

А. ДАРЬЯ, Н. ТАГХИЗАДЕХ

ЗАДАЧИ ШВАРЦА И ДИРИХЛЕ ДЛЯ $\bar{\partial}$ -УРАВНЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация. В данной статье исследуются некоторые краевые задачи для уравнений Коши–Римана в треугольной области M . С помощью метода мозаичной симметрии мы получаем покрытие комплексной плоскости посредством отражений данной области. Затем с помощью формулы Коши–Помпейю выводится представление в виде формулы Коши–Шварца в области M . Кроме того, рассматривается краевая задача Шварца для неоднородного уравнения Коши–Римана, приводятся явные выражения для ее решения и условия ее разрешимости. Наконец, с помощью решения краевой задачи Шварца явным образом решается краевая задача Дирихле.

Ключевые слова: задача Шварца, задача Дирихле, уравнение Коши–Римана, треугольная область.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-12-22

ВВЕДЕНИЕ

Комплексный анализ является активно развивающейся ветвью математики, значительно расширившейся за последние десятилетия. В частности, исследование краевых задач обладает теоретической и прикладной значимостью для многих областей, таких как электродинамика, гидродинамика, теория упругости, теория оболочек, квантовая механика, медицинская визуализация и др. В последние годы многие исследователи внесли значительный вклад в изучение краевых задач для комплексных уравнений в частных производных. Были достигнуты многочисленные результаты, которые быстро обогатили развитие обобщенных аналитических функций, краевых задач, анализа Римана–Гильберта, математической физики и т.д. [1]–[20].

Теория краевых задач для аналитических функций расширилась на многие области. Аналитические функции тесно связаны с уравнениями Коши–Римана. Один из аспектов заключается в исследовании краевых задач для различных типов функций, а также для функций, удовлетворяющих определенным комплексным дифференциальным уравнениям, например, обобщенные аналитические функции, функции, удовлетворяющие уравнению Коши–Римана, уравнению Бельтрами [5]–[7]. В частности, уравнения Коши–Римана вызвали большой интерес. С другой стороны, различные типы условий, накладываемых на границу, приводят к различным краевым задачам таким, как краевая задача Шварца, краевая задача Дирихле и др. Кроме того, помимо классического исследования в единичном круге [8], большое внимание уделялось краевым задачам в некоторых специфических областях,

например, в полукруге [9], линзе и лунке [10], полулинзе [11], эллипсе [12], прямоугольнике [13] и др.

Также задача типа Шварца для неоднородного уравнения Коши–Римана на (прямоугольном равнобедренном) треугольнике была представлена Ван Юфэном и Ван Яньцзинем [14]. В 2021 г. краевая задача Шварца на треугольнике Рело была представлена Яньшуай Хао и Лю Хуа [15].

В данной статье, помимо описания новой области (треугольной), мы хотим представить отражения, покрытия и точки, которые мы получаем на каждом этапе. Мы также строим формулу представления Коши–Шварца и исследуем краевые задачи Шварца и Дирихле с ее помощью. Далее приводится явное решение краевой задачи Шварца для уравнения Коши–Римана, а также явное решение краевой задачи Дирихле для уравнения Коши–Римана в треугольной области и обсуждаются условия разрешимости в этой области.

Пусть M — треугольная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, заданная формулой

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \epsilon_k| < \sqrt{2}, k = 1, 2, 3 \right\},$$

где $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$, $\epsilon_3 = -i\sqrt{3}$, и $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = \sqrt{2}\}$, $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| = \sqrt{2}\}$, $C_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z + i\sqrt{3}| = \sqrt{2}\}$ — три окружности с одинаковым радиусом.

Граница области M обозначается как ∂M , а угловыми точками области M являются $a = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(1 + i)$, $b = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)(1 - i)$ и $c = -i$. Следующая иллюстрация поясняет эти определения.

В данной статье получены явные решения и условия разрешимости для некоторых краевых задач в области M . Для этого сначала путем модификации формулы Коши–Помпейю выводится представление Коши–Шварца. Эта модификация достигается за счет применения формулы Коши–Помпейю к точкам, полученным с помощью принципа паркетирования и отражения. На следующем этапе с помощью формулы представления Коши–Шварца находится решение краевой задачи Шварца для неоднородного уравнения Коши–Римана. Наконец, указываются решение и условие разрешимости для задачи Дирихле.

1. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ШВАРЦА В M

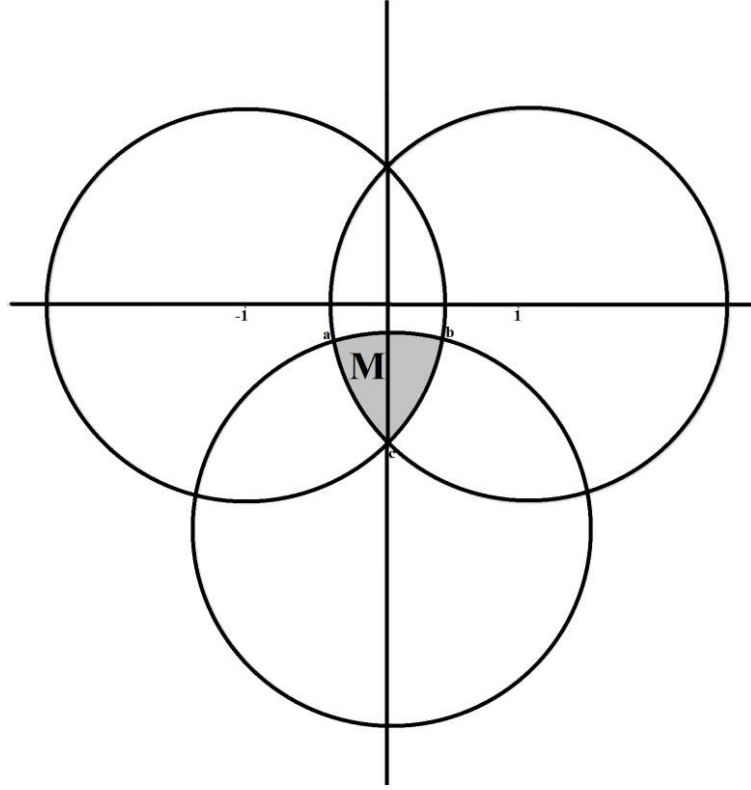
Во многих разделах теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики важным является явное представление решений краевых задач в интегральной форме. Принцип паркетирования и отражения применяется для решения нескольких краевых задач для определенных областей, чьи границы состоят из дуг окружностей или прямых линий. Этот принцип дает эвристические идеи и процедуры для построения аналитических функций, которые играют важную роль при решении краевых задач Шварца и Дирихле для уравнений Коши–Римана.

В этом разделе, используя метод паркетирования и отражения для введенной области M , мы получаем покрытие для всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Это покрытие достигается через отражения с семикратным повторением.

Отражение любой точки $z = z_1 \in M$ относительно C_k , $k = 1, 2, 3$, дает нам

$$|z - \epsilon_k| = \sqrt{2} \Rightarrow (z - \epsilon_k)(\bar{z} - \overline{\epsilon_k}) = 2 \Rightarrow z^* = \frac{\epsilon_k \bar{z} - \epsilon_k \overline{\epsilon_k} + 2}{\bar{z} - \overline{\epsilon_k}}.$$

Принцип работает следующим образом. Треугольник отражается относительно своих трех сторон. Три получившихся области затем отражаются относительно своих сторон и т. д. Это приводит к покрытию комплексной плоскости. Таким образом, мы можем получить

Рис. 1. Треугольная область M

следующие точки:

$$z_2 = -\frac{1}{z}, \quad z_3 = \frac{-(1+i\sqrt{3})z+1-i\sqrt{3}}{(1-i\sqrt{3})z+1+i\sqrt{3}}, \quad z_4 = \frac{(i\sqrt{3}-1)z-1-i\sqrt{3}}{-(1+i\sqrt{3})z+1-i\sqrt{3}},$$

$$z_5 = \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}, \quad z_6 = \frac{-\bar{z}+1}{\bar{z}+1}, \quad z_7 = \frac{-i\sqrt{3}\bar{z}-1}{\bar{z}-i\sqrt{3}}, \quad z_8 = \frac{\bar{z}-i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}\bar{z}+1}.$$

Эти отражения создают паркетирование всей комплексной плоскости, и данные точки также будут необходимы для построения формулы представления Коши–Шварца для области M . При решении краевых задач для аналитических функций в M важна эта формула представления. Формула представления Коши–Шварца выводится из формулы представления Коши–Помпейю, примененной к описанным выше точкам.

