

А.Р. ЧЕХЛОВ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ С РАЗРЕШИМЫМИ ЛИЕВЫМИ КОЛЬЦАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Аннотация. Получено описание всех делимых, примарных, а также сепарабельных и алгебраически компактных групп без кручения, лиево кольцо эндоморфизмов которых разрешимо.

Ключевые слова: коммутатор эндоморфизмов, разрешимость лиева кольца эндоморфизмов.

УДК: 512.541: 512.552

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-90-97

Все группы в статье предполагаются абелевыми. Запись $H \leq G$ означает, что H — подгруппа в группе G , $G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}$, $Z(n)$ — циклическая группа порядка n , Q — аддитивная группа рациональных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо или группа целых чисел. Подгруппа $H \leq G$ называется *чистой* в группе G , если $nH = H \cap nG$ для всякого $n \in \mathbb{Z}$; *вполне инвариантной* в G , если $f(H) \leq H$ для всякого эндоморфизма f группы G . Напомним, что длина конечной цепи из n элементов равна $n - 1$.

Хорошо известно ([1]; глава 5, §10), что если вместо умножения в кольце эндоморфизмов $E = E(G)$ абелевой группы G взять операцию *коммутирования* $\alpha \circ \beta = [\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$, то получим *лиево кольцо эндоморфизмов* $L = L(G)$ группы G . Если $L^{(0)} = L$, а $L^{(1)} = \langle L \circ L \rangle$ — идеал кольца L , порожденный всеми коммутаторами $[\alpha, \beta]$, где $\alpha, \beta \in L$, то $L^{(n+1)} = \langle L^{(n)} \circ L^{(n)} \rangle$ — $n + 1$ -*коммутант* кольца L . Кольцо L называется *разрешимым ступени n* для натурального числа n , если $L^{(n)} = 0$, но $L^{(n-1)} \neq 0$; в этом случае кратко будем говорить, что группа G *L -разрешима ступени n* . Ясно, что прямые слагаемые L -разрешимых групп разрешимы, подгруппы в общем случае нет. Необходимые сведения по абелевым группам можно почерпнуть в [2]–[5].

В [6], [7] и в других работах автора изучались группы, лиевы кольца эндоморфизмов которых являются энгелевыми (там эти группы назывались *E -энгелевыми*), а также *E -разрешимые* и *E -нильпотентные* группы; тождества, которым удовлетворяют коммутаторы эндоморфизмов этих групп часто встречаются в алгебре (см., например, [8]–[9]). *E -нильпотентные* группы, это группы с нильпотентными лиевыми кольцами эндоморфизмов, поэтому эти группы образуют подкласс групп с разрешимыми лиевыми кольцами эндоморфизмов. *E -разрешимые* группы, это группы с условием $(L^{(1)})^n = 0$ для некоторого натурального числа n . Так как $L^{(n)} \leq (L^{(1)})^n$, то *E -разрешимые* группы являются *L -разрешимыми*. В [10] описаны группы с минимальным или максимальным условием, лиевы

Поступила в редакцию 14.11.2023, после доработки 08.04.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

кольца эндоморфизмов которых разрешимы. Напомним, что группы с условием максимальной для подгрупп — это в точности прямые суммы конечного числа циклических групп ([3], теорема 15.5); а группы с условием минимальности для подгрупп — это в точности прямые суммы конечного числа коциклических групп ([3], теорема 25.1). Коциклическая группа — это циклическая группа $Z(p^n)$ порядка p^n либо квазициклическая группа $Z(p^\infty)$ для некоторого простого числа p ([3], теорема 3.1). Данная статья продолжает исследование L -разрешимых групп, т. е. групп с разрешимыми лиевыми кольцами эндоморфизмов.

Лемма 1. Пусть $G = G_1 \oplus G_2$ — группа, для которой существуют такие $\alpha \in \text{Hom}(G_1, G_2)$, $\beta \in \text{Hom}(G_2, G_1)$, что $2^n(\alpha\beta)^n \neq 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда G не является L -разрешимой группой.

