

Краткое сообщение

В.Н. ПАЙМУШИН, В.М. ШИШКИН

**ПРОСТЕЙШАЯ ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ, ЗАКРЕПЛЕННОГО НА
ДВУСТОРОННЕМ ОПОРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ
ПРОСЛОЙКИ**

Аннотация. Построена предельно упрощенная трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, состоящего из двух участков по длине. Она основана на использовании на незакрепленном участке классической геометрически нелинейной модели Кирхгофа–Лява, а закрепленный участок конечной длины считается соединенным с жестким и неподвижным опорным элементом через упругие прослойки. На закрепленном участке прогибы стержня и прослоек считаются нулевыми, а для перемещений в осевом направлении в пределах толщин стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко, подчиненные условиям непрерывности в точках их соединения между собой и неподвижности в точках соединения прослоек с опорным элементом. Сформулированы условия кинематического сопряжения незакрепленного и закрепленного участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Даламбера–Лагранжа, выведены для рассмотренных участков соответствующие уравнения движения и граничные условия, а также силовые условия сопряжения участков.

Ключевые слова: стержень-полоса, незакрепленный и закрепленный участки, геометрическая нелинейность, модель С.П. Тимошенко, уравнения движения, кинематические и силовые условия сопряжения участков.

УДК: 534

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-98-106

ВВЕДЕНИЕ

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах, обычно, заменяют граничными условиями того или иного вида (например, шарнирного опирания или жесткого защемления (см., например, [1]–[3]), что, безусловно, вносит погрешность в решениях данных задач. Так, например, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции с рассмотрением лишь их отдельных участков и формулировкой в

Поступила в редакцию 19.06.2024, после доработки 19.06.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (проект № 23-19-00021, разделы 1–3) и в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования (проект FZSU-2024, раздел 4).

концевых сечениях кинематических граничных условий защемления может иметь недостаточную степень точности, если не учесть, что места крепления конструкции всегда имеют некоторую конечную длину, в пределах которой необходимо учитывать податливость закрепленных участков.

Расчет конструкции с учетом податливости отмеченных участков закрепления конечной длины представляет весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлиненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих работах (например, [4]–[7] и др.).

В ранее выполненных работах авторов ([8]–[10] и др.) было показано, что для описания процессов статического и динамического деформирования удлиненных элементов тонкостенных конструкций (в том числе и плоских стержней), имеющих участки закрепления конечной длины, требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния и применяемых для их описания математических моделей, имеющей место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному). В них рассматривался простейший тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы с участками закрепления, расположенными только на одной из лицевых поверхностей, что, обычно, имеет место при креплении элементов тонкостенных конструкций к опорным элементам или соединении их между собой внахлест (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов). Для таких элементов в простейшем варианте учет податливости участков закрепления конечной длины может состоять в преобразовании известной сдвиговой модели С.П. Тимошенко в другую, названную трансформационной.

Если же закрепление участка конечной длины является двухсторонним, т. е. осуществляется по обеим лицевым поверхностям, то учет податливости закрепленного участка на основе отмеченной модели, как показано в работе [8], невозможен. Для этого требуется привлечение моделей деформирования более высокого порядка точности. Применительно к незакрепленным участкам тонкостенных элементов конструкций разработке таких моделей к настоящему времени посвящена обширная научная литература, критический анализ которой проведен, в частности, в статьях [11], [12].

В настоящей работе рассматривается задача математического моделирования процессов динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на жестком и неподвижном опорном элементе через упругие прослойки. В отличие от упомянутых выше моделей деформирования высокого порядка точности, для решения рассматриваемой задачи предлагается трансформационная модель деформирования стержня с простейшими аппроксимациями перемещений на его участках: на закрепленных для стержня и прослоек используется сдвиговая модель С.П. Тимошенко при нулевых прогибах в поперечном направлении, а для незакрепленного — классическая геометрически нелинейная модель Кирхгофа–Лява.

