Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №10, с. 77–89 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Т.Х. РАСУЛОВ, А.М. ХАЛХУЖАЕВ, М.А. ПАРДАБАЕВ, Х.Г. ХАЙИТОВА

РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИСКРЕТНОГО БИЛАПЛАСИАНА С ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Аннотация. Рассматривается семейство операторов

$$\widehat{\mathbf{H}}_\mu := \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{V}}, \quad \mu > 0,$$

т. е. билапласиан с конечномерным возмущением на одномерной решетке $\mathbb{Z}$, где $\widehat{\Delta}$ — дискретный лапласиан, а $\widehat{\mathbf{V}}$ — оператор ранга два. Доказано, что для любого $\mu > 0$ дискретный спектр $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ является двухэлементным $e_1(\mu) < 0$ и $e_2(\mu) < 0$. Находим сходящиеся разложения собственных значений $e_i(\mu)$, $i = 1, 2$, в малой окрестности нуля при малых $\mu > 0$.

Ключевые слова: дискретный билапласиан, дискретный оператор Шрёдингера, существенный спектр, собственное значение, разложение, асимптотика.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-77-89

Введение

Эллиптические операторы четвертого порядка в $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, в частности, бигармонические операторы играют центральную роль в широком классе физических моделей, таких как линейная теория упругости, проблемы жесткости (например, строительство подвесных мостов) и при формулировке потоков Стокса (см. [1]). Более того, недавние исследования показали, что бигармонические операторы обладают высоким потенциалом при сжатии изображений с оптимизированными и достаточно разреженными сохраненными данными [2]. Необходимость соответствующего численного моделирования привела к появлению обширной литературы, посвященной разнообразным дискретным приближениям к решениям уравнений четвертого порядка [3]–[5]. Вопрос об устойчивости таких моделей в основном связан с их спектральными свойствами, и поэтому численной оценке собственных значений посвящены многочисленные исследования [6]–[8].

Спектральные свойства дискретных операторов Шрёдингера с невырожденным нижнем порогом (т. е. когда ε ведет себя как $O(|p-p_0|^2)$ вблизи своей точки минимума p_0) в последние годы активно изучались (см., например, [9]–[14]). Более того, довольно много результатов для непрерывных операторов Шрёдингера были доказаны и для дискретного случая.

М. Клаус в [15] исследовал собственные значения оператора Шрёдингера $-d^2/dx^2 + \lambda V$ для $\lambda > 0$ и V, удовлетворяющего

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|)|V(x)|\mathrm{d}x < \infty,$$

Поступила в редакцию 23.11.2023, после доработки 23.11.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

расширяя результаты Б. Саймона из [16] в одномерном случае. М. Клаус показал, что если $\int V(x)dx > 0$, то для малых и положительных значений λ связанное состояние отсутствует, а если $\int V(x)dx \leq 0$, то существует единственное связанное состояние $E(\lambda)$, и оно удовлетворяет асимптотике

$$(-E(\lambda))^{1/2} = -\frac{\lambda}{2}\int V(x)dx - \frac{\lambda^2}{4}\int V(x)|x-y|V(y)dxdy + o(\lambda^2)$$

при $\lambda \searrow 0$. Результаты, аналогичные результатам [15], [16], недавно были установлены для широкого класса операторов типа Шредингера с невырожденными нижними и верхними порогами в одно и двумерной решетках.

В работе [11] рассматривается гамильтониан системы двух частиц, взаимодействующих с помощью контактного потенциала, т. е. лапласиан с одномерным возмущением на решетке. Показано существование единственного собственного значения соответствующего двухчастичного оператора Шрёдингера, лежащего ниже дна существенного спектра при всех значениях константы связи и двухчастичного квазиимпульса, и найдено разложение собственного значения в виде сходящегося ряда.

В данной работе рассматривается $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ билапласиан с двумерным возмущением на одномерной решетке. Доказано существование двух отрицательных собственных значений. Получены сходящиеся разложения для обоих собственных значений в малой окрестности нуля по малым $\mu > 0$.

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{Z}$ — одномерная решетка, а $\ell^2(\mathbb{Z})$ — гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций на $\mathbb{Z}$. Рассмотрим семейство самосопряженных дискретных операторов $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ в гильбертовом пространстве $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\widehat{\mathbf{H}}_\mu = \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{V}}, \quad \mu > 0.$$

Здесь $\widehat{\Delta}\widehat{\Delta}$ — дискретный билапласиан, где $\widehat{\Delta}$ — дискретный лапласиан, т. е.

$$(\widehat{\Delta}\hat{f})(x) = \hat{f}(x) - \frac{\hat{f}(x+1)+\hat{f}(x-1)}{2}, \quad \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z});$$

$\widehat{\mathbf{V}}$ — оператор умножения в $\ell^2(\mathbb{Z})$ на функцию

$$\widehat{v}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{при } |x| = 1; \\ 0 & \text{при } |x| \neq 1. \end{cases}$$

Пусть $\mathbb{T}$ — одномерный тор, а $L^2(\mathbb{T})$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}$. Рассмотрим

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad \mathcal{F}\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{x\in\mathcal{Z}} \hat{f}(x)e^{ipx}$$

— стандартное преобразование Фурье с обратным

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}^{-1}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{T}} f(p)e^{-ipx}dp,$$

