binom{n}{s}} z^s \right| = \left| \beta \frac{c_{n-s}}{\binom{n}{s}} z^{n-s} + \alpha c_0 \right|.$$

Эквивалентно для $0 \leq \theta < 2\pi$ можно записать

$$\left| \alpha c_n e^{in\theta} + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} e^{is\theta} \right| \leq \left| \beta \frac{c_{n-s}}{\binom{n}{s}} e^{i(n-s)\theta} + \alpha c_0 \right|. \quad (15)$$

Также по лемме 3 имеем

$$\int_0^{2\pi} |T(\theta) + e^{i\phi} R(\theta)|^p d\theta \leq \Delta^p \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta, \quad (16)$$

где $T(\theta) = \alpha c_n e^{in\theta} + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} e^{is\theta}$ и $R(\theta) = \beta \frac{c_{n-s}}{\binom{n}{s}} e^{i(n-s)\theta} + \alpha c_0$.

Интегрируя обе части (16) по ϕ от 0 до 2π , для каждого $p > 0$ получаем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |T(\theta) + e^{i\phi} R(\theta)|^p d\phi d\theta \leq \int_0^{2\pi} \Delta^p d\phi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta. \quad (17)$$

Теперь для $k \geq 1$ и $p > 0$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |k + e^{i\phi}|^p d\phi \geq \int_0^{2\pi} |1 + e^{i\phi}|^p d\phi.$$

Если $T(\theta) \neq 0$, возьмем $k = |R(\theta)|/|T(\theta)|$, тогда ввиду (15) получаем $k \geq 1$. Применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |T(\theta) + e^{i\phi} R(\theta)|^p d\phi &= |T(\theta)|^p \int_0^{2\pi} \left| 1 + e^{i\phi} \frac{R(\theta)}{T(\theta)} \right|^p d\phi = \\ &= |T(\theta)|^p \int_0^{2\pi} \left| e^{i\phi} + \left| \frac{R(\theta)}{T(\theta)} \right| \right|^p d\phi \geq |T(\theta)|^p \int_0^{2\pi} |1 + e^{i\phi}|^p d\phi. \end{aligned}$$

Для $T(\theta) = 0$ это неравенство очевидно выполняется. Используя этот факт в (17), мы заключаем, что

$$\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p d\theta \int_0^{2\pi} |1 + e^{i\phi}|^p d\phi \leq \int_0^{2\pi} \Delta^p d\phi \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta.$$

Отсюда

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \left| \alpha c_n e^{in\theta} + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} e^{is\theta} \right|^p d\theta \right\}^{1/p} \leq \frac{\left\{ \int_0^{2\pi} \Delta^p d\phi \right\}^{1/p} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}}{\left\{ \int_0^{2\pi} |1 + e^{i\phi}|^p d\phi \right\}^{1/p}},$$

что дает

$$\left\| \alpha c_n z^n + \beta \frac{c_s}{\binom{n}{s}} z^s \right\|_p \leq \Delta_2 \|f\|_p,$$

где Δ_2 из (11). □

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mahler K. *An application of Jensen's formula to polynomials*, J. Math. **7** (2), 98–100 (1960).
- [2] Visser C. *A simple proof of certain inequalities concerning polynomials*, Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. **47**, 276–281 (1945).
- [3] Gulzar S. *On estimates for the coefficients of a polynomial*, Comp. Rend. Math. **354** (4), 357–363 (2016).
- [4] Gulzar S., Rather N.A. *L_p inequalities for the Schur–Szegő composition of polynomials*, Acta Math. Hung. **151** (1), 124–138 (2017).
- [5] Gulzar S. *Some Zygmund type inequalities for the s -th derivative of polynomials*, Anal. Math. **42**, 339–352 (2016).
- [6] Гулзар С., Разер Н.А., Вани М.Ш. *О неравенстве Виссера, связанном с оценкой коэффициентов полиномов*, Изв. вузов. Матем. (3), 13–20 (2022).
- [7] Jain V.K. *Visser's inequality and its sharp refinement*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum. Tome **49** (97) (2), 171–175 (2006).
- [8] Rahman Q.I., Schmeisser G. *L_p inequalities for polynomial*, J. Approx. Theory **53**, 26–32 (1988).
- [9] Арестов В.В. *Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных*, Изв. АН СССР. Сер. Матем. **45** (1), 3–22 (1981).
- [10] Арестов В.В. *Интегральные неравенства для алгебраических многочленов на единичной окружности*, Матем. заметки **48** (4), 7–18 (1990).
- [11] Pólya G., Szegő G. *Problems and Theorem in Analysis I* (Springer-Verlag, Berlin, 1978).
- [12] Rahman Q.I., Schmeisser G. *Analytic Theory of Polynomials* (Oxford Univ. Press, New York, 2002).

Мохмад Шафи

Университет Кашмира,

Шринагар, 190006, Индия,

e-mail: wanishafi1933@gmail.com

Нисар Ахмад Ратхер

Университет Кашмира,

Шринагар, 190006, Индия,

e-mail: dr.narather@gmail.com

Сухаил Гулзар

Государственный инженерно-технологический колледж,

Гандербал, Кашмир, Индия,

e-mail: sgmattoo@gmail.com

M. Shafi, N.A. Rather, and S. Gulzar

A note on Visser's inequality

Abstract. Certain new estimates for the coefficients of a polynomial are obtained, which among other things furnishes new but equivalent forms of some well-known results of V.K. Jain and S. Gulzar.

Keywords: polynomial, Visser's inequality, inequality in the complex domain.

Mohmmad Shafi

*University of Kashmir,
Srinagar, 190006 India,*

e-mail: wanishafi1933@gmail.com

Nisar Ahmad Rather

*University of Kashmir,
Srinagar, 190006 India,*

e-mail: dr.narather@gmail.com

Suhail Gulzar

*Government College for Engineering and Technology,
Ganderbal, Kashmir, India,*

e-mail: sgmattoo@gmail.com