Доказательство. Имеем $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \in L^{(1)}$. Аналогично $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(1)}$, где $L = L(G)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} -\beta\alpha & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} \in L^{(2)}, \\ \left[\begin{pmatrix} -\beta\alpha & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2(\alpha\beta)\alpha & 0 \end{pmatrix} \in L^{(2)}, \\ \left[\begin{pmatrix} -\beta\alpha & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & -2(\beta\alpha)\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(2)}. \end{aligned}$$

Покажем, что если n четное число ≥ 2 , то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^r(\alpha\beta)^r\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2^r(\beta\alpha)^r\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2^{r-1}(\beta\alpha)^r & 0 \\ 0 & 2^{r-1}(\alpha\beta)^r \end{pmatrix} \in L^{(n)},$$

где $r \geq 1$ — некоторое целое число.

Если n — нечетное число ≥ 3 , то

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^r(\alpha\beta)^r\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2^r(\beta\alpha)^r\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2^r(\beta\alpha)^{r+1} & 0 \\ 0 & 2^r(\alpha\beta)^{r+1} \end{pmatrix} \in L^{(n)}.$$

Показатели r в вышеприведенных формулах удовлетворяют следующим соотношениям (в зависимости от четности): $r_{2n+1} = 2r_{2n} = 4r_{2n-1} + 2$ и $r_{2n} = 2r_{2n-1} + 1 = 4r_{2n-2} + 1$.

Действительно, для нечетного n имеем

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^r(\alpha\beta)^r\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2^r(\beta\alpha)^r\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} -2^{2r}(\beta\alpha)^{2r+1} & 0 \\ 0 & 2^{2r}(\alpha\beta)^{2r+1} \end{pmatrix}, \\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^r(\alpha\beta)^r\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2^{r-1}(\beta\alpha)^r & 0 \\ 0 & 2^{r-1}(\alpha\beta)^r \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2^{2r}(\alpha\beta)^{2r}\alpha & 0 \end{pmatrix}, \\ \left[\begin{pmatrix} 0 & 2^r(\beta\alpha)^r\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2^{r-1}(\beta\alpha)^r & 0 \\ 0 & 2^{r-1}(\alpha\beta)^r \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & 2^{2r}(\beta\alpha)^{2r}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

что подтверждает формулу $r_{2n+1} = 2r_{2n} = 4r_{2n-1} + 2$.

Для четного n имеем (ввиду идентичности ограничимся одним коммутатором)

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^r(\alpha\beta)^r\alpha & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2^r(\beta\alpha)^{r+1} & 0 \\ 0 & 2^r(\alpha\beta)^{r+1} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2^{2r+1}(\alpha\beta)^{2r+1}\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

что подтверждает формулу $r_{2n} = 2r_{2n-1} + 1 = 4r_{2n-2} + 1$.

Итак, для каждого натурального n имеем $L^{(n)} \neq 0$, т.е. группа G не является L -разрешимой. $\square$

Следствие 1. Всякая L -разрешимая группа не содержит прямое слагаемое, изоморфное группе $A \oplus A$, где $A[2] = 0$.

Замечание 1. Как показано в ([10], лемма 3.8), группа $Z(2^n) \oplus Z(2^n)$ является L -разрешимой для каждого целого числа $n \geq 1$.

Лемма 2. Пусть $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus \dots$ — группа, для которой существуют такие $\alpha_i \in \text{Hom}(G_i, G_{i+1})$, что $\alpha_n \dots \alpha_2 \alpha_1 \neq 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда G не является L -разрешимой группой.

Доказательство. Рассмотрим прямое слагаемое $G_1 \oplus G_2$. Имеем $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(1)}(G_1 \oplus G_2)$, аналогично $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(1)}(G_2 \oplus G_3)$. Дополняя строки и столбцы матриц нулями, можно считать, что полученные матрицы принадлежат коммутатору $L^{(1)} = L^{(1)}(G)$. Далее

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_2 \alpha_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(2)},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_4 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L^{(3)}.$$

Применив индукцию, несложно проверить, что если $\alpha_{2^n} \dots \alpha_2 \alpha_1 \neq 0$, то $L^{(n+1)} \neq 0$. $\square$

Лемма 3. Пусть $G = A \oplus B$ — такая группа, что $\text{Hom}(A, B) = 0$ и $\text{Hom}(B, A) \neq 0$, A — L -разрешимая группа степени n , B — L -разрешимая группа степени m . Тогда G — L -разрешимая группа степени $\leq \max\{n, m\} + 1$.