1. ПРЕДЕЛЬНО УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УЧАСТКА ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Рассмотрим стержень-полосу, имеющий единичную ширину, а в направлении оси x – участок закрепления конечной длины l в абсолютно жестком опорном элементе \mathcal{Z} , соединенном со стержнем через упругие прослойки 1 и 2 (рис.1), работающие на сдвиг. Рассмотрим декартовые системы координат oxz , $o_1xz_{(1)}$, $o_2xz_{(2)}$, через h и t обозначим толщины стержня и прослоек, считая, что их деформирование в точках поверхностей $z = \pm h/2$, $z_{(1)} = t/2$, $z_{(2)} = -t/2$ происходит без взаимного проскальзывания.

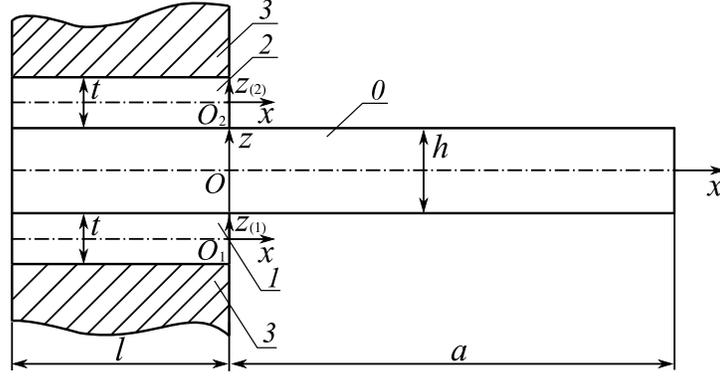


Рис. 1. Схема закрепления стержня-полосы 0 в опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2

В простейшем приближении процесс деформирования стержня будем описывать сдвиговой моделью С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для перемещений $U^{(0)}, W^{(0)}$ произвольных точек поперечных сечений в направлениях осей ox, oz на участке закрепления примем аппроксимации

$$U^{(0)} = u^{(0)} + z\gamma^{(0)}, \quad W^{(0)} \equiv 0, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (1)$$

а для перемещений $U^{(k)}, W^{(k)}$ ($k = 1, 2$) прослоек – аналогичные аппроксимации

$$U^{(k)} = u^{(k)} + z_{(k)}\gamma^{(k)}, \quad W^{(k)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad -t/2 \leq z_{(k)} \leq t/2. \quad (2)$$

Подчинив перемещения $U^{(0)}, U^{(k)}$ кинематическим условиям сопряжения стержня с прослойками, записываемым в виде

$$U^{(0)}(x, z = -h/2) = U^{(1)}(x, z_{(1)} = t/2), \quad U^{(0)}(x, z = h/2) = U^{(2)}(x, z_{(2)} = -t/2),$$

и считая у прослоек точки поверхностей $z_{(1)} = -t/2, z_{(2)} = t/2$ неподвижными

$$U^{(1)}(x, z_{(1)} = -t/2) = 0, \quad U^{(2)}(x, z_{(2)} = t/2) = 0,$$

получим зависимости

$$u^{(1)} = \frac{t}{2}\gamma^{(1)}, \quad \gamma^{(1)} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right), \quad u^{(2)} = -\frac{t}{2}\gamma^{(2)}, \quad \gamma^{(2)} = -\frac{1}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right).$$

При их подстановке в (2) для $U^{(k)}$ получим преобразованные аппроксимации

$$U^{(1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{(1)}}{t} \right) \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right), \quad U^{(2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{(2)}}{t} \right) \left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right). \quad (3)$$

В геометрически линейном приближении аппроксимациям (1) и (3) соответствуют необходимые в дальнейшем ненулевые компоненты деформаций (нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование соответствующей величины по координате x)

$$\varepsilon_x^{(0)} = u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)}, \quad \gamma_{xz}^{(0)} = \gamma^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2,$$

$$\gamma_{xz}^{(1)} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_{(1)}} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right), \quad \gamma_{xz}^{(2)} = -\frac{1}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2}\gamma^{(0)} \right)$$

и в физически линейно упругом приближении – ненулевые компоненты напряжений

$$\sigma_x^{(0)} = E_1 \left(u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)} \right), \quad \sigma_{xz}^{(0)} = G_{13}\gamma^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (4)$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{G_{13}^0}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \quad \sigma_{xz}^{(2)} = -\frac{G_{13}^0}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \quad (5)$$

где E_1, G_{13} — модуль упругости в направлении оси x и модуль поперечного сдвига материала стержня; G_{13}^0 — модуль поперечного сдвига материала прослойки.