Теорема 1. Любая функция $\omega \in C^1(M, \mathbb{C}) \cap C(\overline{M}, \mathbb{C})$ может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \omega(z) = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{1}{\pi i} \int_{\partial M \cap C_j} \operatorname{Re} \omega(\zeta) \left(K_1(\zeta) - \frac{2}{(\zeta - \epsilon_j)} \right) d\zeta + \frac{2}{\pi} \int_{\partial M \cap C_j} \operatorname{Im} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} \right] - \\ - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) K_1(\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int_M \overline{\omega_{\bar{\zeta}}(\zeta)} K_2(\zeta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{где } K_1(\zeta) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(\zeta - z_k)}, \quad K_2(\zeta) = \sum_{k=5}^8 \frac{1}{(\zeta - z_k)} \quad \text{и } \zeta = \xi + i\eta.$$

Доказательство. Применим формулу Коши–Помпейю [8]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z} = \begin{cases} \omega(z), & z \in M; \\ 0, & z \notin \overline{M}, \end{cases}$$

к $z_1 \in M$ и $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$ и $z_8 \notin \overline{M}$, получим

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_1}.$$

Поскольку точки, полученные в результате отражения, находятся вне области M , то формула Коши–Помпейю для каждой такой точки равна нулю. Тогда

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_k} - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_k}, \quad 2 \leq k \leq 8.$$

Взяв комплексное сопряжение для формул $k = 5, 6, 7, 8$, в которых появляется $\bar{z}$, и добавив восемь соотношений, получается формула представления Коши–Шварца (1). $\square$

Теорема 1 позволяет решить соответствующую краевую задачу для неоднородного уравнения Коши–Римана в области M .

В этом разделе обсуждается поведение на границе в краевой задаче Шварца для области M , а также доказывается существование граничных значений в угловых точках. Далее явно получено решение задачи Шварца для неоднородного уравнения Коши–Римана.

Теорема 2. *Краевая задача Шварца*

$$\omega_{\bar{z}} = f \quad \text{в } M, \quad \operatorname{Re} \omega = \gamma \quad \text{на } \partial M$$

для заданных $f \in L_p(M; \mathbb{C})$, $p > 2$, $\gamma \in C(\partial M, \mathbb{R})$ имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \omega(z) = & \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\pi i} \int_{\partial M \cap C_j} \gamma(\zeta) \left(K_1(\zeta) - \frac{2}{(\zeta - \epsilon_j)} \right) d\zeta + ic - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_M f(\zeta) K_1(\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int_M \overline{f(\zeta) K_2(\zeta)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{где } c = \sum_{j=1}^3 \frac{2}{\pi i} \int_{\partial M \cap C_j} \operatorname{Im} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} \quad \text{и } \zeta = \xi + i\eta.$$

Доказательство. Правая сторона равенства (2) до члена

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \int_M \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

является непрерывной функцией [4], [8], а $Tf(z)$ является решением уравнения Коши–Римана $\omega_{\bar{z}} = f$, поэтому $\omega(z)$ является решением неоднородного уравнения Коши–Римана.

Изучение граничного поведения интеграла по границе подразумевает вычисления на различных участках границы ∂M . Пусть

$$\omega_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int_M f(\zeta) K_1(\zeta) d\xi d\eta - \frac{1}{\pi} \int_M \overline{f(\zeta) K_2(\zeta)} d\xi d\eta.$$

Необходимо выделить вещественную часть $\omega_0(z)$. Для $z \in \partial M$ имеем

$$\omega_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_M \left\{ f(\zeta) K_1(\zeta) - \overline{f(\zeta) K_1(\zeta)} \right\} d\xi d\eta.$$

Поэтому для $z \in \partial M$ получаем $\operatorname{Re} \omega_0(z) = 0$.

Для аналитической функции ω рассмотрим поведение на границе:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega(z) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_j} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_j} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_2} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_2} - 1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_3} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_3} - 1 + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_4} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_4} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} \right). \end{aligned}$$

Изучим теперь поведение $\operatorname{Re} \omega$ на $\partial M \cap C_1$.

Случай 1. $\zeta \in C_1$.