Доказательство. Имеем

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & \gamma_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [\alpha_1, \alpha_2] & \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_1 - \beta_2 \gamma_1 \\ 0 & [\gamma_1, \gamma_2] \end{pmatrix}.$$

Отсюда непосредственно следует справедливость утверждения леммы. $\square$

Замечание 2. Степень L -разрешимости группы G в лемме 3 может совпадать как с $\max\{n, m\} + 1$, так и с $\max\{n, m\}$. Например, пусть $G = Z(p^n) \oplus Z(p^\infty)$. Как легко видеть, группа G L -разрешима степени 2, что больше степеней L -разрешимости ее взаимно дополнительных прямых слагаемых $Z(p^n)$ и $Z(p^\infty)$. Пусть теперь $G = W \oplus (U \oplus V)$, где U, V, W — группы без кручения ранга 1, $t(U) < t(V), t(W)$, а тип $t(W)$ несравним с типом $t(V)$. Тогда $\text{Hom}(W, U \oplus V) = 0$, а $\text{Hom}(U \oplus V, W) \neq 0$. Несложно видеть, что $U \oplus V$ — L -разрешимая группа степени 2, кроме того, $[\gamma_1, \gamma_2](U \oplus V) \leq V$ для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{E}(U \oplus V)$. Как и в лемме 3, всякий коммутатор эндоморфизмов группы G ввиду коммутативности кольца $\text{E}(W)$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & \square \end{pmatrix}$ для некоторого $\delta \in \text{Hom}(U \oplus V, W)$.

Тогда $\left[\begin{pmatrix} 0 & \delta \\ 0 & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \delta' \\ 0 & \square' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & \delta\square' - \delta'\square \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, но для всякого коммутатора $\square$ эндоморфизмов группы $U \oplus V$ имеем $\square(U \oplus V) \leq V$, поэтому $\delta\square' = 0$ и $\delta'\square = 0$, т.е. степень L -разрешимости группы G совпадает со степенью L -разрешимости ее прямого слагаемого $U \oplus V$.

Предложение 1. p -группа $G \neq 0$ при $p \neq 2$ является L -разрешимой тогда и только тогда, когда $G = A \oplus B$, где $A = 0$ или $A \cong Z(p^{n_1}) \oplus Z(p^{n_2}) \oplus \dots \oplus Z(p^{n_k})$ для некоторого натурального числа k , причем $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ при $k > 1$; а $B = 0$ или $B \cong Z(p^\infty)$.

Доказательство. Необходимость. Если делимая часть B группы G ненулевая, то ввиду леммы 1 $B \cong Z(p^\infty)$. По той же лемме все инварианты Ульма–Капланского ([3], §37) $f_n(R(G))$ редуцированной части $R(G)$ группы G при $n < \omega$ равны нулю или единице. Ввиду леммы 2 $p^{n_k+1}R(G) = 0$ для некоторого натурального числа k , т.е. группа G имеет указанный в предложении вид. *Достаточность* доказана в ([10], лемма 3.6). $\square$

Предложение 2. p -группа $G \neq 0$ при $p = 2$ является L -разрешимой тогда и только тогда, когда $G = A \oplus B$, где

1) $A = 0$ или $A = A_{2^{n_1}} \oplus A_{2^{n_2}} \oplus \dots \oplus A_{2^{n_k}}$ для некоторого натурального числа k , где $A_{2^{n_i}} \cong Z(2^{n_i})$ или $A_{2^{n_i}} \cong Z(2^{n_i}) \oplus Z(2^{n_i})$ при $i = 1, \dots, k$, причем $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, если $k > 1$;