Согласно (4) и (5) рассмотрим приведенные к срединным поверхностям $z = 0$, $z_{(1)} = 0$, $z_{(2)} = 0$ усилия и моменты

$$\begin{aligned} T_x^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} dz = B_{11} u_{,x}^{(0)}, \quad M_x^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} z dz = D_{11} \gamma_{,x}^{(0)}, \\ T_{xz}^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^{(0)} dz = B_{13} \gamma^{(0)}, \quad B_{11} = E_1 h, \quad B_{13} = G_{13} h, \quad D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12}, \\ T_{xz}^{(1)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(1)} dz_{(1)} = G_{13}^0 \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \\ T_{xz}^{(2)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(2)} dz_{(2)} = -G_{13}^0 \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

при учете которых для определения вариации потенциальной энергии деформации закрепленного участка стержня будет иметь место выражение

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{(0)} &= \int_{-l}^0 \left[T_x^{(0)} \delta u_{,x}^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma_{,x}^{(0)} + \frac{T_{xz}^{(1)}}{t} \left(\delta u^{(0)} - \frac{h}{2} \delta \gamma^{(0)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{T_{xz}^{(2)}}{t} \left(\delta u^{(0)} + \frac{h}{2} \delta \gamma^{(0)} \right) \right] dx = \left(T_x^{(0)} \delta u^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma^{(0)} \right) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \\ &\quad - \int_{-l}^0 \left\{ \left[T_{x,x}^{(0)} - \frac{1}{t} \left(T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} \right) \right] \delta u^{(0)} + \left[M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} \left(T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} \right) \right] \delta \gamma^{(0)} \right\} dx, \end{aligned}$$

а также зависимости

$$T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} = 2G_{13}^0 u^{(0)}, \quad T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} = -G_{13}^0 h \gamma^{(0)}. \quad (7)$$

Таким образом, при использовании (6) и (7) приходим к дифференциальным выражениям

$$\begin{aligned} L_T^{(0)} &= T_{x,x}^{(0)} - \frac{1}{t} \left(T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} \right) = B_{11} u_{,xx}^{(0)} - \frac{2G_{13}^0}{t} u^{(0)}, \\ L_M^{(0)} &= M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} \left(T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} \right) = D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} \right) \gamma^{(0)}, \end{aligned} \quad (8)$$

указывающим, что исследуемый вид опорного элемента стержня-полосы приводит к не связанным между собой задачам о продольных осевых и поперечных изгибных формах динамического деформирования на его участке закрепления. При $G_{13}^0 \equiv 0$ они сводятся к дифференциальным выражениям в задачах, которыми описываются изученные ранее свободные

и вынужденные колебания стержня-полосы, закрепленного на двусторонних скользящих опорах, на основе простейшей трансформационной модели деформирования.

Используя (1) и (3), для вариации работы инерционных сил на закрепленном участке можно получить выражение

$$\delta K^{(0)} = - \int_{-l}^0 \left[\left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} \delta u^{(0)} + \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\gamma}^{(0)} \delta \gamma^{(0)} \right] dx,$$

где ρ, ρ_0 — плотности материалов стержня и прослойки, $\ddot{u} = \partial^2 u / \partial \tau^2, \dots$ — обозначения частных производных по времени τ .

2. КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕЗАКРЕПЛЕННОГО УЧАСТКА СТЕРЖНЯ

При использовании на закрепленном участке стержня аппроксимаций (3), дополненных равенствами $W^{(k)} = W^{(0)} \equiv 0$, на незакрепленном участке $0 \leq x \leq a$ простейшими для перемещений U, W являются аппроксимации

$$U = u - z w_{,x}, \quad W = w; \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (9)$$

соответствующие использованию классической модели Кирхгофа–Лява. Функции перемещений в (1) и (9) в сечении $x = 0$ необходимо подчинить кинематическим условиям сопряжения участков

$$u^{(0)} \Big|_{x=0} = u|_{x=0}, \quad w|_{x=0} = 0, \quad \gamma^{(0)} \Big|_{x=0} = -w_{,x}|_{x=0}. \quad (10)$$

Аппроксимациям (9) в геометрически нелинейном приближении соответствуют осевые деформации и нормальные напряжения

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx}, \quad \sigma_x = E_1 \varepsilon_x = E_1 \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 - z w_{,xx} \right), \quad (11)$$

и в приближении (11) вариация потенциальной энергии деформации рассматриваемого участка будет определяться выражением

$$\delta \Pi = \int_0^a (T_x \delta u_{,x} - M_x \delta w_{,xx}) dx = (T_x \delta u - M_x \delta w_{,x} + Q_z \delta w) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a (T_{x,x} \delta u + Q_{z,x} \delta w) dx.$$

Здесь T_x, M_x, Q_z — соответственно, осевая сила, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении незакрепленной части стержня, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} T_x &= B_{11} \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right), \quad M_x = -D_{11} w_{,xx}, \\ Q_z &= M_{x,x} + T_x w_{,x} = -D_{11} w_{,xxx} + T_x w_{,x}. \end{aligned}$$

Согласно (9) запишем выражение для вариации работы инерционных сил в приближении

$$\begin{aligned} \delta K &= - \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \rho [(\ddot{u} - z \ddot{w}_{,x}) (\delta u - z \delta w_{,x}) + \ddot{w} \delta w] dx dz = \\ &= -\rho h \int_0^a \left(\ddot{u} \delta u + \frac{h^2}{12} \ddot{w}_{,x} \delta w_{,x} + \ddot{w} \delta w \right) dx \approx -\rho h \int_0^a (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

пренебрегая в (12) подчеркнутым слагаемым, обусловленным силами инерции при повороте поперечного сечения стержня.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ СИЛОВЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В предположении о том, что к незакрепленному участку стержня в поперечном направлении приложена поверхностная сила $p_z = p_z(x, \tau)$, для вариации совершаемой ею работы на перемещении δw составим выражение $\delta A = \int_0^a p_z \delta w dx$ и запишем вариационное уравнение принципа Даламбера–Лагранжа

$$\delta \Pi + \delta \Pi^{(0)} - \delta A - \delta K - \delta K^{(0)} = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) при подстановке составленных выражений и учете кинематических условий сопряжения участков (10) следуют

– уравнения движения для закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$

$$L_T^{(0)} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} = 0, \quad L_M^{(0)} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\varphi}^{(0)} = 0 \quad (14)$$

и силовые граничные условия

$$T_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta u^{(0)} \neq 0, \quad M_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta \gamma^{(0)} \neq 0,$$

формулируемые для (14) в сечении $x = -l$;

– уравнения движения для незакрепленного участка $0 \leq x \leq a$

$$B_{11} u_{,xxx} - \rho h \ddot{u} = 0, \quad (-D_{11} w_{,xxx} + T_x w_{,x})_{,x} - \rho h \ddot{w} + p_z = 0 \quad (15)$$

и силовые граничные условия $x = a$

$$T_x|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad M_x|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta w_{,x} \neq 0, \\ Q_z|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta w \neq 0,$$

формулируемые для (15) в сечении;

– силовые условия сопряжения участков

$$(T_x^{(0)} - T_x)|_{x=0} = 0, \quad (M_x^{(0)} - M_x)|_{x=0} = 0,$$

формулируемые в сечении $x = 0$ в силу $\delta u^{(0)} = \delta u \neq 0$, $\delta \gamma^{(0)} = -\delta w_{,x} \neq 0$.

