Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №11, с. 35–50 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

М.Г. МАГОМЕД-КАСУМОВ

СОБОЛЕВСКИЕ СИСТЕМЫ, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСОВОГО СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ С ДВУМЯ ДИСКРЕТНЫМИ ТОЧКАМИ, И РЯДЫ ФУРЬЕ ПО НИМ

Аннотация. Рассмотрены свойства систем функций Φ_1, ортогональных относительно весового дискретно-непрерывного скалярного произведения типа Соболева вида $\langle f, g\rangle_S = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int_a^b f'(t)g'(t)w(t)dt$. Исследован вопрос о замкнутости систем Φ_1 в пространстве Соболева $W^1_{L^2_w}$ и о связи этих систем с системами, ортогональными в весовых пространствах Лебега L^2_u. Изучены свойства рядов Фурье по системам Φ_1. В частности, получены условия равномерной сходимости рядов Фурье по системам Φ_1 к функциям из $W^1_{L^2_w}$.

Ключевые слова: дискретно-непрерывное скалярное произведение, скалярное произведение типа Соболева, ряд Фурье, равномерная сходимость, совпадение на концах отрезка, замкнутость соболевских систем.

УДК: 517.538

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-35-50

Введение

В данной работе исследуются свойства систем функций, ортогональных относительно дискретно-непрерывного соболевского скалярного произведения

$$\langle f, g\rangle_S = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int_a^b f'(t)g'(t)w(t)dt, \tag{1}$$

и рядов Фурье по ним. Результаты этой работы являются обобщением и развитием результатов, полученных в [1] при $w(t) = 1$.

В довольно общем виде скалярные произведения типа Соболева задаются выражением

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{R}} f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)d\mu_k,$$

где $d\mu_k$ — меры Бореля. В зависимости от выбора мер принято рассматривать следующие типы соболевских скалярных произведений [2]:

- непрерывные (все меры μ_k, $k \geq 0$, абсолютно непрерывны),
- дискретные (μ_0 абсолютна непрерывна, а μ_k, $k \geq 1$, дискретны),
- дискретно-непрерывные (μ_m абсолютна непрерывна, а μ_k, $k < m$, дискретны).

Поступила в редакцию 17.12.2023, после доработки 27.02.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Исследованиям скалярных произведений типа Соболева посвящено большое количество работ (см., например, [3]). Тем не менее все еще недостаточно изученными остаются вопросы, связанные со свойствами рядов Фурье по соболевским системам. Это отчасти объясняется тем, что каждый тип скалярного произведения требует разработки отдельных методов и подходов для исследования соответствующих рядов Фурье. Отметим некоторые работы, в которых изучаются ряды Фурье: [4]–[8] (непрерывный тип), [9]–[14] (дискретный тип), [2], [15]–[20] (дискретно-непрерывный тип).

В [15], [16] было показано, что частичные суммы $S_{1,1+n}(f)$ рядов Фурье по системам функций, ортогональным относительно скалярного произведения

$$\langle f,g\rangle = f(a)g(a) + \int_a^b f'(t)g'(t)w(t)dt,$$

обладают свойством $S_{1,1+n}(f,a) = f(a)$, $n \geq 0$, т. е. частичная сумма любого порядка совпадает с приближаемой функцией в начальной точке. Это свойство оказалось востребованным, в частности, при численном решении спектральными методами задачи Коши для дифференциального уравнения [21], [22]. Естественным развитием исследований в этом направлении является поиск и изучение такого вида скалярного произведения и ортогональных систем, при котором частичные суммы совпадали бы уже на обоих концах рассматриваемого отрезка. Соответствующие ряды Фурье могут найти применение, например, при решении двухточечных краевых задач. Как было показано в [1], таким скалярным произведением является произведение вида (1). В упомянутой работе исследовался случай $w(t) = 1$. Оказалось, что при добавлении веса свойство совпадения на концах частичных сумм, вообще говоря, утрачивается. Поэтому одной из задач работы является поиск условий на вес и ортогональную систему, которые бы обеспечили наличие указанного свойства. Интересным явился тот факт, что именно это условие оказалось необходимым и для замкнутости ортогональной системы.

Обозначим через $W^1_{L^2_w} = W^1_{L^2_w}[a,b]$ пространство Соболева, состоящее из абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций f таких, что $f' \in L^2_w[a,b]$, где $L^2_w = L^2_w[a,b]$ — пространство Лебега с весовой (измеримой неотрицательной, почти всюду положительной) функцией w:

$$L^2_w[a,b] = \left\{ f : \int_a^b |f(t)|^2 w(t)dt < \infty \right\}, \quad \langle f,g\rangle_{L^2_w} = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt.$$

Пусть в пространстве $W^1_{L^2_w}$ задано скалярное произведение (1) и соответствующая норма $\|f\|_{W^1_{L^2_w}} = \langle f,f\rangle_S^{\frac{1}{2}}$. В разделе 1 мы рассмотрим общие свойства систем $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$, ортонормированных относительно (1), одна из функций которых является константой (в рамках данной работы без потери общности можно считать константой функцию $\varphi_{1,0}(t)$). Без требования, связанного с константой, получение содержательных результатов значительно усложняется. С другой стороны, это требование является довольно естественным, поскольку известные ортогональные системы, как правило, удовлетворяют ему. В этом разделе мы исследуем условия общего характера, при которых Φ_1 и система Φ, полученная дифференцированием функций из Φ_1, одновременно ортогональны в $W^1_{L^2_w}$ и L^2_w соответственно. Возникающее при этом условие на Φ подробно рассматривается в разделе 2. В разделе 3 предлагаются методы построения системы функций, ортогональной в $W^1_{L^2_u}$, посредством системы функций, ортогональной в L^2_w. В разделе 4 вводится ряд Фурье по системе Φ_1 и исследуются его свойства. В частности, приводятся условия, при которых частичные суммы этих рядов совпадают с функцией на обоих концах отрезка ортогональности. В разделах 5, 6 исследованы вопросы замкнутости соболевских систем Φ_1 и равномерной сходимости рядов Фурье по ним. В разделе 7 приведены примеры систем функций, ортогональных относительно (1).

1. Некоторые общие свойства систем Φ_1

Пусть $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}_{k=0}^{\infty} \subset W^1_{L^2_w}$ — некоторая система функций, причем $\varphi_{1,0} \equiv \mathrm{const}$. Прежде всего, приведем легко получаемые из соотношения ортогональности, но не совсем очевидные, свойства этих систем.

