

Э.ДЖ. ИБАДОВ

О НЕРАВЕНСТВЕ РИССА И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ КОРНЕВЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ДИРАКА $2m$ -ГО ПОРЯДКА С СУММИРУЕМЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Аннотация. Рассматривается оператор типа Дирака $2m$ -го порядка на конечном интервале $G = (a, b)$. Предполагается, что его коэффициент является комплекснозначной суммируемой на $G = (a, b)$ матрицей-функцией. Устанавливаются критерий риссовости для системы корневых вектор-функций и доказывается теорема об эквивалентной базисности в $L_p^{2m}(G)$, $1 < p < \infty$.

Ключевые слова: оператор типа Дирака, корневая вектор-функция, неравенство Рисса, эквивалентная базисность.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-23-34

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе изучаются свойства риссовости и базисности систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка. Корневые вектор-функции понимаются в обобщенной трактовке, т. е. безотносительно к краевым условиям [1]. При таком обобщенном их понимании В.А. Ильиным [1] установлены необходимые и достаточные условия безусловной базисности (базисности Рисса) в L_2 систем корневых функций оператора $L = -d^2/dx^2 + q(x)$. Работа [1] послужила отправной точкой для большого числа работ многих авторов по исследованию свойств бесселевости, безусловной базисности и базисности систем корневых функций дифференциальных операторов высокого порядка.

Для оператора Дирака с потенциалом из класса L_2 критерии бесселевости и безусловной базисности установлены в работе [2]. В работе [3] установлены критерии бесселевости и безусловной базисности для системы корневых вектор-функций оператора Дирака с потенциалом из L_1 и доказана теорема об эквивалентной базисности этих систем в L_2^2 . Покомпонентная равномерная равносходимость на компакте, равномерная сходимость, риссовость, эквивалентная базисность систем корневых вектор-функций оператора Дирака и безусловная базисность для оператора типа Дирака рассматривались в работах [4]–[8].

Для оператора типа Дирака $2m$ -го порядка с коэффициентом из класса L_1 критерии бесселевости и безусловной базисности установлены в работе [9].

Свойству базисности и другим спектральным свойствам корневых вектор-функций оператора Дирака (с граничными условиями) посвящена обширная литература (см. работы [10]–[28]). Для 2×2 -систем Дирака свойство базисности Рисса системы корневых векторов (СКВ) в терминах граничных условий изучались в работах [10]–[18]. В работе [10] установлена базисность Рисса для системы Дирака с потенциалом из класса L_2 и с разделенными

граничными условиями. Система Дирака с потенциалом из класса L_2 и с общими регулярными граничными условиями также изучена в работе [12], где доказана базисность Рисса из подпространств, а в случае сильно регулярных граничных условий базисность Рисса. Свойство базисности СКВ в случае потенциальной матрицы $\Omega \in L_1[a, b] \otimes \mathbb{C}^{2 \times 2}$ и сильно регулярных граничных условий установлено независимо и разными методами в работах [14], [16], [17]. При этом в [16], [17] доказана базисность Рисса также для систем типа Дирака ($b_1 \neq -b_2$), а в [14], [15] — базисность Рисса из подпространств в случае общих регулярных граничных условий. Отметим еще, что в недавней работе А.А. Лунева [19] получен критерий базисности Бари для 2×2 -систем Дирака с сильно регулярными граничными условиями.

Кроме того, в работе [13] найден критерий базисности Рисса СКВ для задачи с периодическими (всегда не сильно регулярными) граничными условиями. Этот критерий формулируется в терминах спектров периодической и антипериодической задач и задачи Дирихле. В работе [18] найдены явные условия на потенциальную матрицу Ω , при которых имеет место базисность Рисса СКВ для 2×2 -системы Дирака с периодическими (и более общими регулярными, но не сильно регулярными) граничными условиями.

Для $2m \times 2m$ -систем Дирака, отметим, что впервые полнота СКВ граничных задач для таких систем с регулярными граничными условиями установлена ([23], гл. 1) в случае непрерывной потенциальной матрицы Ω . Вопросы полноты СКВ для общих $2m \times 2m$ -систем типа Дирака с суммируемой потенциальной матрицей Ω и регулярными граничными условиями изучены в [24].

Базисности Рисса для $2m \times 2m$ -систем Дирака посвящено всего лишь несколько работ [25]–[28]. Базисность Рисса из подпространств для задачи Дирихле для $2m \times 2m$ -системы Дирака доказана в [25]. Впервые базисность Рисса из подпространств для общих $2m \times 2m$ -систем 1-го порядка, охватывающих системы типа Дирака при некоторых специальных регулярных граничных условиях, установлена в [26]. Базисность Рисса СКВ в случае общих регулярных граничных условий для $2m \times 2m$ -систем типа Дирака исследована недавно в [27], [28].

