

В.В. АМЕЛЬКИН, В.Ю. ТЫЩЕНКО

ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ И ФОКУСЫ ДВУМЕРНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Рассматриваются двумерные автономные системы дифференциальных уравнений вида $\dot{x} = -y - P(x, y), \dot{y} = x + Q(x, y)$, где P и Q — голоморфные функции порядка большего или равного двум. В работе получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых центр или фокус являются изохронными особыми точками. Эти условия сформулированы в терминах коммутирующих дифференциальных систем и одной из нормальных форм.

Ключевые слова: двумерная голоморфная дифференциальная система, изохронный центр, изохронный фокус, коммутирующая дифференциальная система, нормальная форма.

УДК: 517.925

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-11-3-11

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим вещественную дифференциальную систему

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \quad (1)$$

где P и Q — голоморфные в окрестности G начала координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости xOy функции, не содержащие в своих разложениях в степенные ряды линейных и свободных членов.

Как хорошо известно, начало координат $O(0, 0)$, как изолированная особая точка системы (1), является либо центром, либо негрубым фокусом.

Основные методы, используемые для изучения монодромных особых точек голоморфных дифференциальных систем вида (1) могут быть грубо классифицированы на две категории: метод нормальных форм и метод коммутирующих дифференциальных систем.

Одной из нормальных форм является нормальная форма Пуанкаре–Дюлака (см., например, [1], с. 565). Именно, имеет место следующее утверждение ([2], теорема 4.1): *в окрестности $G^* \subseteq G$ особой точки $O(0, 0)$ системы (1) всегда существует замена переменных*

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} A_{ij} x^i y^j, \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} B_{ij} x^i y^j, \quad (2)$$

вообще говоря, формальная, переводящая (1) в систему вида

$$\dot{u} = -v\Phi_1(u^2 + v^2) + u\Phi_2(u^2 + v^2), \quad \dot{v} = u\Phi_1(u^2 + v^2) + v\Phi_2(u^2 + v^2), \quad (3)$$

где $\Phi_1(w) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i w^i$, $\Phi_2(w) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j w^j$ (см. также [3], пример 1.22, нормальная форма порядка r).

Замечание 1. В случае центра $O(0,0)$ голоморфной системы (1) (в нормальной форме (3) $\Phi_2(w) \equiv 0$) преобразование (2) является сходящимся. В случае фокуса $O(0,0)$ голоморфной системы (1) (в нормальной форме (3) $\Phi_2(w) \not\equiv 0$) нельзя гарантировать существование сходящейся замены переменных (2) ([4], [5]).

Что же касается понятия изохронной монодромной особой точки, голоморфной в окрестности этой особой точки системы (1), не вдаваясь в подробности, отметим, что существуют несколько определений этого понятия. Одно из них приведено в работе [6], в которой центр или фокус называется изохронным, если все изображающие точки, начиная двигаться по траекториям центра или фокуса системы (1) с некоторого луча OA в момент времени $t = t_0$, совершают полный оборот вокруг начала за одно и то же время $T = 2\pi$.

Другое определение как раз связано с нормальной формой Пуанкаре–Дюлака. А именно, центр или фокус голоморфной системы (1) называют изохронным, если в нормальной форме Пуанкаре–Дюлака функция $\Phi_1 \equiv 1$. Объяснение этому очень простое: в полярных координатах (r, φ) одно из дифференциальных уравнений полученной системы записывается в виде $\dot{\varphi} = 1$, а значит, время T полного оборота всех изображающих точек траекторий центра или фокуса вокруг точки $O(0,0)$, начинающих движение с любого луча с началом в точке $O(0,0)$, одно и то же, равно 2π (более подробно об этом подходе см. ниже).