Предложение 1. *Если $\varphi_{1,0}(t) \equiv \mathrm{const}$, то Φ_1 будет ортогональной системой тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_{1,k}(a) + \varphi_{1,k}(b) = 0, \quad k \geq 1, \tag{2}$$

$$2\varphi_{1,k}(a)\varphi_{1,n}(a) + \int_a^b \varphi'_{1,k}(t)\varphi'_{1,n}(t)w(t)dt = 0, \quad k,\, n \geq 1, \quad k \neq n. \tag{3}$$

Доказательство. Равенство (2) равносильно ортогональности функций $\varphi_{1,0} \equiv c$ и $\varphi_{1,k}$:

$$0 = \langle \varphi_{1,0}, \varphi_{1,k} \rangle_S = c(\varphi_{1,k}(a) + \varphi_{1,k}(b)), \quad k \geq 1.$$

По определению ортогональность функций $\varphi_{1,k}$, $\varphi_{1,n}$, $k, n \geq 1$, дает

$$0 = \langle \varphi_{1,k}, \varphi_{1,n} \rangle_S = \varphi_{1,k}(a)\varphi_{1,n}(a) + \varphi_{1,k}(b)\varphi_{1,n}(b) + \int_a^b \varphi'_{1,k}(t)\varphi'_{1,n}(t)w(t)dt.$$

Отсюда после применения (2) получается равенство (3). ☐

Далее мы всегда без упоминания будем считать, что $\varphi_{1,0} \equiv \mathrm{const}$.

Предложение 2. *Обозначим через Φ систему функций $\{\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)\}_{k=0}^{\infty}$. Тогда выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего*:

1) *система функций Φ ортогональна в L^2_w;*
2) *система функций Φ_1 ортогональна относительно* (1);
3) *функции $\varphi_{1,k}$, $k \geq 1$, удовлетворяют условиям*

$$\varphi_{1,1}(a) + \varphi_{1,1}(b) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_{1,k}(a) = \varphi_{1,k}(b) = 0, \quad k \geq 2. \tag{5}$$

Доказательство. 1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow$ 3). Так как $\varphi_k = \varphi'_{1,k+1}$ образуют ортогональную систему в $L^2_w[a,b]$, то из соотношения (3) следует, что $\varphi_{1,k}(a) = 0$ для всех k за исключением, быть может, одного (без потери общности можно считать, что равенство нулю может не соблюдаться для $k = 1$). Но тогда требуемые равенства вытекают из (2).

1) $\wedge$ 3) $\Rightarrow$ 2). Из ортогональности Φ и равенств (4), (5) следует справедливость соотношений (2), (3). Следовательно, в силу предложения 1 система Φ_1 является ортогональной.

2) $\wedge$ 3) $\Rightarrow$ 1). При $k, n \geq 1$, $k \neq n$, хотя бы одно из чисел k, n будет больше единицы, поэтому из (3) с учетом (5) выводим

$$\int_a^b \varphi'_{1,k}(t)\varphi'_{1,n}(t)w(t)dt = 0, \quad k,\, n \geq 1, \quad k \neq n,$$

что и означает ортогональность Φ в L^2_w. ☐

Предложение 3. *Пусть $\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)$, $k \geq 0$. Тогда выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего:*

1) *функция* $\varphi_k(x)$ *нормирована в* $L^2_w[a,b]$;
2) *функция* $\varphi_{1,k+1}(x)$ *нормирована относительно* (1);
3) *на концах отрезка функция* $\varphi_{1,k+1}(x)$ *обращается в нуль*:

$$\varphi_{1,k+1}(a) = \varphi_{1,k+1}(b) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из равенства

$$\langle \varphi_{1,k+1}, \varphi_{1,k+1}\rangle_S = \varphi^2_{1,k+1}(a) + \varphi^2_{1,k+1}(b) + \langle \varphi_k, \varphi_k\rangle_{L^2_w}.$$

□

Лемма 1. *Пусть* $\varphi_k(x) = \varphi'_{1,k+1}(x)$, $k \geq 0$. *Условие* (6) *эквивалентно соотношениям*

$$\varphi_{1,k+1}(x) = \int_a^x \varphi_k(t)dt, \quad \int_a^b \varphi_k(t)dt = 0.$$

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно, а необходимость вытекает из равенства $\varphi_{1,k+1}(x) = A_k + \int_a^x \varphi_k(t)dt$, имеющего место в силу абсолютной непрерывности функции $\varphi_{1,k+1}(x)$. □

Определение. Символом $\mathcal{I}_n(w)$ будем обозначать множество систем функций $\Psi = \{\psi_k\}_{k=0}^\infty$, удовлетворяющих условию $\int_a^b \psi_k(t)w(t)dt = 0, k \geq n$. Если $w(x) = \mathrm{const}$, то будем опускать скобки и писать $\mathcal{I}_n$.

Из леммы 1 и предложений 2, 3 вытекает, что системы функций Φ_1 и Φ будут одновременно ортогональны (ортонормированы) относительно соответствующих скалярных произведений тогда и только тогда, когда $\Phi \in \mathcal{I}_1$ ($\mathcal{I}_0$).

2. Системы функций, удовлетворяющие условию $\mathcal{I}_{k_0}$

2.1. **Полиномиальные системы.** Условие, определяющее множество $\mathcal{I}_1$, является естественным для систем, ортогональных с единичным весом. Например, для системы полиномов, ортогональной с единичным весом, это условие, очевидно, выполнено. В случае нетривиальных весов ситуация меняется. В частности, системы полиномов, ортогональные относительно нетривиальных весов, не попадают в $\mathcal{I}_1$. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^\infty$ — *ортонормированная система полиномов* φ_k *степени* k *в* L^2_w, *где* $w(x)$ — *суммируемая весовая функция. Если* $\Phi \in \mathcal{I}_1$, *то* Φ *будет также ортогональна относительно единичного веса.*

Доказательство. Пусть $k > n$. Поскольку $\psi(x) = \varphi_k(x)x^n$ представляет собой полином степени $k+n$, то его можно единственным образом представить в виде ([23], с. 16)

$$\psi(x) = \sum_{j=0}^{k+n} c_j\varphi_j(x),$$

где $c_j = \int_a^b \psi(t)\varphi_j(t)w(t)dt$ ввиду ортонормированности Φ. Тогда отсюда, учитывая, что $\Phi \in \mathcal{I}_1$, имеем

$$\int_a^b \psi(x)dx = \sum_{j=0}^{k+n} c_j \int_a^b \varphi_j(x)dx = c_0\int_a^b \varphi_0(x)dx = \int_a^b \psi(t)\varphi_0(t)w(t)dt\int_a^b \varphi_0(x)dx.$$