Очевидно, что

$$\frac{\zeta - \epsilon_1}{\zeta - z_2} = \frac{z(\zeta - 1)}{\zeta z + 1}, \quad \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_2} = \frac{\bar{z}(\bar{\zeta} - 1)}{\bar{\zeta} \bar{z} + 1}.$$

Откуда получаем

$$\frac{\bar{z}(\bar{\zeta} - 1)}{\bar{\zeta} \bar{z} + 1} = \frac{\left(\frac{z+1}{z-1} \right) \left(\frac{2}{\zeta - 1} \right)}{\left(\frac{\zeta+1}{\zeta-1} \right) \left(\frac{z+1}{z-1} \right) + 1} = \frac{2(z+1)}{(z+1)(\zeta+1) + (z-1)(\zeta-1)} = \frac{z+1}{\zeta z + 1},$$

аналогично имеем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_3} &= \frac{((1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3})(\bar{\zeta} - 1)}{\bar{\zeta}(1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3} + (1-i\sqrt{3})\bar{z} - 1 - i\sqrt{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{((1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3})(\bar{\zeta} - 1)}{\bar{\zeta}(1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3} + (1-i\sqrt{3})\bar{z} - 1 - i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2(z+i\sqrt{3})}{\zeta((1-i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3}}, \\ \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_4} &= \frac{((i\sqrt{3}-1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3})(\bar{\zeta} - 1)}{\bar{\zeta}(i\sqrt{3}-1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3} + (1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{((i\sqrt{3}-1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3})(\bar{\zeta} - 1)}{\bar{\zeta}(i\sqrt{3}-1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3} + (1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3}} = \\ &= \frac{2(1-i\sqrt{3}z)}{\zeta(-(1+i\sqrt{3})z + 1 - i\sqrt{3}) + (1-i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Случай 2. $\zeta \in C_2$,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\zeta} + 1}{\bar{\zeta} - \bar{z}} &= \frac{-z + 1}{\zeta z + 1}, \\ \frac{\bar{z}(\bar{\zeta} + 1)}{\bar{\zeta} \bar{z} + 1} &= \frac{-z - 1}{\zeta - z}, \\ &= \frac{((1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3})(\bar{\zeta} + 1)}{\bar{\zeta}(1+i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3} + (1-i\sqrt{3})\bar{z} - 1 - i\sqrt{3}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(z + i\sqrt{3})}{\zeta((1 - i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3}}, \\
&\quad \frac{((i\sqrt{3} - 1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3})(\bar{\zeta} + 1)}{\bar{\zeta}(i\sqrt{3} - 1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3}} = \\
&= \frac{2(i\sqrt{3}z - 1)}{\zeta(-(1 + i\sqrt{3})z + 1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Случай 3. $\zeta \in C_3$,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\zeta} - i\sqrt{3}}{\bar{\zeta} - \bar{z}} &= \frac{2(1 - z)}{\zeta((1 - i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3}}, \\
\frac{\bar{z}(\bar{\zeta} - i\sqrt{3})}{\bar{\zeta}\bar{z} + 1} &= \frac{-2(z + 1)}{\zeta(-(1 + i\sqrt{3})z + 1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3})z + 1 + i\sqrt{3}}, \\
\frac{((1 + i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3})(\bar{\zeta} - i\sqrt{3})}{\bar{\zeta}(1 + i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3}) + (1 - i\sqrt{3})\bar{z} - 1 - i\sqrt{3}} &= \frac{-(z + i\sqrt{3})}{\zeta - z}, \\
\frac{((i\sqrt{3} - 1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3})(\bar{\zeta} - i\sqrt{3})}{\bar{\zeta}(i\sqrt{3} - 1)\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) + (1 + i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i\sqrt{3}} &= \frac{-i\sqrt{3} + 1}{\zeta z + 1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, на $\partial M \cap C_1$ имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_1} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_1}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_1} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \Upsilon(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_1}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_1},
\end{aligned}$$

где

$$\Upsilon(\zeta) = \begin{cases} \gamma(\zeta), & \zeta \in \partial M \cap C_1; \\ 0, & \zeta \in C_1 \setminus (\partial M \cap C_1), \end{cases}$$

учитывая свойства ядра Пуассона [8] для C_1 ,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \omega(z) = \gamma(\zeta)$$

для $\zeta \in \partial M \cap C_1$ вплоть до вершин a и c области M , иначе непрерывность может быть нарушена, если только случайно Υ не равна нулю в этих точках.