Следует особо подчеркнуть, что в силу принятого для участка $0 \leq x \leq a$ предположения $w^{(0)}(x) = 0$ содержащееся в (10) второе условие, формулируемое в сечении $x = 0$, является граничным условием $w|_{x=0} = 0$ для второго уравнения в (15).

4. ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНО ЗАКРЕПЛЕННОГО СТЕРЖНЯ

Предположим, что в сечении $x = a$ к стержню приложена поперечная сила P , требующая для второго уравнения равновесия в (15) выполнения граничного условия $Q_z|_{x=a} = P$. В силу этого условия и удовлетворении всем другим граничным условиям интегралами уравнения равновесия $Q_{z,x} = 0$ при малых перемещениях являются равенства

$$w_{,xxx} = -\frac{P}{D_{11}}, \quad w_{,xx} = -\frac{P}{D_{11}}x - a, \\ w_{,x} = -\frac{P}{D_{11}} \frac{x^2}{2} - ax + r_2, \quad w = -\frac{P}{D_{11}} \frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2} + r_2x,$$

где $r_2 = w_{,x}|_{x=0}$ – постоянная интегрирования.

На закрепленном участке при использовании (8) имеет место уравнение равновесия

$$\gamma_{,xx}^{(0)} - k^2\gamma = 0, \quad k^2 = \frac{B_{13} + G_{13}^0 h^2 / (2t)}{D_{11}}, \quad (16)$$

имеющее решение $\gamma^{(0)} = r_3 e^{kx} + r_4 e^{-kx}$. Подчинив его граничному условию $\gamma_{,x}^{(0)}|_{x=-l} = 0$, найдем

$$r_3 = r_4 e^{2kl}, \quad \gamma^{(0)} = r_4 \left(e^{k(2l+x)} + e^{-kx} \right), \quad \gamma_{,x}^{(0)} = r_4 k \left(e^{k(2l+x)} - e^{-kx} \right).$$

Следовательно,

$$\gamma^{(0)}|_{x=0} = r_4 \left(1 + e^{2kl} \right), \quad M_x^{(0)}|_{x=0} = D_{11} k \left(e^{2kl} - 1 \right) r_4$$

и из условий сопряжения участков $\gamma^{(0)}|_{x=0} = -w_{,x}|_{x=0}$, $M_x^{(0)}|_{x=0} = M_x|_{x=0}$ находим решение

$$r_4 = -\frac{Pa}{D_{11} k (e^{2kl} - 1)}, \quad r_2 = -r_4 (e^{2kl} + 1) = \frac{Pa}{D_{11} k} \frac{e^{2kl} + 1}{e^{2kl} - 1}, \quad (17)$$

$$\sigma_{xz}^{(0)}|_{x=0} = G_{13} \gamma^{(0)}|_{x=0} = G_{13} (e^{2kl} + 1) r_4 = -\frac{Pa}{D_{11} k} \frac{e^{2kl} + 1}{e^{2kl} - 1},$$

и в соответствии с (5)

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(2)} &= -\frac{G_{13}^{(0)} h}{2t} \gamma^{(0)}, \quad \sigma_{xz}^{(1)}|_{x=0} = \sigma_{xz}^{(2)}|_{x=0} = -\frac{G_{13}^{(0)} h}{2t} \gamma^{(0)}|_{x=0} = \\ &= -\frac{G_{13}^{(0)} h}{2t} r_4 (1 + e^{2kl}) = \frac{G_{13}^{(0)} h (1 + e^{2kl})}{2t} \frac{Pa}{D_{11} k (e^{2kl} - 1)}, \quad (18) \\ M_x^{(0)}|_{x=0} &= D_{11} k (e^{2kl} - 1) = -Pa. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исходя из анализа полученных результатов, можно заключить, что при рассматриваемом виде закрепления стержня в опорном элементе в окрестности сечения $x = 0$ закрепленного участка имеет место лишь концентрация напряжений $\sigma_{xz}^{(0)}$, $\sigma_{xz}^{(1)}$, $\sigma_{xz}^{(2)}$, сильно зависящая от параметра k и отношения толщин h , t (формулы (16)–(18)).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Algazin S.D., Selivanov I.A. *Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions*, J. Appl. Mech. and Techn. Phys. **62** (2), 238–244 (2021), DOI: 10.1134/S0021894421020073.
- [2] Algarray A., Jun H., Mahdi IE. *Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies*, J. Appl. Mech. and Techn. Phys. **58** (6), 1108–1114 (2017), DOI: 10.1134/S0021894417060177.
- [3] Krylova E., Papkova I., Erofeev N. *Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise*, J. Appl. Mech. and Techn. Phys. **57** (4), 714–719 (2016), DOI: 10.1134/S0021894416040167.
- [4] Metrol Tüfekci, John P. Dear, Loïc Salles *Forced vibration analysis of beams with frictional clamps*, Appl. Math. Modelling **128**, 450–469 (2024), DOI: 10.1016/j.apm.2024.01.031.
- [5] Banks H., Inman D. *On damping mechanisms in beams*, J. Appl. Mech. **58** (3), 716–723 (1991), DOI: 10.1115/1.2897253.
- [6] Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. *Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface*, J. Sound and Vibration **331** (21), 4704–4712 (2012), DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.026.