Так как $\varphi_0(x)$ — константа, то ее можно вынести из-под знаков интеграла:

$$\int_a^b \psi(x)dx = (b-a)\varphi_0^2(x)\int_a^b \psi(t)w(t)dt = (b-a)\varphi_0^2(x)\int_a^b \varphi_k(x)x^n w(t)dt.$$

В силу первого критерия ортогональности ([23], с. 20) последний интеграл будет равен нулю. Следовательно,

$$\int_a^b \varphi_k(x)x^n dx = 0, \quad k > n.$$

Тогда в силу этого же критерия ортогональности полиномы $\varphi_k(x)$ будут образовывать ортогональную систему с единичным весом. $\square$

Одна и та же система полиномов не может быть ортогональна одновременно относительно двух различных весов ([24], с. 434, сноска). Поэтому из приведенной выше леммы следует, что система полиномов, ортогональная относительно нетривиального веса, не может принадлежать $\mathcal{I}_1$. Если условие в $\mathcal{I}_1$ ослабить, то существование соответствующих систем полиномов доказано в следующем утверждении.

Лемма 3. *Система полиномов, ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $w(x)$*, принадлежит множеству* $\mathcal{I}_{m+1}\setminus\mathcal{I}_m$*,* $m\ge 0$*, тогда и только тогда, когда* $w(x)=\dfrac{1}{P_m(x)}$ *почти всюду на* $[a,b]$*, где* $P_m(x)$ *— полином степени* m*, не имеющий нулей на* $[a,b]$.

Доказательство. Достаточность. Очевидно, что в силу первого критерия ортогональности $\Phi\in\mathcal{I}_{m+1}$. Далее, $\Phi\notin\mathcal{I}_m$, поскольку

$$\int_a^b \varphi_m(x)dx = \int_a^b \varphi_m(x)P_m(x)w(x)dx = c_m(P_m),$$

где $c_m(P_m)\ne 0$ как старший коэффициент Фурье в разложении полинома P_m степени m по полиномам φ_i: $P_m(x)=\sum\limits_{i=0}^{m} c_i(P_m)\varphi_i(x)$.

Необходимость. Обозначим через $\Phi=\{\varphi_k\}$ систему полиномов φ_k степени k, ортонормированных на $[a,b]$ с весом $w(x)$. Пусть $P_m(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}\int_a^b \varphi_j(t)dt\,\varphi_j(x)$. Поскольку $\Phi\notin\mathcal{I}_m$, то степень полинома P_m равна m. Легко видеть, что в силу ортонормированности Φ и принадлежности Φ множеству $\mathcal{I}_{m+1}$ справедливо равенство

$$\int_a^b \varphi_i(x)P_m(x)w(x)dx = \int_a^b \varphi_i(x)dx, \quad i\ge 0,$$

которое можно переписать в виде

$$\int_a^b \varphi_i(x)\Big(P_m(x)w(x)-1\Big)dx = 0, \quad i\ge 0.$$

Так как $P_m(x)w(x)-1$ является суммируемой функцией, то в силу ([24], с. 433, теорема) $P_m(x)w(x)-1=0$. Но тогда $w(x)=\dfrac{1}{P_m(x)}$, и поскольку $w(x)$ является суммируемой на $[a,b]$, то полином P_m не может иметь нулей на этом отрезке. $\square$

2.2. **Произвольные системы функций.** Если вес $w(x)$ не является константой, то, как было отмечено выше, ортонормированная с данным весом система полиномов $\Phi \notin \mathcal{I}_1$. Однако, как это будет следовать из леммы 4, в $\mathcal{I}_1$ существуют неполиномиальные системы, ортонормированные относительно $w(x)$. Далее мы будем называть систему функций замкнутой в некотором пространстве, если линейное замыкание этой системы совпадает с этим пространством. Систему функций $\Phi = \{\varphi_k\}$ будем называть полной в евклидовом пространстве X, если из $\langle f, \varphi_k\rangle_X = 0$, $k \geq 0$, вытекает $f = 0$. Напомним, что эти два понятия эквиваленты в полных сепарабельных пространствах ([25], с. 154).

Лемма 4. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}$, $w\Phi = \{w(x)\varphi_k(x)\}$, w — почти всюду конечная весовая функция. Тогда*

1) *условие $\Phi \in \mathcal{I}_{k_0}(w)$ равносильно условию $w\Phi \in \mathcal{I}_{k_0}$;*
2) *ортонормированность Φ в L^2_w эквивалентна ортонормированности $w\Phi$ в $L^2_{1/w}$;*
3) *Φ замкнута в L^2_w тогда и только тогда, когда $w\Phi$ замкнута в $L^2_{1/w}$.*

Доказательство. Первые два пункта очевидны. Некоторых комментариев требует лишь п. 3). Пространства $L^2_{1/w}$ и L^2_w являются полными и сепарабельными (даже если вес не суммируем). Поэтому замкнутость можно доказывать через полноту.

Пусть $w\Phi$ полна в $L^2_{1/w}$. Покажем полноту Φ в L^2_w. Нетрудно проверить, что $\langle f, \varphi_k\rangle_{L^2_w} = \langle wf, w\varphi_k\rangle_{L^2_{1/w}}$. Отсюда из равенства нулю для всех k выражения слева ввиду полноты $w\Phi$ вытекает равенство $w(x)f(x) = 0$. Поскольку $w(x)$ почти всюду положительна, то $f(x) = 0$ почти всюду, что и означает полноту Φ. Обратное утверждение доказывается аналогично. $\square$

Лемма 5. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная в L^2_w система, где w — весовая функция на $[a, b]$, причем $0 < \displaystyle\int_a^b \frac{dt}{w(t)} < \infty$. Тогда*

1) $\Phi \notin \mathcal{I}_0$;
2) *для выполнения условия $\Phi \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$ необходимо и достаточно, чтобы*
$$\varphi_0(x) = \frac{\pm 1}{w(x)\left(\displaystyle\int \frac{1}{w}\right)^{1/2}}$$
почти всюду.