2) $B = 0$ или $B \cong Z(2^\infty)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть B — делимая часть группы G . Тогда п. 2) следует из леммы 1. Из леммы 2 следует, что инварианты Ульма–Капланского $f_n(A)$ группы A при $n < \omega$ конечны, а сама группа A ограниченная. Поэтому в силу ([10], теорема 1.2) $f_n(A) = 1$ или $f_n(A) = 2$ при $f_n(A) \neq 0$. *Достаточность* как и в предложении 1 доказывается индукцией по k . $\square$

Следствие 2. Периодическая группа является L -разрешимой тогда и только тогда, когда каждая ее примарная компонента L -разрешима и при этом ступени разрешимости лиевых колец примарных компонент ограничены в совокупности.

Следствие 3. Пусть G — прямая сумма циклических групп. Тогда G является L -разрешимой группой тогда и только тогда, когда $G = T \oplus R$, где T — L -разрешимая периодическая часть группы G , а $R = 0$ или $R \cong Z$.

Из предложений 1 и 2 следует, что L -разрешимая p -группа удовлетворяет условию минимальности, а L -разрешимая группа из следствия 3 удовлетворяет условию максимальности.

Следствие 4. Делимая группа G является L -разрешимой тогда и только тогда, когда $G = T \oplus D$, где $D = 0$ или $D \cong Q$, а T — делимая периодическая группа, каждая ненулевая p -компонента которой изоморфна группе $Z(p^\infty)$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1, а *достаточность* из леммы 3. При этом степень L -разрешимой делимой смешанной группы равна 2. $\square$

Ввиду леммы 3 изучение L -разрешимых групп сводится к редуцированному случаю.

Следствие 5. Редуцированная сепарабельная (векторная) группа без кручения G является L -разрешимой тогда и только тогда, когда G не содержит ненулевых прямых слагаемых, изоморфных группам вида $A \oplus A$, и удовлетворяет следующему условию: существует такое натуральное число n , что для всякого прямого слагаемого $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ группы G с условием $r(B_i) = 1$ и $t(B_1) < \dots < t(B_m)$ вытекает $m \leq n$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2. *Достаточность.* Пусть $L = L(G)$. И пусть сначала G — сепарабельная группа, а $0 \neq g \in G$. Возьмем такую проекцию π_1 группы G на прямое слагаемое ранга 1, что $\pi_1(g) \neq 0$, и пусть $G = \pi_1(G) \oplus C$, а $f_1, \dots, f_n \in L^{(1)}$. Тогда $f_1(\pi_1(g)) \in C$. Поскольку C не имеет прямых слагаемых, изоморфных $\pi_1(G)$, тип $t(\pi_1(g)) < t(\pi_2(f_1(\pi_1(g))))$ для всякой проекции π_2 группы G на прямое слагаемое ранга 1 со свойством $\pi_2(f_1(\pi_1(g))) \neq 0$. Имеем $t(\pi_1(G)) < t(\pi_2(G))$. Так как всякая возрастающая последовательность типов прямых слагаемых ранга 1 группы G имеет длину не выше $n-1$, то $\pi_{n+1}(f_n(\dots(f_1(\pi_1(g)))) \dots) = 0$ для каждой проекции π_{n+1} группы G на прямое слагаемое ранга 1. Значит, произведение $f_n \dots f_1$ аннулирует каждую координату всякого элемента $g \in G$. Следовательно, $f_n \dots f_1 = 0$ для всякого набора $f_1, \dots, f_n \in L^{(1)}$, т.е. $(L^{(1)})^n = 0$. Поскольку $L^{(n)} \leq (L^{(1)})^n$, то и $L^{(n)} = 0$.