Рассмотрим оператор типа Дирака $2m$ -го порядка

$$D\psi = B \frac{d\psi}{dx} + \Omega(x)\psi, \quad \psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_{2m}(x))^T,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & T_1 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_m), \quad T_2 = \text{diag}(b_{m+1}, b_{m+2}, \dots, b_{2m}) \\ (b_1 = b_2 = \dots = b_m > 0, \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = b_{2m} < 0),$$

$\Omega(x) = \text{diag}(p_1(x), p_2(x), \dots, p_{2m}(x))$, $p_i(x)$ ($i = \overline{1, 2m}$) — комплекснозначные суммируемые функции на произвольном конечном интервале $G = (a, b)$ действительной прямой.

Следуя работе [1], под собственной вектор-функцией оператора D , отвечающей комплексному собственному значению λ , будем понимать любую тождественно не равную нулю комплекснозначную вектор-функцию $\overset{\circ}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подинтервале интервала G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D \overset{\circ}{\psi} = \lambda \overset{\circ}{\psi}$.

Аналогично, под присоединенной вектор-функцией порядка $l \geq 1$, отвечающей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{\psi}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную вектор-функцию

$\overset{l}{\psi}(x)$, которая абсолютно непрерывна на любом замкнутом подинтервале G и почти всюду в G удовлетворяет уравнению $D \overset{l}{\psi} = \lambda \overset{l}{\psi} + \overset{l-1}{\psi}$.

Пусть $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система, составленная из корневых (собственных и присоединенных) вектор-функций оператора D , а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая ей система собственных значений. В дальнейшем считаем, что каждая вектор-функция $\psi_k(x)$ в систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ входит вместе со всеми соответствующими ей присоединенными функциями меньшего порядка и длины цепочек корневых вектор-функций равномерно ограничены. Это означает, в частности, что каждая вектор-функция $\psi_k(x)$ почти всюду в G удовлетворяет уравнению

$$D\psi_k = \lambda_k \psi_k + \theta_k \psi_{k-1},$$

где θ_k равно либо нулю (в этом случае $\psi_k(x)$ — собственная вектор-функция), либо единице (в этом случае $\psi_k(x)$ — присоединенная вектор-функция, $\lambda_k = \lambda_{k-1}$).

Пусть $L_p^{2m}(G)$, $p \geq 1$, — пространство $2m$ -компонентных вектор-функций

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_{2m}(x))^T,$$

$$\|f\|_{p,2m} = \left[\int_G \left(\sum_{i=1}^{2m} |f_i(x)|^2 \right)^{p/2} dx \right]^{1/p}.$$

В случае $p = \infty$ норма определяется равенством $\|f\|_{\infty,2m} = \sup_{x \in \overline{G}} |f(x)|$.

Очевидно, что для вектор-функций $f(x) \in L_p^{2m}(G)$, $g(x) \in L_q^{2m}(G)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $p \geq 1$, определено “скалярное произведение”

$$(f, g) = \int_G \sum_{i=1}^{2m} f_i(x) \overline{g_i(x)} dx.$$

Определение 1. Система $\{h_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_q^{2m}(G)$, $q \geq 2$, называется риссовой или удовлетворяющей неравенству Рисса (q -неравенствам Бесселя), если существует постоянная $M = M(p)$ такая, что для произвольной функции $f(x) \in L_p^{2m}(G)$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(f, h_k)|^q \leq M \|f\|_{p,2m}^q,$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Определение 2. Система $\{z_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^{2m}(G)$, $p \geq 1$, называется p -близкой в $L_p^{2m}(G)$ к системе $\{h_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L_p^{2m}(G)$, если имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k - h_k\|_{p,2m}^p < \infty.$$

Определение 3. Две последовательности элементов в банаховом пространстве X называются эквивалентными, если существует линейный ограниченный и ограниченно обратимый в X оператор, переводящий одну из этих последовательностей в другую.

В работе доказываются следующие основные утверждения.