Доказательство. Из $\dfrac{1}{w} \in L^1$ вытекает $\dfrac{1}{w} \in L^2_w$. Если бы $\Phi \in \mathcal{I}_0$, то в силу полноты этой системы в L^2_w мы должны были иметь равенство $\dfrac{1}{w(x)} = 0$, что противоречит условию теоремы, тем самым п. 1) доказан. Перейдем к доказательству п. 2).
Необходимость. Так как $\dfrac{1}{w} \in L^2_w$, то в силу полноты системы
$$\frac{1}{w(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(1/w)\varphi_k(x), \quad c_k(1/w) = \int_a^b \varphi_k(x)dx.$$
Из $\Phi \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$ следует, что $c_k(1/w) = 0$, $k > 0$. Поэтому
$$\frac{1}{w(x)} = c_0(1/w)\varphi_0(x) = \varphi_0(x)\int_a^b \varphi_0(x)dx.$$

Остается обратить внимание на то, что интегрирование обеих частей этого соотношения приводит к равенству

$$\int_a^b \varphi_0(x)dx = \pm\left(\int_a^b \frac{1}{w(x)}dx\right)^{1/2}.$$

Достаточность. По условию $\int_a^b \varphi_0(x)dx = \pm\left(\int_a^b \frac{1}{w(x)}dx\right)^{1/2} \neq 0$. Тогда

$$\int_a^b \varphi_k(x)dx = \int_a^b \varphi_k(x)\frac{1}{w(x)}w(x)dx =$$
$$= \pm\left(\int_a^b \frac{1}{w(x)}dx\right)^{1/2}\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_0(x)w(x)dx = \pm\left(\int_a^b \frac{1}{w(x)}dx\right)^{1/2}\delta_{k,0}.$$

□

3. Соболевские системы

Для системы функций $\Phi = \{\varphi_k\} \subset L^2_w \cap L^1$ определим систему $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$ с помощью формул

$$\varphi_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7}$$

$$\varphi_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\left(-\frac{1}{2}J_0 + \int_a^x \varphi_0(t)dt\right), \quad J_0 = \int_a^b \varphi_0(t)dt, \tag{8}$$

$$\varphi_{1,k}(x) = \int_a^x \varphi_{k-1}(t)dt, \quad k \geq 2. \tag{9}$$

Следующее утверждение показывает связь между системами, ортонормированными относительно (1), и системами, ортонормированными в L^2_w и принадлежащими $\mathcal{I}_1$.

Предложение 4. *Выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего*:

1) $\Phi \in \mathcal{I}_1$;
2) Φ *ортонормирована в* L^2_w;
3) Φ_1 *ортонормирована в* $W^1_{L^2_w}$.

Доказательство. Заметим, что функции систем Φ и Φ_1 связаны соотношениями $C\varphi_0 = \varphi'_{1,1}$ и $\varphi_k = \varphi'_{1,k+1}$, $k \geq 1$.

Пусть выполнено 1). Покажем, что 2) $\Leftrightarrow$ 3). Из равенства (8) и условия $\Phi \in \mathcal{I}_1$ следует, что для функций $\varphi_{1,k}$ справедливы соотношения (4) и (5). Поэтому в силу предложения 2 ортогональность системы Φ равносильна ортогональности Φ_1. Для функций $\varphi_{1,k}$, $k \geq 2$, выполнено условие (6). Поэтому из предложения 3 следует, что нормированность функций $\varphi_{1,k}$, $k \geq 2$, равносильна нормированности функций $\varphi_k(x)$, $k \geq 1$. Далее, из (1) и (8) имеем

$$\langle\varphi_{1,1},\varphi_{1,1}\rangle_S = \left(-\frac{J_0}{2\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\right)^2 + \left(\frac{J_0}{2\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\right)^2 + \int_a^b \frac{\varphi_0^2(x)}{1+\frac{1}{2}J_0^2}dx = \frac{J_0^2 + 2\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle_{L^2}}{J_0^2+2}.$$

Отсюда видно, что нормированность φ_0 эквивалентна нормированности $\varphi_{1,1}$. Нормированность функции $\varphi_{1,0}$ проверяется непосредственно с помощью определения (1):

$$\langle \varphi_{1,0}, \varphi_{1,0} \rangle_S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Случай 2) $\wedge$ 3) $\Rightarrow$ 1) сразу вытекает из (5). □

Для систем функций, ортогональных в L^2_w, более естественным является условие принадлежности к $\mathcal{I}_1(w)$.

Следствие 1. Выполнение любых двух из следующих условий влечет выполнение и третьего:

1) $\Phi = \{\varphi_k\} \in \mathcal{I}_1(w)$;
2) $\Phi = \{\varphi_k\}$ ортонормирована в L^2_w;
3) $\Phi^w_1 = \{\varphi^w_{1,k}\}$ ортонормирована в $W^1_{L^2_u}$, $u(x) = \dfrac{1}{w(x)}$, где

$$\varphi^w_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\varphi^w_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\left(-\frac{1}{2}J_0 + \int_a^x \varphi_0(t)w(t)dt\right), \quad J_0 = \int_a^b \varphi_0(t)w(t)dt,$$
$$\varphi^w_{1,k+1}(x) = \int_a^x \varphi_k(t)w(t)dt, \quad k \geq 1.$$

Доказательство. Ясно, что $\Psi = \{\psi_k(x) = \varphi_k(x)w(x)\} \in \mathcal{I}_1$. Остальное вытекает из леммы 4 и предложения 4. □

В приведенных выше утверждениях рассматриваются системы $\Phi \in \mathcal{I}_1$. Более общий случай рассмотрен в следующем утверждении.

Предложение 5. *Пусть $\Phi = \{\varphi_k\} \in \mathcal{I}_m$ — ортонормированная в L^2_w система функций. Тогда система $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$, в которой $\varphi_{1,k}$, $0 \leq k \leq m$, получены ортогонализацией системы функций*

$$1, \int_a^x \varphi_k(t)dt, \quad 0 \leq k \leq m-1, \tag{10}$$

а

$$\varphi_{1,k}(x) = \int_a^x \varphi_{k-1}(t)dt, \quad k \geq m+1, \tag{11}$$

будет ортонормированной в $W^1_{L^2_w}$.