Обращаясь к методу коммутирующих дифференциальных систем, прежде всего напомним, что две дифференциальные системы

$$\begin{aligned} \dot{z} &= V(z), \quad V \equiv (V_1, V_2) \in C^k(G, \mathbb{R}^2), \quad k \geq 2, \\ \dot{z} &= W(z), \quad W \equiv (W_1, W_2) \in C^k(G, \mathbb{R}^2), \quad k \geq 2, \end{aligned} \quad (4)$$

где G — открытое, связное подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$, называются коммутирующими, если векторные поля V и W , заданные соответственно правыми частями систем (4), коммутируют, т. е. тогда и только тогда, когда [7] в неособой точке справедливы тождества

$$\begin{aligned} [V, W]_1 &= \left(V_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} - W_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) + \left(V_2 \frac{\partial W_1}{\partial y} - W_2 \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \equiv 0, \\ [V, W]_2 &= \left(V_1 \frac{\partial W_2}{\partial x} - W_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} \right) + \left(V_2 \frac{\partial W_2}{\partial y} - W_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) \equiv 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Основополагающим утверждением в методе коммутирующих дифференциальных систем, касающимся изохронного центра системы (1), является следующая теорема 1 работы Н.Н. Ладиса [8]: *для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений (1) имела в начале координат изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы существовала голоморфная в окрестности точки $O(0,0)$ система*

$$\dot{x} = x + M(x, y), \quad \dot{y} = y + N(x, y),$$

где M и N не содержат линейных и свободных членов, коммутирующая с (1).

Замечание 2. Отметим, что после опубликования работы [8] были получены некоторые частные результаты об изохронных центрах системы (1) (см., например, [9], теорема 4.5; [10], теорема 2; [11], теорема 3). И только спустя двадцать четыре года теорема Н.Н. Ладиса была

сформулирована и передоказана в работе ([12], теорема 2.3) с гладкими функциями M и N .

Что же касается случая негрубого фокуса $O(0,0)$ голоморфной системы (1), то здесь отметим работы [13], [14].

В частности, в первой из последних указанных работ дается определение изохронного фокуса системы (1) (определение 3) в следующей формулировке: *фокус $O(0,0)$ системы (1) называется изохронным, если существует локальная голоморфная замена переменных, переводящая систему (1) в систему, принимающую в полярных координатах (r, φ) , где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arg(y/x)$, вид*

$$\dot{r} = f(r, \varphi), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Далее выводятся некоторые достаточные условия, при выполнении которых начало координат $O(0,0)$ системы (1) является изохронным фокусом. Приводятся примеры.

В работе [14] особая точка $O(0,0)$ голоморфной системы (1) называется изохронной (определение 2.2), если существует локальная голоморфная замена переменных, переводящая систему (1) в голоморфную систему, принимающую в полярных координатах вид

$$\dot{r} = rf(r, \varphi), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Поскольку в нормальной форме (3) в случае фокуса $O(0,0)$ системы (1) ряды (2), вообще говоря, расходятся, то естественно получить необходимые и достаточные условия, при выполнении которых ряды (2) являются сходящимися.

Подчеркнем, что дальнейшие исследования голоморфной системы (1) основываются на определении изохронного фокуса $O(0,0)$ с точки зрения приведения системы (1) к специальной нормальной форме.

Определение 1. Назовем особую точку $O(0,0)$ системы (1) *изохронным фокусом*, если в некоторой окрестности $G^* \subseteq G$ точки $O(0,0)$ существует биголоморфизм вида (2), переводящий систему (1) в голоморфную нормальную форму

$$\dot{u} = -v + u\Phi(u^2 + v^2), \quad \dot{v} = u + v\Phi(u^2 + v^2), \quad (6)$$

где $\Phi(w) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j w^j \neq 0$.

Определение 2. Будем говорить, что особая точка $O(0,0)$ системы (1) называется *изохронным центром*, если в некоторой окрестности $G^* \subseteq G$ точки $O(0,0)$ существует биголоморфизм вида (2), переводящий систему (1) в нормальную форму

$$\dot{u} = -v, \quad \dot{v} = u. \quad (7)$$

Далее, наряду с системой (1) рассмотрим вспомогательную дифференциальную систему

$$\dot{x} = x + X(x, y), \quad \dot{y} = y + Y(x, y), \quad (8)$$

где X и Y — голоморфные в окрестности G начала координат $O(0,0)$ функции, не содержащие в своих разложениях в степенные ряды линейных и свободных членов, которая имеет в особой точке $O(0,0)$ узел.

Согласно теореме Пуанкаре ([15], с. 173) и теореме 8.1.1 ([16], с. 254) система (8) в некоторой окрестности $G^* \subseteq G$ посредством биголоморфизма вида

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j \equiv x + \alpha(x, y), \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j \equiv y + \beta(x, y) \quad (9)$$

биголоморфно эквивалентна системе

$$\dot{u} = u, \quad \dot{v} = v, \quad (10)$$

причем биголоморфизм (9) определяется единственным образом.