Теорема 1 (критерий риссовости). Пусть $\Omega(x) \in L_1(G)$, $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — системы корневых вектор-функций оператора D и существует постоянная C_0 такая, что

$$|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq C_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда для риссовости системы $\left\{ \psi_k(x) \|\psi_k\|_{q,2m}^{-1} \right\}_{k=1}^\infty \subset L_q^{2m}(G)$ необходимо и достаточно существование константы M_1 , при которой для любого действительного числа ν выполняется неравенство

$$\sum_{|\operatorname{Re} \lambda_k - \nu| \leq 1} 1 \leq M_1. \quad (2)$$

Пусть на интервале G дана пара биортогональных систем

$$\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L_p^n(G), \quad \{v_k(x)\}_{k=1}^\infty \subset L_q^n(G), \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \quad 1 < p \leq 2.$$

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяет неравенству Рисса, т. е. для произвольной $f(x) \in L_p^n(G)$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^\infty |(f, v_k)|^q \leq M \|f\|_{p,n}^q, \quad (3)$$

где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p \leq 2$;

2) система $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ p -близка в $L_p^n(G)$ к некоторому базису $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$ пространства $L_p^n(G)$.

Тогда системы $\{u_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ являются базисами в пространствах $L_p^n(G)$ и $L_q^n(G)$ соответственно. При этом они эквивалентны соответственно базису $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и ее биортогонально сопряженной системе.

Пусть D^* — оператор, формально сопряженный к оператору D , т. е. $D^* = -B^* \frac{d}{dx} + \Omega^*(x)$, где $\Omega^*(x)$ — сопряженная матрица-функция к $\Omega(x)$, B^* — сопряженная матрица к матрице B . Обозначим через $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ биортогонально сопряженную систему $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и предположим, что она состоит из корневых вектор-функций оператора D^* , т. е.

$$D^* \varphi_k = \overline{\lambda_k} \varphi_k + \theta_{k+1} \varphi_{k+1}.$$

Теорема 3 (эквивалентная базисность). Пусть $1 < p \leq 2$, $\Omega(x) \in L_1(G)$, выполняются условия (1), (2), существует постоянная M_2 такая, что

$$\|\psi_k\|_{2,2m} \|\varphi_k\|_{2,2m} \leq M_2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

и система $\left\{ \psi_k(x) \|\psi_k\|_{p,2m}^{-1} \right\}_{k=1}^\infty$ p -близка к некоторому базису $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в $L_p^{2m}(G)$. Тогда системы $\left\{ \psi_k(x) \|\psi_k\|_{p,2m}^{-1} \right\}$ и $\left\{ \varphi_k(x) \|\psi_k\|_{p,2m} \right\}_{k=1}^\infty$ являются базисами в $L_p^{2m}(G)$ и $L_q^{2m}(G)$ соответственно, причем эти системы эквивалентны соответственно базису $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и его биортогонально сопряженной системе.

Замечание. Если в теореме 3 поменять ролями системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$, то получим базисность системы $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в $L_p^{2m}(G)$ при $p \geq 2$.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Приведем некоторые необходимые утверждения, которые будут использованы в доказательствах сформулированных выше теорем.

Утверждение 1 ([9]). *Если функции $p_i(x), i = \overline{1, 2m}$, принадлежат классу $L_1^{loc}(G)$ и точки $x - t, x, x + t$, находятся в интервала G , то для корневой вектор-функции $\psi_k(x)$ справедливы следующие формулы:*

$$\begin{aligned} \psi_k(x \pm t) = & \left[\cos \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \mp \sin \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right] \psi_k(x) \pm \\ & \pm B^{-1} \int_x^{x \pm t} \left(\sin \frac{\lambda_k(t - |\xi - x|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \mp \cos \frac{\lambda_k(t - |\xi - x|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \right) \times \\ & \times [\Omega(\xi) \psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \psi_k(x - t) + \psi_k(x + t) = & 2\psi_k(x) \cos \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \\ & + B^{-1} \int_{x-t}^{x+t} \left(\sin \frac{\lambda_k(t - |\xi - x|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \text{sign}(\xi - x) \times \right. \\ & \left. \times \cos \frac{\lambda_k(t - |\xi - x|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \right) [\Omega(\xi) \psi_k(\xi) - \theta_k \psi_{k-1}(\xi)] d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

где I — единичная матрица-функция.

Утверждение 2 ([9]). *Пусть функции $p_i(x), i = \overline{1, 2m}$, принадлежат классу $L_1(G)$. Тогда существуют константы $C_j(n_k, G, b_1, b_{m+1}), j = 1, 2$, не зависящие от λ_k , такие, что*

$$\|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m} \leq C_1(n_k, G, b_1, b_{m+1})(1 + |\text{Im} \lambda_k|) \|\psi_k\|_{\infty, 2m}, \quad (7)$$

$$\|\psi_k\|_{\infty, 2m} \leq C_2(n_k, G, b_1, b_{m+1})(1 + |\text{Im} \lambda_k|)^{1/r} \|\psi_k\|_{r, 2m}, \quad (8)$$