Доказательство. В первую очередь отметим, что функции (10) линейно независимы. Действительно, из равенства

$$\alpha_{-1} + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_a^x \varphi_k(t)dt \equiv 0$$

при $x = 0$ вытекает, что $\alpha_{-1} = 0$. Далее, дифференцируя обе части этого тождества, почти всюду получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \varphi_k(x) = 0,$$

откуда в силу ортогональности $\varphi_k(x)$ следует равенство нулю α_k, $0 \le k \le m-1$, что и означает линейную независимость функций (10).

Покажем ортонормированность системы Φ_1. Поскольку $\varphi_{1,k}$, $0 \le k \le m$, получены ортогонализацией системы функций (10), то их можно представить в виде

$$\varphi_{1,k}(x) = a_{0,k} + \sum_{j=1}^{k} a_{j,k} \int_a^x \varphi_{j-1}(t)dt, \quad 0 \le k \le m.$$

Тогда для $0 \le k \le m$ и $n \ge m+1$ имеем

$$\langle \varphi_{1,k}, \varphi_{1,n} \rangle_S = \langle \varphi'_{1,k}, \varphi_{n-1} \rangle_{L^2_w} = \sum_{j=1}^{k} a_{j,k} \langle \varphi_{j-1}, \varphi_{n-1} \rangle_{L^2_w} = 0.$$

Следовательно, функции из (10) ортогональны к функциям из (11). Ортонормированность (10) следует из построения, а ортонормированность (11) показывается так же, как в доказательстве предложений 2, 3. □

4. Ряд Фурье

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\} \in \mathcal{I}_1$ — ортонормированная в L^2_w система функций, а $\Phi_1 = \{\varphi_{1,k}\}$ — система, порожденная формулами (7)–(9). Из предложения 4 следует, что Φ_1 будет ортонормирована относительно (1). Рассмотрим ряд Фурье функции $f \in W^1_{L^2_w}$ по системе Φ_1:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_{1,k}(f) \varphi_{1,k}(x), \quad c_{1,k}(f) = \langle f, \varphi_{1,k} \rangle_S. \tag{12}$$

Из определения функций $\varphi_{1,k}$ и свойства (2) следует

$$c_{1,0}(f) = \frac{f(a)+f(b)}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,k}(f) = c_{k-1}(f'), k \ge 2, \tag{13}$$

$$c_{1,1}(f) = \big(f(a)-f(b)\big)\varphi_{1,1}(a) + \frac{c_0(f')}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}, \tag{14}$$

где $c_k(f') = \langle f', \varphi_k \rangle_{L^2_w}$ — коэффициенты Фурье функции f' по системе Φ. Частичные суммы ряда (12) будем обозначать символом $S_{1,n}$:

$$S_{1,n}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} c_{1,k}(f) \varphi_{1,k}(x).$$

Как было показано в работе [1], в случае $w(x) = 1$ частичные суммы соответствующих рядов Фурье обладают следующими замечательными свойствами:

1) совпадение на концах с приближаемой функцией

$$S_{1,n}(f,a) = f(a), \quad S_{1,n}(f,b) = f(b), \quad n \ge 1; \tag{15}$$

2) дифференциальное свойство

$$S'_{1,n}(f,x) = S_{n-1}(f',x). \tag{16}$$

Если $w(x)$ не является константой, то эти условия уже могут не иметь места. Однако они выполняются, если выполнено условие

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \varphi_0(t)dt \int_a^b f'(t)\varphi_0(t)w(t)dt. \tag{17}$$

Более точно, справедлива

Теорема 1. *Пусть* $\Phi \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$ *ортонормирована в* L^2_w, Φ_1 *определена формулами* (7)–(9). *Тогда для функции* $f \in W^1_{L^2_w}$ *условия* (15)–(17) *эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку $\varphi_{1,k}(a) = \varphi_{1,k}(b) = 0$, $k \geq 2$ (см. (9) и условие принадлежности к $\mathcal{I}_1$), то при $x = a$ и $x = b$

$$S_{1,n}(f,x) = c_{1,0}(f)\varphi_{1,0}(x) + c_{1,1}(f)\varphi_{1,1}(x), \quad n \geq 1. \tag{18}$$

Используя выражения для коэффициентов (13), (14), формулы (7)–(9) и свойство (2), нетрудно показать, что

$$c_{1,0}(f)\varphi_{1,0}(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}, \tag{19}$$

$$c_{1,1}(f)\varphi_{1,1}(a) = -\frac{J_0}{2+J_0^2}\left[J_0\frac{f(b)-f(a)}{2} + \int_a^b f'(t)\varphi_0(t)w(t)dt\right], \tag{20}$$

$$c_{1,1}(f)\varphi_{1,1}(b) = -c_{1,1}(f)\varphi_{1,1}(a). \tag{21}$$

Из (18)–(21) вытекает следующее замечательное свойство:

$$S_{1,n}(f,a) + S_{1,n}(f,b) = f(a) + f(b), \quad n \geq 0.$$

Отсюда следует, что $S_{1,n}(f,a) = f(a)$ тогда и только тогда, когда $S_{1,n}(f,b) = f(b)$. Поэтому в доказательстве достаточно ограничиться только одним из равенств в (15).

Путем несложных преобразований, используя (18)–(20), можно показать, что равенство $S_{1,n}(f,a) = f(a)$ равносильно следующему соотношению:

$$\frac{f(b)-f(a)}{2} - \frac{J_0^2}{2+J_0^2}\frac{f(b)-f(a)}{2} = \frac{J_0}{2+J_0^2}\int_a^b f'(t)\varphi_0(t)w(t)dt.$$

Умножая обе части этого равенства на $2+J_0^2$ и вынося в левой части $f(b)-f(a)$ за скобки, приходим к (17). Таким образом, условия (15) и (17) эквивалентны.

Покажем теперь равносильность условий (17) и (16). Для этого заметим, что в силу (7), (9), (13)

$$S'_{1,n}(f,x) = c_{1,1}(f)\varphi'_{1,1}(x) + \sum_{k=2}^{n} c_{k-1}(f')\varphi_{k-1}(x). \tag{22}$$

Из (8), (14) следует

$$c_{1,1}(f)\varphi'_{1,1}(x) = \frac{2}{2+J_0^2}\left[\frac{J_0}{2}(f(b)-f(a)) + c_0(f')\right]\varphi_0(x).$$

Отсюда и из (22) видно, что равенство (16) эквивалентно соотношению

$$\frac{2}{2+J_0^2}\left[\frac{J_0}{2}(f(b)-f(a)) + c_0(f')\right]\varphi_0(x) = c_0(f')\varphi_0(x),$$

которое элементарными преобразованиями приводится к виду

$$\frac{J_0}{2+J_0^2}\left[f(b)-f(a)-J_0c_0(f')\right] = 0.$$

Поскольку $J_0 \neq 0$, данное равенство равносильно (17). □

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что если $\Phi \in \mathcal{I}_0$, то

1) условия (15), (17) все еще остаются эквивалентными;

2) условие (16) выполнено всегда, но из него не вытекает (17), которое в этом случае принимает вид $f(a) = f(b)$.