Теорема 1 (обобщенная теорема Н.Н. Ладиса). *Для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений (1) имела изохронный центр $O(0, 0)$, необходимо и достаточно существование системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + X(x, y))S((x + \alpha(x, y))^2 + (y + \beta(x, y))^2), \\ \dot{y} &= (y + Y(x, y))S((x + \alpha(x, y))^2 + (y + \beta(x, y))^2), \end{aligned} \quad (11)$$

где $S(w(x, y))$ — или отличная от нуля константа, или первый интеграл системы (1) в некоторой окрестности $G^* \subseteq G$ точки $O(0, 0)$, коммутирующей с (1).

Доказательство. В случае константы, отличной от нуля, которую, не умаляя общности, можно считать единицей, теорема 1 принимает формулировку теоремы 1. Поэтому в дальнейшем речь идет только о первом интеграле S , отличном от тождественной константы.

Необходимость. Пусть голоморфная система (1) имеет в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр. Докажем, что в этом предположении существует система (11), где $S(w(x, y))$ — первый интеграл системы (1), коммутирующая с (1).

Итак, по определению 2 биголоморфизм (9) в окрестности $G^* \subseteq G$ переводит систему (1) в нормальную форму (7). Но, как легко проверить, системы (7) и

$$\dot{u} = uS(u^2 + v^2), \quad \dot{v} = vS(u^2 + v^2) \quad (12)$$

коммутируют. Значит, коммутируют системы (1) и (11), где посредством обратного к биголоморфизму (9) система (12) переходит в систему (11), где $S(w(x, y))$ — первый интеграл системы (1) в окрестности $G^* \subseteq G$.

Достаточность. Пусть существует голоморфная в окрестности $G^* \subseteq G$ особой точки $O(0, 0)$ система (11), где $S(w(x, y))$ — первый интеграл системы (1), коммутирующая с (1). Докажем, что голоморфная система (1) имеет в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр.

Действительно, поскольку биголоморфизм (9) переводит систему (8) в (10), то вычисления показывают, что этот же биголоморфизм переводит систему (11) в (12)

В самом деле,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} + \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij} (ix^{i-1}y^j \dot{x} + jx^i y^{j-1} \dot{y}) = ((x + X(x, y)) + \\ &+ \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij} (ix^{i-1}y^j (x + X(x, y)) + jx^i y^{j-1} (y + Y(x, y)))) S(u^2(x, y) + v^2(x, y)) = uS(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= \dot{y} + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} (ix^{i-1}y^j \dot{x} + jx^i y^{j-1} \dot{y}) = ((y + Y(x, y)) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} (ix^{i-1}y^j(x+X(x,y)) + jx^iy^{j-1}(y+Y(x,y))) S(u^2(x,y) + v^2(x,y)) = vS(u^2 + v^2).$$

Но, как хорошо известно, голоморфная в окрестности особой точки $O(0,0)$ система (1) имеет в точке $O(0,0)$ изохронный центр тогда и только тогда, когда под действием биголоморфизма вида (9) система (1) преобразуется в систему (7), где $S(u^2 + v^2)$ — ее первый интеграл. А поскольку биголоморфизм (9) единствен при преобразовании системы (11) в (12), то и система (1) переводится в систему (7) тем же единственным биголоморфизмом (9). Следовательно, система (1) имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр. $\square$

Теорема 2. *Для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений (1) имела изохронный фокус $O(0,0)$, необходимо и достаточно существование голоморфной в окрестности точки $O(0,0)$ системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + X(x, y))\Phi((x + \alpha(x, y))^2 + (y + \beta(x, y))^2), \\ \dot{y} &= (y + Y(x, y))\Phi((x + \alpha(x, y))^2 + (y + \beta(x, y))^2), \end{aligned} \quad (13)$$

где Φ — функция из нормальной формы определения 1, коммутирующей с (1).

Доказательство. Необходимость. Пусть голоморфная система (1) имеет в особой точке $O(0,0)$ изохронный фокус. Покажем, что в этом предположении существует голоморфная в окрестности $G^* \subseteq G$ точки $O(0,0)$ система (13), коммутирующая с (1).