Заметим, что если $A = \prod_{i \in I} A_i$ — редуцированная векторная группа, где A_i — группы без кручения ранга 1, и I — неизмеримое множество, $\varphi \in E(A)$ — такой эндоморфизм, что $\varphi(\bigoplus_{i \in I} A_i) = 0$, то $\varphi = 0$. Действительно, для всякой проекции $\pi_j : A \rightarrow A_j$, где $j \in I$, имеем гомоморфизм $\pi_j \varphi : A \rightarrow A_j$ в узкую группу A_j . Поэтому по теореме Лося ([4], теорема 94.4) $\pi_j \varphi = 0$. Отсюда $\varphi = 0$ ввиду произвольности $j \in I$.

Запишем нашу векторную группу G в виде $G = \prod_{t \in \Omega} G_t$, где G_t — прямое произведение групп ранга 1 одного и того же типа t . Тогда ввиду условий на группу G ранг каждой группы G_t равен единице. Множество типов Ω имеет мощность не более континуум, поэтому Ω неизмеримо.

Допустим, что $f_n \dots f_1 \neq 0$ для некоторых $f_n, \dots, f_1 \in L^{(1)}$, где $n \geq 2$. Тогда по сказанному выше $f_n \dots f_1(\bigoplus_{t \in \Omega} G_t) \neq 0$, значит, $f_n \dots f_1(g_t) \neq 0$ для некоторого $g_t \in G_t$. Тогда $t(\pi_{i_1} f_1(g_t)) > t$ для всякой проекции π_{i_1} такой, что $\pi_{i_1} f_1(g_t) \neq 0$. Имеем $f_1(g_t) \in \prod_{t^{(1)} > t} G_{t^{(1)}}$. Поэтому если

$$f_2 f_1 \left(G_t \oplus \left(\bigoplus_{t^{(1)} > t} G_{t^{(1)}} \right) \right) = 0, \text{ то, как и выше, } f_2 f_1 \left(G_t \oplus \left(\prod_{t^{(1)} > t} G_{t^{(1)}} \right) \right) = 0.$$

Если последнее равенство выполняется для всякого $t \in \Omega$, то $f_2 f_1 = 0$, противоречие. Поэтому $f_2(g_{t^{(1)}}) \neq 0$ для некоторого $g_{t^{(1)}} \in G_{t^{(1)}}$, где $t^{(1)} > t$. Значит, $t^{(2)} = t(\pi_{i_2} f_2(g_{t^{(1)}})) > t^{(1)} > t$ при некотором π_{i_2} . По индукции получаем, что если $f_n \dots f_1 \neq 0$, то найдутся $t^{(1)}, \dots, t^{(n)} \in \Omega$ такие, что $t^{(n)} > \dots > t^{(1)} > t$. Однако по условию длины подобных цепочек не могут быть больше $n-1$. Таким образом, $(L^{(1)})^n$ и $L^{(n)}$ равны нулю. $\square$

Следствие 6. Ненулевая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения является L -разрешимой тогда и только тогда, когда она изоморфна группе $\prod_{p \in \pi} \hat{\mathbb{Z}}_p$, где $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — аддитивная группа целых p -адических чисел, а π — некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел.

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 1 ввиду строения алгебраически компактных групп ([3], предложение 40.1), а *достаточность* очевидна, поскольку кольцо эндоморфизмов такой группы коммутативно. $\square$

Можно указать ступени L -разрешимости изучаемых групп. Так, если в следствии 4 обе группы T и D ненулевые, то ступень L -разрешимости группы G равна двум; а ступень L -разрешимости группы G в следствии 5 равна n , если $n-1$ совпадает с наименьшей из длин возрастающих цепей типов прямых слагаемых группы G ранга 1.

Приведем примеры сильно неразложимой (т.е. не имеющей нетривиальных квазиразложений ([2], §4)) L -неразрешимой группы.

Пример 1. Пусть $E = \mathbb{Z}[i, j, k]$ — кольцо кватернионов с целыми коэффициентами. Поскольку аддитивная группа E^+ кольца E является счетной редуцированной группой, существует редуцированная группа без кручения G , кольцо эндоморфизмов которой совпадает с E ([4], теорема 110.1). Так как $[i, j] = 2k$, $[k, i] = 2j$, $[j, k] = 2i$, то группа G не является L -разрешимой. Поскольку E — кольцо без делителей нуля, в E нет нетривиальных квазиидемпотентов, т. е. таких элементов $x \neq 0, n$, что $x^2 = nx$ для некоторого целого числа $n \neq 0$. Поэтому группа G сильно неразложима. Так как ранг группы E^+ равен 4, то группа G имеет ранг ≤ 8 ([4], теорема 110.2).