5. Замкнутость

Рассмотрим вопрос о замкнутости соболевских систем вида (7)–(9).

Теорема 2. *Пусть $\Phi \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$ ортонормирована в L^2_w, Φ_1 определена формулами* (7)–(9). *Тогда для замкнутости Φ_1 в $W^1_{L^2_w}$ необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий*:

1) *система функций Φ замкнута в L^2_w*;
2) *для любой функции $f \in W^1_{L^2_w}$ выполнено условие* (17).

Доказательство. В силу предложения 4 система Φ_1 ортонормирована в $W^1_{L^2_w}$. Пусть f — произвольная функция из $W^1_{L^2_w}$. По определению нормы имеем

$$\|S_{1,n}(f) - f\|^2_{W^1_{L^2_w}} = (S_{1,n}(f,a) - f(a))^2 + (S_{1,n}(f,b) - f(b))^2 + \|S'_{1,n}(f) - f'\|^2_{L^2_w}. \tag{23}$$

Из замкнутости Φ_1 вытекает, что левая часть приведенного равенства стремится к нулю с ростом n. Значит, к нулю стремится и каждое слагаемое правой части. Но $S_{1,n}(f,x) = S_{1,1}(f,x)$, $x \in \{a,b\}$, $n \geq 1$ (см. (18)). Поэтому первые два слагаемых равны нулю, т. е. имеет место (15). Тогда в силу теоремы 1 для f будет выполнено равенство (17), откуда в силу произвольности f вытекает условие 2. Из теоремы 1 вытекает также равенство (16), поэтому с учетом вышесказанного из (23) получаем

$$\|S_{n-1}(f') - f'\|^2_{L^2_w} \to 0, \quad n \to \infty,$$

что и означает справедливость 1).

Таким образом, *необходимость* доказана.
Достаточность устанавливается аналогичным образом с помощью равенства (23) и теоремы 1. □

Из данной теоремы и предложения 5 получаем

Следствие 2. Пусть $\Phi \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$ ортонормирована в L^2_w, Φ_1 определена формулами (7)–(9). Если $\dfrac{1}{w(x)} \in L^1$, то замкнутость Φ в L^2_w эквивалентна замкнутости Φ_1 в $W^1_{L^2_w}$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2. Докажем *необходимость*. Заметим, что согласно предложению 5

$$\varphi_0(x) = \frac{\pm 1}{w(x)\left(\displaystyle\int \frac{1}{w}\right)^{1/2}}.$$

Тогда для $f \in W^1_{L^2_w}$ имеем

$$\int_a^b \varphi_0(t)dt \int_a^b f'(t)\varphi_0(t)w(t)dt = \int_a^b \frac{dt}{w(t)\left(\displaystyle\int \frac{1}{w}\right)^{1/2}} \int_a^b \frac{f'(t)dt}{\left(\displaystyle\int \frac{1}{w}\right)^{1/2}} = f(b) - f(a).$$

Следовательно, выполнено условие 2), и для завершения доказательства остается снова применить теорему 2. □

6. Равномерная сходимость ряда Фурье

Теорема 3. *Пусть* $\dfrac{1}{w(x)} \in L^1$ *и* Φ_1 *— замкнутая ортонормированная в* $W^1_{L^2_w}$ *система функций. Тогда для любой функции* $f \in W^1_{L^2_w}$ *ряд Фурье этой функции по системе* Φ_1 *равномерно сходится к самой функции.*

Доказательство. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, неравенство Гёльдера, для $f \in W^1_{L^2_w}$ при $x \in [a,b]$ получим

$$|f(x)| \le |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|dt \le |f(a)| + \left(\int_a^b \frac{dt}{w(t)}\right)^{1/2} \|f'\|_{L^2_w}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством $(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$, выводим

$$|f(x)| \le \left[\left[|f(a)| + \left(\int_a^b \frac{dt}{w(t)}\right)^{1/2} \|f'\|_{L^2_w}\right]^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2}\left[|f(a)|^2 + |f(b)|^2 + \int_a^b \frac{dt}{w(t)} \|f'\|^2_{L^2_w}\right]^{1/2} \le \sqrt{2\left(1 + \int_a^b \frac{dt}{w(t)}\right)} \|f\|_{W^1_{L^2_w}}.$$

Следовательно, $\|f\|_C \le \sqrt{2\left(1 + \int_a^b \frac{dt}{w(t)}\right)} \|f\|_{W^1_{L^2_w}}$, откуда и вытекает утверждение теоремы. □

В качестве следствия приведем тут аналог теоремы о равномерной сходимости рядов Фурье по системам функций, ортогональным относительно скалярного произведения типа Соболева с одной дискретной точкой и порожденным системами функций, ортогональными в L^2_w ([15], теорема 2).

Следствие 3. Пусть $\dfrac{1}{w(x)} \in L^1$, $\Phi \in \mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$ — полная ортонормированная в L^2_w система функций, Φ_1 — система функций, заданная формулами (7)–(9). Тогда если $f \in W^1_{L^2_w}$, то ряд Фурье (12) по системе Φ_1 сходится к $f(x)$ равномерно на $[a,b]$.