где n_k — порядок корневой вектор-функции $\psi_k(x)$, $r \geq 1$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Зафиксируем какое-либо действительное число ν . Введем множество индексов $I_\nu = \{k : |\text{Re} \lambda_k - \nu| \leq 1, |\text{Im} \lambda_k| \leq C_0\}$, где C_0 — постоянная из условия (1). Выберем такое положительное число R для любого множества $E \subset \overline{G}$, $\text{mes} E \leq 2R$, чтобы выполнялось неравенство $\omega(R) = \sup_{E \subset \overline{G}} \left\{ \|\Omega\|_{1, E} \right\} \leq L^{-1}$, где L — поло-

жительное число, которое выберем позже, а $\|\Omega\|_{1, E} = \int_E \left(\sum_{i=1}^{2m} |p_i(x)| \right) dx$.

Пусть $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Запишем формулу среднего значения (6) для точек $x, x+t, x+2t$, где $t \in [0, R]$:

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= 2\psi_k(x+t) \cos \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \psi_k(x+2t) + \\ &+ B^{-1} \int_x^{x+2t} \left\{ \sin \frac{\lambda_k(t-|x+t-\xi|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \text{sign}(\xi - x - t) \times \right. \\ &\times \left. \cos \frac{\lambda_k(t-|x+t-\xi|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \right\} [\Omega(\xi)\psi_k(\xi) - \theta_k\psi_{k-1}(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Добавим и вычтем функцию $2\psi_k(x+t) \cos \frac{\nu t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}}$ в правой части этого равенства и применим операцию $R^{-1} \int_0^R dt$, получим

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= 2R^{-1} \int_0^R \psi_k(x+t) \cos \frac{\nu t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} dt - R^{-1} \int_0^R \psi_k(x+2t) dt + \\ &+ 4R^{-1} \int_0^R \psi_k(x+t) \sin \frac{\lambda_k + \nu}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \sin \frac{\nu - \lambda_k}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} dt + \\ &+ R^{-1} B^{-1} \int_0^R \int_x^{x+2t} \left\{ \sin \frac{\lambda_k(t-|x+t-\xi|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \right. \\ &- \left. \text{sign}(\xi - x - t) \cos \frac{\lambda_k(t-|x+t-\xi|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \right\} [\Omega(\xi)\psi_k(\xi) - \theta_k\psi_{k-1}(\xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Применив формулу (5) в третьем слагаемом, имеем

$$\begin{aligned} \psi_k(x) &= R^{-1} \int_G \psi_k(z) V(z) dz + 4R^{-1} \int_0^R \left(\cos \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I - \right. \\ &- \left. \sin \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \right) \sin \frac{(\lambda_k + \nu)t}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \sin \frac{(\nu - \lambda_k)t}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} dt \psi_k(x) + \\ &+ 4R^{-1} B^{-1} \int_0^R \int_x^{x+t} \left\{ \sin \frac{\lambda_k(t-|\xi-x|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \cos \frac{\lambda_k(t-|\xi-x|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \right\} \times \\ &\times [\Omega(\xi)\psi_k(\xi) - \theta_k\psi_{k-1}(\xi)] \sin \frac{(\nu + \lambda_k)t}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \sin \frac{(\nu - \lambda_k)t}{2\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} dt + \\ &+ R^{-1} B^{-1} \int_0^R \int_x^{x+2t} \left\{ \sin \frac{\lambda_k(t-|x+t-\xi|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} \frac{B}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \cos \frac{\lambda_k(t-|x+t-\xi|)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} I \right\} \times \\ &\times [\Omega(\xi)u_k(\xi) - \theta_k u_{k-1}(\xi)] d\xi dt = R^{-1} \int_G u_k(z) V(z) dz + J_1 + J_2 + J_3, \end{aligned} \quad (9)$$

где $V(z) = 2 \cos \frac{\nu(x-z)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \frac{1}{2}$ при $x \leq z \leq x+R$, $V(z) = -\frac{1}{2}$ при $x+R < z \leq x+2R$, $V(z) = 0$ при $z \notin [x, x+2R]$.