Аналогично, для $z \in \partial M \cap C_2$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_2} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta + \epsilon_2}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_2}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta + \epsilon_2} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \Upsilon(\zeta) \left[\frac{\zeta + \epsilon_2}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_2}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta + \epsilon_2},
\end{aligned}$$

где

$$\Upsilon(\zeta) = \begin{cases} \gamma(\zeta), & \zeta \in \partial M \cap C_2; \\ 0, & \zeta \in C_2 \setminus (\partial M \cap C_2), \end{cases}$$

учитывая свойства ядра Пуассона для C_2 ,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \omega(z) = \gamma(\zeta)$$

для $\zeta \in \partial M \cap C_2$ вплоть до вершин b и c области M , иначе непрерывность может быть нарушена, если только случайно Υ не равна нулю в этих точках.

Наконец, для $z \in \partial M \cap C_3$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_3} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_3}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_3}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_3} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \Upsilon(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_3}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_3}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_3}, \end{aligned}$$

где

$$\Upsilon(\zeta) = \begin{cases} \gamma(\zeta), & \zeta \in \partial M \cap C_3; \\ 0, & \zeta \in C_3 \setminus (\partial M \cap C_3), \end{cases}$$

учитывая свойства ядра Пуассона для C_3 ,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \operatorname{Re} \omega(z) = \gamma(\zeta),$$

для $\zeta \in \partial M \cap C_3$ вплоть до вершин a и b области M , иначе непрерывность может быть нарушена, если только случайно Υ не равна нулю в этих точках.

Рассмотрим теперь граничное поведение в вершинах a, b, c , для чего используем постоянную функцию 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_j} \left[\frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_j} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_2} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_2} - 1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_3} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_3} - 1 + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_4} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_4} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Умножая (3) на $\gamma(a)$ и вычитая получившееся уравнение из $\operatorname{Re} \omega(z)$, для $z \in \partial M \cap C_1$ получаем

$$\operatorname{Re} \omega(z) - \gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_1} \tilde{\gamma}(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_1}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_1}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_1},$$

где $\tilde{\gamma}(\zeta) = \gamma(\zeta) - \gamma(a)$ и $\tilde{\gamma}(a) = 0$,

$$\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re} \omega(z) = \gamma(a).$$

Аналогично, умножая (3) на $\gamma(b)$ и вычитая получившееся уравнение из $\operatorname{Re} \omega(z)$, для $z \in \partial M \cap C_2$ имеем

$$\operatorname{Re} \omega(z) - \gamma(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_2} \hat{\gamma}(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_2}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_2}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_2},$$

где $\hat{\gamma}(\zeta) = \gamma(\zeta) - \gamma(b)$ и $\hat{\gamma}(b) = 0$, откуда

$$\lim_{z \rightarrow b} \operatorname{Re} \omega(z) = \gamma(b).$$

Аналогично умножая (3) на $\gamma(c)$ и вычитая получившееся уравнение из $\operatorname{Re} \omega(z)$, для $z \in \partial M \cap C_3$ получаем

$$\operatorname{Re} \omega(z) - \gamma(c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_3} \hat{\gamma}(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_3}{\zeta - z_1} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_3}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_3},$$

где $\tilde{\gamma}(\zeta) = \gamma(\zeta) - \gamma(c)$ и $\tilde{\gamma}(c) = 0$, откуда

$$\lim_{z \rightarrow c} \operatorname{Re} \omega(z) = \gamma(c).$$

□

2. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В M

Задача Дирихле — это важная краевая задача в комплексном анализе. Она является типичной задачей для эллиптических уравнений в частных производных и их систем. Задача Дирихле заключается в нахождении функции, удовлетворяющей заданному уравнению в частных производных внутри данной области, исходя из ее значений на границе.

В этом разделе мы рассмотрим краевую задачу Дирихле для однородного уравнения Коши–Римана. При решении краевых задач для аналитических функций важна следующая формула представления Дирихле.