7. Примеры

Обозначим через $\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)$, $\alpha, \beta > -1$, ортонормированный на $[-1,1]$ с весом $w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ полином Якоби. Согласно следствию 1 система функций

$$\varphi^w_{1,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varphi^w_{1,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}J_0^2}}\left(-\frac{1}{2}J_0 + \int_{-1}^x \hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t)w_{\alpha,\beta}(t)dt\right), \quad J_0 = \int_{-1}^1 \hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t)w_{\alpha,\beta}(t)dt, \tag{24}$$

$$\varphi^w_{1,k+1}(x) = \int_{-1}^x \hat{P}_k^{\alpha,\beta}(t)w_{\alpha,\beta}(t)dt, \quad k \ge 1, \tag{25}$$

будет ортонормирована в $W^1_{L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}} = W^1_{L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}}[-1,1]$. Для получения выражений без знака интеграла в (25) применим обобщенную формулу Родрига ($n \geq m$) ([26], (4.10.1)):

$$w_{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m n \ldots (n-m+1)} \frac{d^m}{dx^m} \left\{ w_{\alpha+m,\beta+m}(x) P_{n-m}^{\alpha+m,\beta+m}(x) \right\},$$

которая в частном случае при $m = 1$ принимает вид

$$w_{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x) = -\frac{1}{2n}\frac{d}{dx}\left\{ w_{\alpha+1,\beta+1}(x) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) \right\}$$

или

$$\int w_{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(x) = -\frac{1}{2n} w_{\alpha+1,\beta+1}(x) P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x). \tag{26}$$

Тут $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ — стандартизованный полином Якоби, который связан с ортонормированным следующим образом ([26], (4.3.4)):

$$\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(x) = \left(h_n^{\alpha,\beta}\right)^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(x), \quad h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Отсюда и из (26) для $k \geq 1$ получаем

$$\varphi_{1,k+1}^w(x) = \int_{-1}^x \hat{P}_k^{\alpha,\beta}(t) w_{\alpha,\beta}(t)dt = -\left(h_k^{\alpha,\beta}\right)^{-1/2} \frac{1}{2k} w_{\alpha+1,\beta+1}(x) P_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) =$$

$$= -\left(\frac{h_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}}{h_k^{\alpha,\beta}}\right)^{1/2} \frac{1}{2k} w_{\alpha+1,\beta+1}(x) \hat{P}_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) = -\left(\frac{4k}{k+\alpha+\beta+1}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \frac{1}{2k} w_{\alpha+1,\beta+1}(x)\hat{P}_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x) = -\Big(k(k+\alpha+\beta+1)\Big)^{-1/2} w_{\alpha+1,\beta+1}(x)\hat{P}_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x).$$

Перейдем теперь к рассмотрению $\varphi_{1,1}^w(x)$. Легко видеть, что

$$J_0 = \int_{-1}^1 \hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t) w_{\alpha,\beta}(t)dt = (\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t))^{-1} = \left(h_0^{\alpha,\beta}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

где $h_0^{\alpha,\beta} = 2^{\alpha+\beta+1}\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$ (см. замечание после формулы (4.3.3) в [26]).

Интеграл в $\varphi_{1,1}^w(x)$ заменой переменной $t = 2u - 1$ сводится к неполной бета-функции:

$$\int_{-1}^x \hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t) w_{\alpha,\beta}(t)dt = \left(h_0^{\alpha,\beta}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^x (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt = (h_0^{\alpha,\beta})^{-\frac{1}{2}} 2^{\alpha+\beta+1} B_{\frac{x+1}{2}}(\beta+1,\alpha+1). \tag{28}$$

Подставляя (27), (28) в (24) и выполняя некоторые простые преобразования, приходим к выражению

$$\varphi_{1,1}^w(x) = \left(2 + \frac{4}{h_0^{\alpha,\beta}}\right)^{-1/2} \Big(2I_{\frac{x+1}{2}}(\beta+1,\alpha+1) - 1\Big),$$

где $I_t(\beta+1,\alpha+1) = \dfrac{B_t(\beta+1,\alpha+1)}{B_1(\beta+1,\alpha+1)}$ — регуляризованная неполная бета-функция.

Таким образом, мы показали, что система функций

$$\Phi_1^{\alpha,\beta} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left(2 + \frac{4}{h_0^{\alpha,\beta}}\right)^{-1/2} \Big(2I_{\frac{x+1}{2}}(\beta+1, \alpha+1) - 1\Big), \right.$$
$$\left. \Big(k(k+\alpha+\beta+1)\Big)^{-1/2} (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\hat{P}_{k-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad k \geq 1 \right\}$$

является ортонормированной в $W^1_{L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}}$, $\alpha, \beta > -1$.

В частности, при $\alpha = \beta = -1/2$ имеем $h_0^{-1/2,-1/2} = \Gamma(1/2)^2 = \pi$, $B_1(1/2, 1/2) = \pi$,

$$B_x(1/2, 1/2) = \int_0^x \frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}} dt = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{1/2}.$$

Последнее равенство можно получить, сделав в интеграле замену $u = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, система функций

$$\Phi_1^{-1/2,-1/2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \left(2 + \frac{4}{\pi}\right)^{-1/2} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2} - 1\right), \ \frac{(1-x^2)^{1/2}}{k}\hat{P}_{k-1}^{1/2,1/2}(x), \ k \geq 1 \right\}$$

будет ортонормированной в $W^1_{L^2_{w_{-1/2,-1/2}}}$.

Из леммы 4 следует, что система функций $\Phi^{\alpha,\beta} = \left\{ w_{\alpha,\beta}\hat{P}_n^{\alpha,\beta} \right\}$ принадлежит $\mathcal{I}_1 \setminus \mathcal{I}_0$, ортонормирована и замкнута в $L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}[-1, 1]$. Кроме того, нетрудно убедиться, что для системы функций $\Phi^{\alpha,\beta}$ при любом $f \in W^1_{L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}}$ выполняется условие (17). Действительно,

$$\int_{-1}^1 w_{\alpha,\beta}\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t)dt \int_{-1}^1 f'(t) w_{\alpha,\beta}\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t) w_{-\alpha,-\beta}(t)dt =$$
$$= \int_{-1}^1 w_{\alpha,\beta}\big(\hat{P}_0^{\alpha,\beta}(t)\big)^2 dt \int_{-1}^1 f'(t)dt = \int_{-1}^1 f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Следовательно, согласно теореме 1 для частичных сумм Фурье $S_{1,n}^{\alpha,\beta}$ по системе функций $\Phi_1^{\alpha,\beta}$ будут выполнены условия (15) и (16).

Из теоремы 2 вытекает, что система функций $\Phi_1^{\alpha,\beta}$ будет замкнута в $W^1_{L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}}$, а из теоремы 3 следует, что ряд Фурье функции $f \in W^1_{L^2_{w_{-\alpha,-\beta}}}$ по системе $\Phi_1^{\alpha,\beta}$ будет равномерно сходиться к функции f.

Литература

[1] Магомед-Касумов М.Г. *Соболевские системы, ортогональные относительно скалярного произведения с двумя дискретными точками, и ряды Фурье по ним*, Изв. вузов. Матем. (12), 56–66 (2021).