Пусть $k \in I_\nu$. Оценим интегралы J_τ , $\tau = \overline{1, 3}$. Используя неравенства

$$|\sin z| \leq 2, \quad |\cos z| \leq 2, \quad |\sin z| \leq 2|z|, \quad (10)$$

для которых справедливы $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, получим

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq 8Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) |\nu - \lambda_k| |\psi_k(x)| \leq \\ &\leq 8Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \times \\ &\times (1 + |\operatorname{Im} \lambda_k|) |\psi_k(x)| \leq 8Rm \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) (1 + C_0) \|\psi_k\|_{\infty, 2m}. \end{aligned}$$

Применив (10) и неравенство Гёльдера при $p = 1$, $q = \infty$, находим

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq 32m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \left(\omega(R) \|u_k\|_{\infty, 2m} + \frac{R}{2} \|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m} \right), \\ |J_3| &\leq 2m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \left(\omega(R) \|\psi_k\|_{\infty, 2m} + R \|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m} \right). \end{aligned}$$

Учитывая эти оценки в равенстве (9) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} |\psi_k(x)| &\leq R^{-1} \left| \int_G \psi_k(z) V(z) dz \right| + 8 \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \times \\ &\times (R(1 + C_0) + 5\omega(R)) \|\psi_k\|_{\infty, 2m} + 18R \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \|\theta_k \psi_{k-1}\|_{\infty, 2m}. \quad (11) \end{aligned}$$

Аналогично доказываются неравенства (11) в случае $x \in \left[\frac{a+b}{2}, b \right]$. В этом случае $V(z) = -\frac{1}{2}$ при $x - 2R \leq z < x - R$, $V(z) = 2 \cos \frac{\nu(x-z)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} - \frac{1}{2}$ при $x - R \leq z \leq x$, $V(z) = 0$ при $z \notin [x - 2R, x]$.

Следовательно, неравенства (11) верны при любом $x \in \overline{G}$. Применив оценки (7), (8) с учетом $1 + |\operatorname{Im} \lambda_k| \leq 1 + C_0$ из неравенства (11) получим

$$\begin{aligned} |\psi_k(x)| &\leq R^{-1} \left| \int_G \psi_k(z) V(z) dz \right| + \\ &+ m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) \left\{ 40\omega(R) C_2(n_k, G, b_1, b_{m+1}) (1 + C_0)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + 8RC_2(n_k, G, b_1, b_{m+1}) (1 + C_0)^{1+1/q} + \right. \\ &\quad \left. + 18RC_1(n_k, G, b_1, b_{m+1}) C_2(n_k, G, b_1, b_{m+1}) \theta_k (1 + C_0)^{1+1/q} \right\} \|\psi_k\|_{q, 2m}. \end{aligned}$$

В силу равномерной ограниченности длины цепочек

$$40m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) C_2(n_k, G, b_1, b_{m+1}) \leq \gamma_1 = \text{const},$$

$$8m \left(\frac{2}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} + \frac{|b_1| + |b_{m+1}|}{|b_1 b_{m+1}|} \right) C_1(n_k, G, b_1, b_{m+1}) C_2(n_k, G, b_1, b_{m+1}) \leq \gamma_2 = \text{const.}$$

Следовательно,

$$|\psi_k(x)| \leq R^{-1} \left| \int_G \psi_k(z) V(z) dz \right| + \left\{ \omega(R) \gamma_1 (1 + C_0)^{1/q} + \gamma_1 R (1 + C_0)^{1+1/q} + \right. \\ \left. + R \gamma_2 \theta_k (1 + C_0)^{1+1/q} \right\} \|\psi_k\|_{q, 2m}.$$

Умножаем каждую сторону этого неравенства на $\|\psi_k\|_{q, 2m}^{-1}$, возводим в степень q и применяем неравенство $\left| \sum_{j=1}^n a_j \right|^q \leq n^{q-1} \sum_{j=1}^n |a_j|^q$, находим

$$|\psi_k(x)|^q \|\psi_k\|_{q, 2m}^{-q} \leq (2m+1)^{q-1} R^{-q} \left\{ \sum_{i=1}^{2m} \left| \int_G \psi_k^i(z) V(z) dz \right|^q \right\} \times \\ \times \|\psi_k\|_{q, 2m}^{-q} + (2m+1)^{q-1} \left\{ \gamma_1 L^{-1} (1 + C_0)^{1/q} + R \gamma_1 (1 + C_0)^{1+1/q} + R \gamma_2 \theta_k (1 + C_0)^{1+1/q} \right\}^q,$$

где $\psi_k(x) = (\psi_k^1(x), \psi_k^2(x), \dots, \psi_k^{2m}(x))^T$.