Теорема 3. *Любая точка $\omega \in C^1(M, \mathbb{C}) \cap C(\bar{M}, \mathbb{C})$ может быть представлена в виде*

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \omega(\zeta) K_1(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) K_1(\zeta) d\xi d\eta, \quad (4)$$

$$\text{где } K_1(z) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(\zeta - z_k)} \quad \text{и } \zeta = \xi + i\eta.$$

Доказательство. По формуле Коши–Помпейю для $z_1 \in M$ имеем

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_1} - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_1},$$

а поскольку $z_2, z_3, z_4 \notin \bar{M}$, то формула Коши–Помпейю для всех этих точек равна нулю:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \omega(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z_k} - \frac{1}{\pi} \int_M \omega_{\bar{\zeta}}(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{\zeta - z_k}, \quad 2 \leq k \leq 4.$$

Таким образом, суммируя эти представления Коши–Помпейю, получаем формулу представления Дирихле. $\square$

С помощью формулы (4) можно решить краевую задачу Дирихле для однородного уравнения Коши–Римана в M .

Теорема 4. *Задача Дирихле для однородного уравнения Коши–Римана в M*

$$\omega_{\bar{z}} = 0 \quad \text{в } M,$$

$$\omega = \gamma \quad \text{на } \partial M,$$

для заданной функции $\gamma \in C(\partial M; \mathbb{C})$ является разрешимой тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_2(\zeta) d\zeta = 0, \quad (5)$$

при этом для $z \in M$ единственное решение записывается в виде

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_1(\zeta) d\zeta,$$

$$\text{где } K_1(z) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(\zeta - z_k)}, \quad K_2(z) = \sum_{k=5}^8 \frac{1}{(\zeta - z_k)} \quad \text{и } \zeta = \xi + i\eta.$$

Доказательство. Пусть ω — решение краевой задачи Дирихле, тогда мы знаем, что

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \omega(z) = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \partial M. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_2(\zeta) d\zeta.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \omega(z) - f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_1(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_2(\zeta) d\zeta = \\ &= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M \cap C_j} \gamma(\zeta) \left[\frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_j} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_1} - 1 + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_2} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_2} - 1 = \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_3} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_3} - 1 + \frac{\zeta - \epsilon_j}{\zeta - z_4} + \frac{\bar{\zeta} - \bar{\epsilon}_j}{\bar{\zeta} - \bar{z}_4} - 1 \right] \frac{d\zeta}{\zeta - \epsilon_j} \right). \end{aligned}$$

Тогда согласно доказательству теоремы 2

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (\omega(z) - f(z)) = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \partial M, \quad (7)$$

а из (6), (7) получаем

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = 0, \quad \zeta \in \partial M.$$

Поскольку $\overline{f(z)}$ является аналитической при $z \in M$, то по принципу максимума модуля для аналитических функций $f(z) = 0$ для $z \in M$, что и означает условие (5).

Докажем теперь, что условие (5) является достаточным. Если условие (5) выполнено, то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_2(\zeta) d\zeta = 0.$$

Таким образом, аналитическая функция ω может быть представлена в виде

$$\omega(z) = \omega(z) - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_1(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} \gamma(\zeta) K_2(\zeta) d\zeta,$$

откуда равенство

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \omega(z) = \gamma(\zeta), \quad \zeta \in \partial M,$$

следует снова из доказательства теоремы 2. □

Авторы выражают искреннюю благодарность главному редактору, заместителю главного редактора, редакционной коллегии и рецензентам за их ценные комментарии, замечания и предложения, которые значительно улучшили статью.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шабалин П.Л., Фатыхов А.Х. *Неоднородная красная задача Гильберта с конечным числом точек разветвления логарифмического порядка*, Изв. вузов. Матем. (1), 64–80 (2021).
- [2] Begehr H., Burgumbayeva S., Shupeyeva B. *Harmonic Green functions for a plane domain with two touching circles as boundary*, Adv. Math. Models Appl. **3** (1), 18–29 (2018).
- [3] Вафина Л.И., Салехова И.Г. *Задача Шварца в случае счетного множества интервалов*, Изв. вузов. Матем. (2), 10–17 (2016).
- [4] Vekua I.N. *Generalized analytic functions* (Pergamon Press, Oxford, 1962).
- [5] Wang Y. *Boundary value problems for complex partial differential equations in fan-shaped domains*, [Ph.D. thesis]. FU Berlin, 2010. Available at <http://www.diss.fuberlin.de/diss/receive/FUDISS-thesis-000000037683>.
- [6] Wang Y. *Schwarz-type boundary value problems for the polyanalytic equation in the half unit disc*, Complex Var. Elliptic Equat. **57** (9), 983–993 (2012).
- [7] Darya A., Taghizadeh N. *On the Dirichlet boundary value problem for the Cauchy–Riemann equations in the half disc*, Eur. J. Math. Anal. **4**, 15 (2024).
- [8] Begehr H. *Boundary value problems in complex analysis*. I, Bol. Aosc. Math. Venez. **12** (1), 65–85 (2005).