[2] Diaz-González A., Marcellán F., Pijeira-Cabrera H. *Discrete-Continuous Jacobi-Sobolev Spaces and Fourier Series*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **44**, 571–598 (2020), URL : https://doi.org/10.1007/s40840-020-00950-7.

[3] Marcellán F., Xu Y. *On Sobolev orthogonal polynomials*, Expos. Math. **33** (3), 308–352 (2015).

[4] Marcellán F., Quintana Y., Urieles A. *On the Pollard decomposition method applied to some Jacobi–Sobolev expansions*, Turk. J. Math. **37** (6), 934–948 (2013).

[5] Ciaurri O., Minguez J. *Fourier series of Jacobi–Sobolev polynomials*, Integral Transf. Spec. Funct. **30** (4), 334–346 (2019).

[6] Ciaurri O., Minguez J. *Fourier series for coherent pairs of Jacobi measures*, Integral Transf. Spec. Funct. **32** (5–8), 437–457 (2021).

[7] Fejzullahu B. *Asymptotic properties and Fourier expansions of orthogonal polynomials with a non-discrete Gegenbauer–Sobolev inner product*, J. Approx. Theory **162** (2), 397–406 (2010), URL: https://doi.org/10.1016/j.jat.2009.07.002.

[8] Fejzullahu B., Marcellán F., Moreno-Balcázar J. *Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials: Asymptotics and a Cohen type inequality*, J. Approx. Theory **170**, 78–93 (2013), URL: https://doi.org/10.1016/j.jat.2012.05.015.

[9] Marcellán F., Osilenker B., Rocha I. *On Fourier Series of a Discrete Jacobi–Sobolev Inner Product*, J. Approx. Theory **117** (1), 1–22 (2002), URL: https://doi.org/10.1006/jath.2002.3681.

[10] Rocha I., Marcellan F., Salto L. *Relative asymptotics and Fourier series of orthogonal polynomials with a discrete Sobolev inner product*, J. Approx. Theory **121** (2), 336–356 (2003).

[11] Осиленкер Б.П. *Сходимость и суммируемость рядов Фурье–Соболева*, Вестн. МГСУ (5), 34–39 (2012), URL: https://cyberleninka.ru/article/n/shodimost-i-summiruemost-ryadov-furie-soboleva-1.

[12] Осиленкер Б.П. *О линейных методах суммирования рядов Фурье по многочленам, ортогональным в дискретных пространствах Соболева*, Сиб. матем. журн. **56** (2), 420–435 (2015).

[13] Fejzullahu B., Marcellán F. *On convergence and divergence of Fourier expansions with respect to some Gegenbauer–Sobolev type inner product*, Commun. Anal. Theory Cont. Fract. (16), 1–11 (2009).

[14] Ciaurri O., Minguez J. *Fourier series of Gegenbauer–Sobolev polynomials*, SIGMA Symm. Integrabi. Geom. Methods Appl. (14), 1–11 (2018).

[15] Шарапудинов И.И. *Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения*, УМН **74** (4 (448)), 87–164 (2019).

[16] Шарапудинов И.И. *Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой*, Изв. РАН. Сер. матем. **82** (1), 225–258 (2018).

[17] Магомед-Касумов М Г. *Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша*, Матем. заметки **105** (4), 545–552 (2019).

[18] Магомед-Касумов М.Г. *Оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональной в смысле Соболева системе функций, порожденной системой Уолша*, в сб.: *Матер.* 20 *международн. Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». Саратов,* 28 *января –* 1 *февраля* 2020 *г. Ч.* 2. Итоги науки и техники. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обз. **200**, 73–80 (ВИНИТИ РАН, М., 2021).

[19] Gadzhimirzaev R.M. *Sobolev-orthonormal system of functions generated by the system of Laguerre functions*, Пробл. анал. Issues Anal. **8 (26)** (1), 32–46 (2019).

[20] Гаджимирзаев Р.М. *О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра*, Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Матем. Механ. Информатика **20** (4), 416–423 (2020).

[21] Шарапудинов И.И. *Полиномы, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с полиномами Чебышёва первого рода, и задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **54** (12), 1645–1662 (2018.).

[22] Шарапудинов И.И. *Ортогональные по Соболеву системы функций и задача Коши для ОДУ*, Изв. РАН. Сер. Матем. **83** (2), 204–226 (2019).

[23] Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены. 3-е изд.* (ФИЗМАТЛИТ, М., 2007).

[24] Натансон И.П. *Конструктивная теория функций* (ГИТТЛ, М., Л., 1949).

[25] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа. Изд.* 4 (Наука, М., 1976).

[26] Сеге Г. *Ортогональные многочлены* (ГИФМЛ, М., 1962).

Магомедрасул Грозбекович Магомед-Касумов

Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук,
ул. М. Гаджиева, д. 45, г. Махачкала, 367000, Россия;
Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук,
ул. Ватутина, д. 53, г. Владикавказ, 362025, Россия,

e-mail: rasuldev@gmail.com

M.G. Magomed-Kasumov

Weighted Sobolev orthogonal systems with two discrete points and Fourier series with respect to them

Abstract. We consider the properties of systems Φ_1 orthogonal with respect to a weighted discrete-continuous Sobolev inner product of the form $\langle f, g\rangle_S = f(a)g(a) + f(b)g(b) + \int_a^b f'(t)g'(t)w(t)dt$. The completeness of systems Φ_1 in the Sobolev space $W^1_{L^2_w}$ and the relation of Φ_1 to systems orthogonal in weighted Lebesgue spaces L^2_u are studied. We also analyze properties of the Fourier series with respect to systems Φ_1. In particular, conditions for the uniform convergence of Fourier series to functions from $W^1_{L^2}$ are obtained.

Keywords: discrete-continuous inner product, Sobolev inner product, Fourier series, uniform convergence, coincidence at the ends of the segment, completeness of Sobolev systems.

Magomedrasul Grozbekovich Magomed-Kasumov

Daghestan Federal Research Centre of the Russian Academy of Science,
45 M. Gadjiev str., Makhachkala, 367000 Russia;
Southern Mathematical Institute – the Affiliate of Vladikavkaz Scientific Center of
Russian Academy of Science,
53 Vatutin str., Vladikavkaz, 362027 Russia,

e-mail: rasuldev@gmail.com