Действительно, согласно определению 1 биголоморфизм (9) переводит систему (1) в голоморфную нормальную форму (6), где $\Phi(w) \not\equiv 0$. Но вычисления показывают, что системы (6) и

$$\dot{u} = u\Phi(u^2 + v^2), \quad \dot{v} = v\Phi(u^2 + v^2) \quad (14)$$

коммутируют. При этом обратный к биголоморфизму (9) переводит систему (14) в (13). Таким образом, системы (13) и (1) коммутируют.

Достаточность. Пусть существует голоморфная в окрестности точки $O(0,0)$ система (13), коммутирующая с (1). Докажем, что в этом случае голоморфная система (1) имеет в точке $O(0,0)$ изохронный фокус.

Именно, так как биголоморфизм (9) преобразует систему (8) в (10), то этот же биголоморфизм преобразует систему (13) в (14) (по аналогии с вычислениями, проведенными при доказательстве достаточности теоремы 1).

Под действием биголоморфизма (9) система (1) переходит, вообще говоря, в голоморфную систему вида

$$\dot{u} = -v + R(u, v), \quad \dot{v} = u + S(u, v), \quad (15)$$

где R и S — голоморфные в окрестности $G^* \subseteq G$ функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды линейных и свободных членов.

А так как существует система (13), коммутирующая с (1), а биголоморфизм (9) переводит систему (13) в (14), то системы (14) и (15) должны коммутировать.

Это означает, что для векторных полей систем (14) и (15), полагая соответственно

$$V \equiv (u\Phi(u^2 + v^2), v\Phi(u^2 + v^2)) \text{ и } W \equiv (-v + R(u, v), u + S(u, v)), \quad (16)$$

справедливы тождества (5). Но для соотношений (16) тождества (5) в данном случае принимают вид

$$\begin{aligned} \left(u \frac{\partial R}{\partial u} + v \frac{\partial R}{\partial v} - R \right) \Phi &\equiv 2u(uR + vS) \frac{\partial \Phi}{\partial w}, \\ \left(u \frac{\partial S}{\partial u} + v \frac{\partial S}{\partial v} - S \right) \Phi &\equiv 2v(uR + vS) \frac{\partial \Phi}{\partial w}. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее на основании тождеств (17) получаем

$$\frac{u \frac{\partial R}{\partial u} + v \frac{\partial R}{\partial v} - R}{u \frac{\partial S}{\partial u} + v \frac{\partial S}{\partial v} - S} \equiv \frac{u}{v}. \quad (18)$$

Имея теперь в виду разложения голоморфных функций R и S в степенные ряды, составим функциональные ряды по однородным полиномам $p_s(u, v)$ и $q_s(u, v)$, $s = \overline{2, \infty}$, соответственно в виде

$$R(u, v) = \sum_{s=2}^{\infty} p_s(u, v), \quad S(u, v) = \sum_{s=2}^{\infty} q_s(u, v). \quad (19)$$

Из представлений (19) и теоремы Эйлера об однородной функции приходим к тождествам

$$\begin{aligned} u \frac{\partial R}{\partial u} + v \frac{\partial R}{\partial v} - R(u, v) &\equiv \sum_{s=2}^{\infty} (s-1) p_s(u, v), \\ u \frac{\partial S}{\partial u} + v \frac{\partial S}{\partial v} - S(u, v) &\equiv \sum_{s=2}^{\infty} (s-1) q_s(u, v). \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом, с учетом представлений (20) соотношения (18) запишутся так:

$$\frac{\sum_{s=2}^{\infty} (s-1) p_s(u, v)}{\sum_{s=2}^{\infty} (s-1) q_s(u, v)} \equiv \frac{u}{v}. \quad (21)$$

Тождества (21) означают, что

$$p_s(u, v) \equiv u r_s(u, v), \quad q_s(u, v) \equiv v r_s(u, v), \quad s = \overline{2, \infty}. \quad (22)$$

А тогда из (19), (22) вытекают тождества

$$R(u, v) \equiv u \Psi(u, v), \quad S(u, v) \equiv v \Psi(u, v), \quad (23)$$

где $\Psi \not\equiv 0$ — некоторая голоморфная функция. Следовательно, система (15) такова:

$$\dot{u} = -v + u \Psi(u, v), \quad \dot{v} = u + v \Psi(u, v). \quad (24)$$

Подставляя, далее, значения R и S из (23) в оба тождества системы (17), получаем одно тождество

$$\left(u \frac{\partial \Psi}{\partial u} + v \frac{\partial \Psi}{\partial v} \right) \Phi \equiv 2(u^2 + v^2) \Psi \Phi'_w,$$