- [7] Ferri A., Bindemann A. *Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions*, Transactions Amer. Society Mech. Engineers **114** (3), 289–296 (1992), DOI: 10.1115/1.2930260.
- [8] Paimushin V.N., Shishkin V.M. *Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces*, J. Appl. Mech. and Techn. Phys. **64** (2), 308–324 (2023), DOI: 10.1134/S0021894423020153.
- [9] Paimushin V.N., Shishkin V.M. *Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface*, J. Appl. Mech. and Techn. Phys. **65** (1), 165–175 (2024), DOI: 10.1134/S0021894424010176.
- [10] Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. *Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments*, J. Appl. Math. and Mech. **104** (2), article e202300214, DOI: 10.1002/zamm.202300214.
- [11] Yankovskii A.P. *Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 1. General theories of high order*, Mech. Composite Materials **56** (3), 271–290 (2020), DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.
- [12] Yankovskii A.P. *Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity theory 2. Particular low-order theories*, Mech. Composite Materials **56** (4), 437–454 (2020), DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.

Виталий Николаевич Паймушин

Казанский национальный исследовательский технический университет,

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия;

Казанский федеральный университет,

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: vpa1mushin@mail.ru

Виктор Михайлович Шишкин

Вятский государственный университет,

ул. Московская, д. 36, г. Киров, 610000, Россия,

e-mail: vshishkin1951@mail.ru

V.N. Paimushin and V.M. Shishkin

The simplest transformation model of deformation of a rod-strip fixed on a double-sided support element through elastic interlayers

Abstract. An extremely simplified transformation model of dynamic deformation of a rod-strip consisting of two sections along its length is constructed. It is based on the classical geometrically nonlinear Kirchhoff-Love model on an unfixed section, and the fixed section of finite length is considered to be connected to a rigid and fixed support element through elastic layers. On the fixed section, the deflections of the rod and interlayers are considered zero, and for displacements in the axial direction within the thicknesses of the rod and interlayers, approximations are adopted according to the shear model of S.P. Timoshenko, subject to the conditions of continuity at the points of their connection with each other and immobility at the points of connection of the interlayers with the support element. The conditions for the kinematic coupling of the unfixed and fixed sections of the rod are formulated, and based on these, using the d'Alembert-Lagrange variational principle, the corresponding equations of motion and boundary conditions, as well as the force conditions for coupling of the sections, are derived for the sections introduced into consideration.

Keywords: rod-strip, unfixed and fixed sections, geometric nonlinearity, S.P. Timoshenko model, equations of motion, kinematic and force conditions for the coupling of sections.

Vitaly Nickolaevich Paimushin

Kazav National Research Technical University,

10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia;

Kazan Federal University,

18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: vpajmushin@mail.ru

Viktor Mikhailovich Shishkin

Vyatka State University,

36 Moskovskaya str., Kirov, 610000 Russia,

e-mail: vshishkin1951@mail.ru