В силу неравенства Рисса и того, что $\|V\|_p^q = O(R^{q/p})$, получим

$$\sum_{k \in J} |\psi_k(x)|^q \|\psi_k\|_{q, 2m}^{-q} \leq 2m(2m+1)^{q-1} M R^{q(\frac{1}{p}-1)} + \\ + (2m+1)^{q-1} \left\{ \gamma_1 L^{-1} (1 + C_0)^{1/q} + R \gamma_1 (1 + C_0)^{1+1/q} + R \gamma_2 \theta_k (1 + C_0)^{1+1/q} \right\}^q \sum_{k \in J} 1,$$

где $J \subset I_\nu$ — произвольное конечное множество индексов k , которому соответствуют корневые функции $\psi_k(x)$. Интегрируя это неравенство по $x \in G$ и выбирая R настолько малым (следовательно, и число L^{-1}), чтобы имела место оценка

$$(2m+1)^{q-1} \left\{ \gamma_1 L^{-1} (1 + C_0)^{1/q} + R \gamma_1 (1 + C_0)^{1+1/q} + R \gamma_2 \theta_k (1 + C_0)^{1+1/q} \right\}^q < \frac{1}{2 \text{mes} G},$$

приходим к неравенству

$$\sum_{k \in J} 1 \leq 4m(2m+1)^{q-1} M R^{-1} \text{mes} G,$$

из которого в силу произвольности конечного множества J и равномерной ограниченности длины цепочек корневых вектор-функций следуют неравенства (2).

Достаточность. Для определенности возьмем $G = (0, 2\pi)$. Отметим, что в этом случае нам достаточно установить бесселевость системы $\left\{ \psi_k(x) \|\psi_k\|_{2, 2m}^{-1} \right\}_{k=1}^\infty$ в $L_2^{2m}(0, 2\pi)$. Действительно, в силу оценки (8) и условия (1) для любой вектор-функций $f(x) \in L_2^{2m}(0, 2\pi)$ выполняется неравенство

$$\sup_k \left| \int_0^{2\pi} f(x) \psi_k(x) \|\psi_k\|_{2, 2m}^{-1} dx \right| \leq \text{const} \|f\|_{1, 2m},$$

поэтому в силу интерполяционной теоремы Рисса–Торина (см., например, [29], с. 144) система $\left\{ \psi_k(x) \|\psi_k\|_{2, 2m}^{-1} \right\}_{k=1}^\infty$ будет риссовой.

С другой стороны, в силу оценки (8) и условий (1), (2) имеет место неравенство

$$\|\psi_k\|_{2,2m} \|\psi_k\|_{q,2m}^{-1} \leq (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|\psi_k\|_{\infty,2m} \|\psi_k\|_{q,2m}^{-1} \leq \text{const}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для любой $f(x) \in L_p^{2m}(0, 2\pi)$, $1 < p \leq 2$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(f, \psi_k \|\psi_k\|_{q,2m}^{-1} \right) \right|^q &= \sum_{k=1}^{\infty} \|\psi_k\|_{2,2m}^q \|\psi_k\|_{q,2m}^{-q} \left| \left(f, \psi_k \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \right) \right|^q \leq \\ &\leq \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(f, \psi_k \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \right) \right|^q \leq M_3 \|f\|_{p,2m}^q. \end{aligned}$$

Итак, нам необходимо доказать бесселевость системы $\left\{ \psi_k(x) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1} \right\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2^{2m}(0, 2\pi)$. Записывая формулу сдвига (5) для $\psi_k(x+t)$ при $x=0$ и умножая затем скалярно на вектор-функцию $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_{2m}(t))^T \in L_2^{2m}(0, 2\pi)$, заключаем, что для доказательства бесселевости системы $\varphi_k(t) = \psi_k(t) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$, $k = 1, 2, \dots$, в $L_2^{2m}(0, 2\pi)$ достаточно установить справедливость следующих неравенств:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \cos \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} dt \right|^2 |\varphi_k^i(0)|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}; \quad (12)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \sin \frac{\lambda_k t}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} dt \right|^2 |\varphi_k^{2m+1-i}(0)|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}; \quad (13)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t p_{2m+1-i}(\xi) \varphi_k^i(\xi) \sin \frac{\lambda_k(t-\xi)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}; \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t p_{2m+1-i}(\xi) \varphi_k^{2m+1-i}(\xi) \cos \frac{\lambda_k(t-\xi)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}; \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \theta_k \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t \frac{\psi_{k-1}^i(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}} \sin \frac{\lambda_k(t-\xi)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}; \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \theta_k \int_0^{2\pi} \overline{f_i(t)} \int_0^t \frac{\psi_{k-1}^{2m+1-i}(\xi)}{\|\psi_k\|_{2,2m}} \cos \frac{\lambda_k(t-\xi)}{\sqrt{|b_1 b_{m+1}|}} d\xi dt \right|^2 \leq C \|f\|_{2,2m}^2, \quad i = \overline{1, 2m}, \quad (17)$$

где $\varphi_k^i(\xi) = \psi_k^i(\xi) \|\psi_k\|_{2,2m}^{-1}$.