на основании которого приходим к соотношению

$$u \frac{\partial \ln |\Psi|}{\partial u} + v \frac{\partial \ln |\Psi|}{\partial v} \equiv 2(u^2 + v^2)(\ln |\Phi|)'_w.$$

Поэтому функция $\ln |\Psi|$ удовлетворяет следующему линейному неоднородному уравнению в частных производных первого порядка относительно ξ :

$$u \frac{\partial \xi}{\partial u} + v \frac{\partial \xi}{\partial v} = 2(u^2 + v^2)(\ln |\Phi|)'_w. \quad (25)$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме для уравнения (25) запишется в виде

$$\frac{2du}{u} = \frac{2dv}{v} = \frac{d\xi}{(u^2 + v^2)(\ln |\Phi|)'_w}. \quad (26)$$

Используя теперь свойство ряда равных отношений (свойство производной пропорции), из (26) находим, что

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{(u^2 + v^2)} = \frac{d\xi}{(u^2 + v^2)(\ln |\Phi|)'_w},$$

и поэтому

$$d\xi = (\ln |\Phi|)'_w d(u^2 + v^2),$$

откуда

$$\Psi(u^2 + v^2) = C\Phi(u^2 + v^2), \quad (27)$$

где C — произвольная постоянная, не равная нулю.

Таким образом, поскольку биголоморфизм вида (9) переводит систему (13) в (14) и он определяется единственным образом, а система (14) должна коммутировать с (6), причем система (1) переходит при том же биголоморфизме в систему (24), где $\Psi(u, v)$ задается соотношением (27), приходим к выводу, что при $C = 1$ голоморфная система (1) на основании определения 1 имеет в точке $O(0, 0)$ изохронный фокус. $\square$

Замечание 3. Подчеркнем следующее. Доказательство теоремы 2 основывается, в частности, на том, что в силу единственности биголоморфизма (9), переводящего систему (8) с узлом в особой точке $O(0, 0)$ в линейную нормальную форму (10), этот же биголоморфизм переводит систему (1) с фокусом в особой точке $O(0, 0)$ в нормальную голоморфную форму (6), где $\Phi(w) \not\equiv 0$.

Из теорем 1, 2 вытекает

Следствие. Для того чтобы голоморфная система дифференциальных уравнений (1) имела изохронную особую точку $O(0, 0)$, необходимо и достаточно существование голоморфной в окрестности точки $O(0, 0)$ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + X(x, y))T((x + \alpha(x, y))^2 + (y + \beta(x, y))^2), \\ \dot{y} &= (y + Y(x, y))T((x + \alpha(x, y))^2 + (y + \beta(x, y))^2), \end{aligned}$$

где $T(w(x, y)) \not\equiv 0$ — голоморфный в окрестности точки $O(0, 0)$ ряд, коммутирующий с (1).

Пример 1. Рассмотрим дифференциальную систему (1) вида

$$\dot{x} = -y - x^3, \quad \dot{y} = x + 3x^2(y + x^3).$$

Биголоморфизм (9), имеющий здесь вид $u = x$, $v = y + x^3$, переводит систему (1) в (7). Система (8) имеет вид $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y - 2x^3$ и биголоморфизмом (9) переводится в (10).

Система (12) записывается так:

$$\dot{u} = u(u^2 + v^2), \quad \dot{v} = v(u^2 + v^2),$$

и, таким образом, (11) — это система

$$\dot{x} = x(x^2 + (y + x^3)^2), \quad \dot{y} = (y - 2x^3)(x^2 + (y + x^3)^2),$$

которая коммутирует с (1).

Поэтому в соответствии с теоремой 1 система (1) имеет в особой точке $O(0, 0)$ изохронный центр.

Пример 2. Пусть дана система дифференциальных уравнений (1) вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^2 + x(x^2 + (y + x^2)^2)^2, \\ \dot{y} &= x + 2x(y + x^2) + (y - x^2)(x^2 + (y + x^2)^2)^2. \end{aligned}$$

Биголоморфизмом (9) вида $u = x$, $v = y + x^2$ система (1) преобразуется в систему вида (6):

$$\dot{u} = -v + u(u^2 + v^2)^2, \quad \dot{v} = u + v(u^2 + v^2)^2,$$

где $\Phi(u^2 + v^2) \equiv (u^2 + v^2)^2$.