Пример 2. Пусть $S = \{0, 1, a, b, c, p, q, r, s, x, y\}$ — полугруппа с 0 и 1, заданная таблицей умножения

Таблица

	a	b	c	d	p	q	r	s	x	y
a	0	c	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	s	0	r	0	q	0	0	0	s	r
p	x	0	y	0	0	0	0	0	0	0
q	s	0	r	0	0	0	0	0	0	0
r	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s	0	r	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	y	0	0	0	0	0	0	0	0
y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$K = \mathbb{Z}S$ — полугрупповое целочисленное кольцо для S . Поскольку аддитивная группа K^+ кольца K является счетной редуцированной группой без кручения, существует группа G без кручения, кольцо эндоморфизмов которой есть K . Имеем $L^{(1)} = \langle c, s, x, r, y, q \rangle$ — идеал кольца $L = L(G)$, порожденный элементами c, s, x, r, y, q . Так как $L^{(2)} = \langle r \rangle$, то $L^{(3)} = 0$, т. е. G — L -разрешимая группа ступени 3. Если $U = \{0, 1, a, b, c\}$ — подполугруппа в S , $R = \mathbb{Z}U$, а A — группа с кольцом эндоморфизмов R , то A — L -разрешимая группа ступени 2. В кольце K нет нетривиальных квазиидемпотентов. Действительно, допустим, что $\alpha^2 = n\alpha$ для $\alpha = l_1 + l_2a + l_3b + l_4c + l_5d + l_6p + l_7q + l_8r + l_9s + l_{10}x + l_{11}y$, где $l_i \in \mathbb{Z}$ при $i = 1, \dots, 11$ и $0 \neq n \in \mathbb{Z}$. Получаем систему уравнений: $l_1^2 = nl_1$, $2l_1l_2 = nl_2$, $2l_1l_3 = nl_3$, $2l_1l_4 + l_2l_3 = nl_4$, $2l_1l_5 = nl_5$, $2l_1l_6 = nl_6$, $2l_1l_7 + l_5l_6 = nl_7$, $2l_1l_8 + l_4l_5 + l_5l_{11} + l_4l_7 + l_3l_9 = nl_8$, $2l_1l_9 + l_2l_5 + l_5l_{10} + l_2l_7 = nl_9$, $2l_1l_{10} + l_2l_6 = nl_{10}$, $2l_1l_{11} + l_4l_6 + l_3l_{10} = nl_{11}$. Имеется всего два решения системы: $l_1 = l_2 = \dots = l_{11} = 0$ и $l_1 = n, l_2 = \dots = l_{11} = 0$, т. е. $\alpha = 0$ или $\alpha = n$. Значит, группа G сильно неразложима. Так как ранг группы S^+ равен 11, то группа G имеет ранг ≤ 22 ([4], теорема 110.2).

Предложение 3. Для каждого целого числа $n \geq 1$ существуют L -разрешимые неразложимые группы G без кручения ступени n такие, что

- 1) G — неоднородная группа ранга n ;
- 2) G — однородная группа ранга $\frac{n(n+1)}{2}$.

Доказательство. 1) Пусть $p, p_1, \dots, p_n$ — различные простые числа,

$$E_i = \langle p_1^{-\infty} \dots p_i^{-\infty} b_i \rangle, \quad A = \bigoplus_{i=1}^n E_i, \quad G = \langle A, p^{-1}(b_1 + b_n), \dots, p^{-1}(b_{n-1} + b_n) \rangle;$$