- [9] Begehr H., Vaitekhovich T. *Harmonic boundary value problems in half disc and half ring*, Funct. Approx. Comment. Math. **40** (2), 251–282 (2009).
- [10] Begehr H., Vaitekhovich T. *Schwarz problem in lens and lune*, Complex Var. Elliptic Equat. **59** (1), 76–84 (2014).
- [11] Taghizadeh N., Mohammadi V. *Some boundary value problems for the Cauchy–Riemann equation in half lens*, Eurasian Math. J. **9** (3), 73–84 (2018).
- [12] Emkanpour H., Taghizadeh N. *Three boundary value problems of the Cauchy–Riemann equation in the eclipse domain*, Complex Var. Elliptic Equat. **69** (1), 1–20 (2022), DOI: 10.1080/17476933.2022.215.
- [13] Wang Y., Zhao X. *Schwarz boundary value problem for the Cauchy–Riemann equation in a rectangle*, Bound. Value Probl. article 7 (2016), DOI: 10.1186/s13661-016-0520-z.
- [14] Wang Yu., Wang Ya. *Schwarz-type problem of nonhomogeneous Cauchy–Riemann equation on a triangle*, J. Math. Anal. Appl. **377** (2), 557–570 (2011).
- [15] Hao Y., Hua L. *Schwarz boundary value problem on Reuleaux triangle*, Complex Var. Elliptic Equat. **67** (10), 2444–2457 (2021).
- [16] Gao Y., Zhao Y., Zhao B. *Boundary value problems of holomorphic vector functions in 1D QCs*, Phys. B. Cond. Matt. **394** (1), 56–61 (2007).
- [17] Akel M., Alabbad F. *Riemann–Hilbert-type boundary value problems on a half hexagon*, Acta Math. Sin. **33** (4), 1249–1266 (2017).
- [18] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с дробными производными*, Изв. вузов. Матем. (9), 83–94 (2022).
- [19] Шабалин П.Л., Фаизов Р.Р. *Задача Римана в полуплоскости для обобщенных аналитических функций с сингулярной линией*, Изв. вузов. Матем. (3), 78–89 (2023).
- [20] Бурский В.П. *Обобщенные решения линейных граничных задач*, Изв. вузов. Матем. (12), 25–36 (2019).

Али Дарья

Университет Гилян,
ул. Намджу, г. Решт, 19141, Иран,
e-mail: AliDarya.phd@yahoo.com

Насир Тагхизадех

Университет Гилян,
ул. Намджу, г. Решт, 19141, Иран,
e-mail: taghizadeh@guilan.ac.ir

A. Darya and N. Taghizadeh

Schwarz and Dirichlet problems for $\bar{\partial}$ -equation in a triangular domain

Abstract. In this paper, we investigate some boundary value problems for the Cauchy–Riemann equations in the triangular domain M . By the parqueting-reflection method, we obtain a covering of the complex plane through reflections of the domain. Then by the Cauchy–Pompeiu formula, we derive the Cauchy–Schwarz representation formula in M . In addition, we consider the Schwarz boundary value problem for the inhomogeneous Cauchy–Riemann equation and the explicit expressions of solution and condition of solvability. Finally, by using the Schwarz boundary value problem, the solution of the Dirichlet boundary value problem is explicitly solved.

Keywords: Schwarz problem, Dirichlet problem, Cauchy–Riemann equation, triangular domain.

Ali Darya

University of Guilan,
Namjoo str., P.O. Box 19141, Rasht, Iran,
e-mail: AliDarya.phd@yahoo.com

Nasir Taghizadeh

University of Guilan,

Namjoo str., P.O. Box 19141, Rasht, Iran,

e-mail: taghizadeh@guilan.ac.ir