Неравенства (12)–(17) доказаны в работе [9].

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Из неравенства (3) и p -близости систем $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_p^n(G)$ следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (f, v_k)(u_k(x) - \tau_k(x))$ сходится в $L_p^n(G)$ для любой $f(x) \in L_p^n(G)$. Обозначим сумму этого ряда через Kf . В силу фундаментальности последовательности $K_n f = \sum_{k=1}^n (f, v_k)(u_k(x) - \tau_k(x))$ в $L_p^n(G)$ линейный оператор действует в $L_p^n(G)$, т. е. $Kf \in L_p^n(G)$ при $f(x) \in L_p^n(G)$. Очевидно, $\|Kf - K_n f\|_{p,n} = o(1)\|f\|_{p,n}$, т. е. последовательность

конечномерных операторов $\{K_n\}$ сходится к оператору K , а значит, этот оператор компактен в $L_p^n(G)$. Кроме того, $Ku_k = u_k - \tau_k$, т. е. $(E - K)u_k = \tau_k$, $k = 1, 2, \dots$, где E — единичный оператор.

Покажем, что оператор $E - K$ непрерывно обратим. Из компактности оператора и альтернативы Фредгольма следует, что если оператор $E - K$ необратим, то существует ненулевой элемент $g \in L_q^n(G)$ такой, что $(E - K)^*g = 0$. Элемент g удовлетворяет соотношению

$$(g, \tau_k) = (g, (E - K)u_k) = ((E - K)^*g, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда в силу базисности системы $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в $L_p^n(G)$ вытекает, что элемент g равен нулю. Полученное противоречие доказывает обратимость оператора $E - K$. Следовательно, система $\{u_k(x)\}$ является базисом в $L_p^n(G)$, эквивалентным базису $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$. Если обозначить через $\{y_k(x)\}_{k=1}^\infty$ биортогонально сопряженную к $\{\tau_k(x)\}_{k=1}^\infty$ систему, то $v_k(x) = (E - K)^*y_k(x)$. Это означает, что система $\{v_k(x)\}_{k=1}^\infty$ является базисом, эквивалентным базису $\{y_k(x)\}_{k=1}^\infty$ в $L_q^n(G)$.

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Так как система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ состоит из корневых вектор-функций формально сопряженного к D оператора D^* , то в силу теоремы 1 условия (1), (2) обеспечивают риссовость системы $\{\varphi_k(x) \|\varphi_k\|_{q,2m}^{-1}\}_{k=1}^\infty$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(f, \varphi_k \|\varphi_k\|_{q,2m}^{-1} \right) \right|^q \leq M \|f\|_{p,2m}^q \quad (18)$$

для любой вектор-функции $f(x) \in L_p^{2m}(G)$, где $1 < p \leq 2, p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Значит, системы $\{\psi_k(x) \|\psi_k\|_{p,2m}^{-1}\}_{k=1}^\infty$ и $\{\varphi_k(x) \|\varphi_k\|_{q,2m}^{-1}\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяют условиям теоремы 2. А это означает, что если в теореме 2 принять $u_k(x) = \psi_k(x) \|\psi_k\|_{p,2m}^{-1}$ и $v_k(x) = \varphi_k(x) \|\varphi_k\|_{q,2m}^{-1}$, то получим справедливость теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильин В.А. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка, Докл. АН СССР **273** (5), 1048–1053 (1983).
- [2] Курбанов В.М. О бесселевости и безусловной базисности систем корневых вектор-функций оператора Дирака, Дифференц. уравнения **32** (12), 1608–1617 (1996).
- [3] Kurbanov V.M., Abdullayeva A.M. Bessel property and basicity of the system of root vector-functions of Dirac operator with summable coefficient, Operators and Matrices **12** (4), 943–954 (2018).
- [4] Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Покомпонентная равномерная равносходимость разложений по корневых вектор-функциям оператора Дирака с тригонометрическим разложением, Дифференц. уравнения **48** (5), 648–662 (2012).
- [5] Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Абсолютная и равномерная сходимость разложений по корневых вектор-функциям оператора Дирака, Докл. РАН **446** (4), 380–383 (2012).
- [6] Курбанов В.М., Исмаилова А.И. Неравенство Рисса для систем корневых вектор-функций оператора Дирака, Дифференц. уравнения **48** (3), 334–340 (2012).
- [7] Kurbanov V.M., Ibadov E.J., Hajiyeva G.R. On Bessel property and unconditional basicity of the systems of root vector-functions of Dirac type operator, Azer. J. Math. **7** (2), 20–30 (2017).
- [8] Курбанов В.М., Буксаева Л.З. О неравенстве Рисса и базисности систем корневых вектор-функций разрывного оператора Дирака, Дифференц. уравнения **55** (8), 1079–1089 (2019).
- [9] Ибадов Э.Дж. О свойствах систем корневых вектор-функций оператора типа Дирака $2m$ -го порядка с суммируемым потенциалом, Дифференц. уравнения **59** (10), 1299–1317 (2023).