Система (8) здесь такова: $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y - x^2$. Эту систему биголоморфизм (9) преобразует в (10).

Система (14) в данном случае имеет вид

$$\dot{u} = u(u^2 + v^2)^2, \quad \dot{v} = v(u^2 + v^2)^2,$$

а следовательно, (13) записывается в виде

$$\dot{x} = x(x^2 + (y + x^2)^2)^2, \quad \dot{y} = (y - x^2)(x^2 + (y + x^2)^2)^2.$$

Последняя система коммутирует с (1). Значит, по теореме 2 система (1) имеет в особой точке $O(0, 0)$ изохронный фокус.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Algaba A., Reyes M. *Characterizing isochronous points and computing isochronous sections*, J. Math. Anal. Appl. **355** (2), 564–576 (2009).
- [2] Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П. *Нелинейные колебания в системах второго порядка* (БГУ, Минск, 1982).
- [3] Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. *Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости* (МЦНМО, М., 2005).
- [4] Брюно А.Д. *Аналитическая форма дифференциальных уравнений*, Тр. Московск. матем. об-ва **25**, 119–262 (1971).
- [5] Токарев С.П. *Гладкая эквивалентность систем дифференциальных уравнений на плоскости в случае фокуса*, Дифференц. уравнения **13** (5), 892–897 (1977).
- [6] Абдуллаев Н. *Об изохронности при нелинейных колебаниях*, Тр. Таджикс. учительск. ин-та им. С.С. Айни **2**, 71–78 (1954).
- [7] Волокитин Е.П., Иванов В.В. *Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей*, Сиб. матем. журн. **40** (1), 30–48 (1999).
- [8] Ладис Н.Н. *Коммутирующие векторные поля и изохронность*, Вестн. Белорусск. гос. ун-та. Сер. 1 (1), 21–24 (1976).
- [9] Villarini M. *Regularity properties of the period function near a center of a planar vector field*, Nonlinear Anal. **8**, 787–803 (1992).
- [10] Sabatini M. *Characterizing isochronous centers by Lie brackets*, Diff. Equat. Dynam. Syst. **5** (1), 91–99 (1997).
- [11] Llibre J., Ramirez R., Ramirez V., Sadovskaia N. *Centers and uniform isochronous centers of planar polynomial differential systems*, J. Dyn. Diff. Equat. **30** (3), 1295–1310 (2018).
- [12] Algaba A., Freire E., Gamero E. *Isochronicity via normal form*, Qual. Theory Dynam. Syst. **1** (5), 133–156 (2000).

- [13] Giné J. *Isochronous foci for analytic differential systems*, Int. J. Bifurcation Chaos. **13** (6), 1617–1623 (2003).
- [14] Giné J., Grau M. *Characterization of isochronous foci for planar analytic differential systems*, Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A.: Math. **135** (5), 985–998 (2005).
- [15] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (Наука, М., 1978).
- [16] Бибигов Ю.Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений* (Высш. шк., М., 1991).

Владимир Васильевич Амелкин

*Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,
e-mail: vamlkn@mail.ru*

Валентин Юрьевич Тыщенко

*Гродненский государственный университет,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,
e-mail: valentinet@mail.ru*

V.V. Amel'kin and V.Yu. Tyshchenko

Isochronous centers and foci of two-dimensional holomorphic differential systems

Abstract. Two-dimensional autonomous systems of differential equations of the form $\dot{x} = -y - P(x, y)$, $\dot{y} = x + Q(x, y)$, where P and Q are holomorphic functions of order greater than or equal two are considered. In this work, necessary and sufficient conditions for the existence of an isochronous center or focus are obtained. These conditions are formulated in terms of commuting differential systems and some normal form.

Keywords: two-dimensional holomorphic differential system, isochronous center, isochronous focus, commuting differential system, normal form.

Vladimir Vasilievich Amel'kin

*Belorussian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,
e-mail: vamlkn@mail.ru*

Valentin Yurievich Tyshchenko

*Grodno State University,
4 Oszechko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,
e-mail: valentinet@mail.ru*