здесь группа G рассматривается как подгруппа некоторой делимой группы без кручения D , под $p^{-\infty}a$ понимается последовательность элементов $p^{-1}a, p^{-2}a, \dots$, а $b_1, \dots, b_n$ — независимые элементы из D (по поводу таких конструкций см. ([4], §88)). Допустим, что $G = U \oplus V$. Так как подгруппа E_n вполне инвариантна в G , то $E_n \leq U$ или $E_n \leq V$, пусть для определенности $E_n \leq V$. Если $E_{n-1} \leq U$, то $p^{-1}(b_{n-1} + b_n) = x + y$ для некоторых $x \in U, y \in V$. Тогда $b_{n-1} = px$ и $b_n = py$, что невозможно, так как элементы b_{n-1}, b_n не делятся на p в группе G . Значит, $E_{n-1} \leq V$. Аналогично получаем $E_1, \dots, E_{n-2} \leq V$. Следовательно, $U = 0$, т. е. группа G неразложима. Группа A L -разрешима ступени n (см. замечание после следствия 6). Группа G , как квазиравная группе A , также является L -разрешимой ступени n .

2) Пусть $G_1 < \dots < G_n$ — чистые подгруппы аддитивной группы целых p -адических чисел $\hat{\mathbb{Z}}_p$, ранг каждой группы G_i равен i , $H = \bigoplus_{i=1}^n G_i$ — внешняя прямая сумма групп G_i . Пусть $G = \langle H, p^{-1}(g_1 + g_n), \dots, p^{-1}(g_{n-1} + g_n) \rangle$, где $g_i \in G_i \setminus pG_i$. Так как $\text{Hom}(G_i, G_j) = 0$ для всякого $1 < i \leq n$ при $1 \leq j < i$, а кольца эндоморфизмов групп G_i коммутативны, то дальнейшее доказательство аналогично доказательству п. 1). $\square$

Обозначим через SL_n — класс L -разрешимых ступени n сильно неразложимых редуцированных групп без кручения. Группы в предложении 3 квазиразложимы. В связи с этим уместен следующий

Вопрос. а) Для каждого ли целого числа $n \geq 3$ существуют группы из класса SL_n ?

б) Какой мощности могут достигать ранги групп $G \in SL_n$, могут ли такие группы G быть однородными?

Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Курош А.Г. *Лекции по общей алгебре* (Изд-во физ.-матем. литературы, М., 1962).
- [2] Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. *Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов* (Факториал Пресс, М., 2006).
- [3] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы*, Т. 1 (Мир, М., 1974).
- [4] Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы*, Т. 2 (Мир, М., 1977).
- [5] Fuchs L. *Abelian Groups* (Springer, Switzerland, 2015).
- [6] Чехлов А.Р. *Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов*, Изв. вузов. Матем. (10), 60–73 (2012).
- [7] Чехлов А.Р. *Об абелевых группах, близких к E -разрешимым*, Фундамент. и прикл. матем. **17** (8), 183–219 (2012).
- [8] Латышев В.Н. *О сложности нематричных многообразий ассоциативных алгебр*. I, Алгебра и логика **16** (2), 149–183 (1977).
- [9] Бокуть Л.А., Львов И.В., Харченко В.К. *Некоммутативные кольца*, в сб.: *Алгебра – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления* **18**, 5–116 (ВИНИТИ, М., 1988).
- [10] Chunbo Zhou and Heguo Liu *The structure of an Abelian Groups whose Endomorphism Ring is a Solvable Lie Ring*, J. Math. Sci. **271**, 583–593 (2023).

Андрей Ростиславович Чехлов

Национальный исследовательский Томский государственный университет. Региональный научно-образовательный математический центр, Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,

e-mail: cheklov@math.tsu.ru

A.R. Chekhlov

Abelian groups with solvable Lie endomorphism rings

Abstract. A description has been obtained of all divisible, primary, as well as separable and algebraically compact torsion-free groups, the Lie endomorphism ring of which is solvable.

Keywords: commutator of endomorphisms, solvability of Lie endomorphism ring.

Andrey Rostislavovich Chekhlov

*Regional Scientific and Educational Mathematical Center, Tomsk State University,
36 Lenin Ave., Tomsk, 634050 Russia,*

e-mail: cheklov@math.tsu.ru