- [10] Trooshin I., Yamamota M. *Riesz basis of root vectors of a non-symmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems*, Appl. Anal. **80** (1), 19–51 (2002).
- [11] Djakov P., Mityagin B. *Bari-Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators*, Math. Nachr. **283** (3), 443–462 (2010).
- [12] Djakov P., Mityagin B. *Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions*, Indiana Univ. Math. J. **61** (1), 359–398 (2012).
- [13] Djakov P., Mityagin B. *Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators*, J. Funct. Anal. **263** (8), 2300–2332 (2012).
- [14] Savchuk A.M., Shkalikov A.A. *The Dirac operator with complex-valued summable potential*, Math. Notes. **96** (5), 777–810 (2014).
- [15] Савчук А.М., Садовническая И.В. *Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом*, Совр. матем. Фундамент. направления **58**, 128–152 (2015).
- [16] Lunyov A.A., Malamud M.M. *On the Riesz basis property of the root vector system for Dirac-type 2×2 systems*, Dokl. Math. **90** (2), 556–561 (2014).
- [17] Lunyov A.A., Malamud M.M. *On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac-type operators*, J. Math. Anal. Appl. **441** (1), 57–103 (2016).
- [18] Makin A.S. *On convergence of spectral expansions of Dirac operators with regular boundary conditions*, Math. Nachr. **295** (1), 189–210 (2022) (arXiv:1902.02952).
- [19] Lunyov A.A. *Criterion of Bari basis property for 2×2 Dirac-type operators with strictly regular boundary conditions*, Math. Nachr. **296** (9), 4125–4151 (2023).
- [20] Макин А.С. *О двухточечных задачах для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака*, Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прил. Темат. обзоры **194**, 144–154 (2021).
- [21] Birkhoff G.D., Langer R.E. *The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order*, Proc. Amer. Acad. Arts Sci. **58** (2), 51–128 (1923).
- [22] Корнев В.В., Хромов А.П. *Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями*, Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Матем. Механ. Информатика **13** (3), 28–35 (2013).
- [23] Marchenko V.A. *Sturm–Liouville operators and applications Operator Theory*. Adv. Appl. **22** (Birkhauser Verlag, Basel, 1986).
- [24] Malamud M.M., Oridoroga L.L. *On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations*, J. Funct. Anal. **263**, 1939–1980 (2012).
- [25] Mykytnyk Ya.V., Puyda D.V. *Bari–Markus property of Dirac operators*, Mat. Stud. **40** (2), 165–171 (2013).
- [26] Lunyov A.A., Malamud M.M. *On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications*, JST **5** (1), 17–70 (2015).
- [27] Шкаликов А.А. *Регулярные спектральные задачи гиперболического типа для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*, Матем. заметки **110** (5), 796–800 (2021).
- [28] Lunyov A.A., Malamud M.M. *On transformation operators and Riesz basis property of root vectors system for $n \times n$ Dirac-type operators*, Appl. to the Timoshenko beam model, arXiv:2112.07248..
- [29] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т. 2 (Мир, М., 1965).

Эльчин Джамад оглы Ибадов

Азербайджанский государственный педагогический университет,
ул. Узеира Гаджибейли, д. 68, г. Баку, AZ1000, Азербайджанская республика,

e-mail: e.c_ibadov@yahoo.com

E.J. Ibadov

On the Riesz inequality and the basicity of systems of root vector functions of $2m$ th order Dirac-type operator with summable coefficient

Abstract. We consider a Dirac-type operator of $2m$ th order on a finite interval $G = (a, b)$. It is assumed that its coefficient is a complex-valued matrix function summable on $G = (a, b)$. A Riesz property criterion is established for a system of root vector functions, and a theorem on the equivalent basis property in $L_p^{2m}(G)$, $1 < p < \infty$ is proved.

Keywords: operator of Dirac-type, root vector function, Riesz inequality, equivalent basis property.

Elchin Jamal ogly Ibadov

Azerbaijan State Pedagogical University Baku,

68 Uzeyir Hajibeyov str., Baku, AZ1000 Republic of Azerbaijan,

e-mail: e.c_ibadov@yahoo.com