где $x \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{T}$. Оператор $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ в импульсном представлении определяется как $\mathbf{H}_\mu = \mathcal{F}\widehat{\mathbf{H}}_\mu\mathcal{F}^{-1}$ и действует в $L^2(\mathbb{T})$ по формуле

$$\mathbf{H}_\mu := \mathbf{H}_0 - \mu\mathbf{V}, \qquad \mu > 0,$$

где $\mathbf{H}_0 := \mathcal{F}\widehat{\Delta}\widehat{\Delta}\mathcal{F}^{-1}$ — оператор умножения в $L^2(\mathbb{T})$ на функцию

$$\varepsilon(p) := (1-\cos p)^2,$$

$\mathbf{V} := \mathcal{F}\widehat{\mathbf{V}}\mathcal{F}^{-1}$ — интегральный оператор ранга два вида

$$(\mathbf{V}f)(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos(p-s)\, f(s)ds.$$

Поскольку

$$\sigma(\widehat{\Delta}) = \sigma_{ess}(\widehat{\Delta}) = [0,2],$$

верно равенство

$$\sigma(H_0) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [0,4].$$

В силу компактности оператора $\mathbf{V}$ и теоремы Вейля о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях [17] имеем

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{H}_\mu) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [0,4]$$

для любого $\mu > 0$.

Существенный и дискретный спектры модельных трехчастичных операторов Шрёдингера изучены в работах [18]–[20].

Пусть $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})$ (соответственно $L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})$) — подпространство четных (соответственно нечетных) функций. Известно, что

$$L^2(\mathbb{T}) = L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}) \oplus L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T}).$$

Лемма 1. *Подпространства $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})$ и $L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})$ инвариантны относительно оператора $\mathbf{H}_\mu$.*

Доказательство непосредственно вытекает из определения оператора $\mathbf{H}_\mu$. □

Обозначим через $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})} := \mathbf{H}_\mu\big|_{L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})}$ и $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{o})} := \mathbf{H}_\mu\big|_{L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})}$ сужения оператора $\mathbf{H}_\mu$ на подпространства $L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})$ и $L^{2,\mathrm{o}}(\mathbb{T})$ соответственно, т. е.

$$(\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}f)(p) = (1-\cos p)^2 f(p) - \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos p \cos s\, f(s)ds$$

и

$$(\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{o})}f)(p) = (1-\cos p)^2 f(p) - \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sin p \sin s\, f(s)ds.$$

Теорема 1. *Для любого $\mu > 0$ оператор $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$ имеет единственное собственное значение $e(\mu)$ вне существенного спектра, а соответствующая собственная функция имеет вид*

$$f_\mu(p) := \frac{\cos p}{\varepsilon(p) - e(\mu)}.$$

Кроме того,

1) $e(\mu) < 0$ *для любого* $\mu > 0$;
2) *функция* $\mu \in (0,+\infty) \mapsto e(\mu)$ *вещественно-аналитическая, строго убывающая, строго вогнутая в* $(0,+\infty)$ *с асимптотикой*

$$\lim_{\mu\searrow 0} e(\mu) = 0 \quad \textit{и} \quad \lim_{\mu\to+\infty}\frac{e(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{2}; \tag{1}$$

3) *для достаточно малых и положительных μ верно равенство*

$$(-e(\mu))^{1/4} = \sum_{n\geq 1} C_n \mu^{n/3}, \tag{2}$$

где C_n, $n = 1, 2, \ldots$ — некоторые действительные числа и

$$C_1 = 2^{-1/3}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{2^{-1/3}}{3}.$$

Теорема 2. *Для любого $\mu > 0$ оператор $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{o})}$ имеет единственное собственное значение $e(\mu)$ вне существенного спектра, а соответствующая собственная функция имеет вид*

$$f_\mu(p) := \frac{\sin p}{\varepsilon(p) - e(\mu)}.$$

Кроме того,

1) *$e(\mu) < 0$ для любого $\mu > 0$;*
2) *функция $\mu \in (0, +\infty) \mapsto e(\mu)$ вещественно-аналитическая, строго убывающая, строго вогнутая в $(0, +\infty)$ с асимптотикой*

$$\lim_{\mu \searrow 0} e(\mu) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\mu \to +\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{2}; \tag{3}$$

3) *для достаточно малых и положительных μ верно равенство*

$$(-e(\mu))^{1/4} = 2^{-3}\,\mu - 2^{-11}(2^8 + 1)\,\mu^2 + \sum_{n\geq 2} c_n \mu^{n+1}, \tag{4}$$

где c_n, $n = 2, 3, 4, \ldots$ — действительные коэффициенты.

2. Определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$

Лемма 2. *Число $z < 0$ является собственным значением оператора $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu; z) = 0$, где*

$$\Delta(\mu; z) := 1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q\, dq}{\varepsilon(q) - z}. \tag{5}$$

Более того, если z является собственным значением $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$, то соответствующая собственная функция (с точностью до постоянного множителя) имеет вид

$$f(p) = \frac{\cos p}{\varepsilon(p) - z}.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $z < 0$ является собственным значением оператора $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$ с соответствующей собственной функцией $0 \neq f \in L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T})$. Тогда из равенства $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})} f = zf$ следует

$$f(p) = \frac{C \cos p}{\varepsilon(p) - z}, \tag{6}$$

где

$$C := \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \cos q f(q) dq. \tag{7}$$

Поскольку $C \neq 0$ (иначе $f = 0$ по (6)), поставляя (6) в (7), получим $\Delta(\mu; z) = 0$.

Достаточность. Предположим, что $\Delta(\mu; z) = 0$ для некоторого $z < 0$. Положим

$$f(p) := \frac{\cos p}{\varepsilon(p) - z}.$$

Тогда $f \in L^{2,\mathrm{e}}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ и имеет место равенство

$$\big(\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})} - z\big) f(p) = \cos p \left(1 - \frac{\mu}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q\, dq}{\varepsilon(q) - z}\right) = \cos p \Delta(\mu; z) = 0,$$

т. е. z является собственным значением оператора $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$. □

Теперь, используя теорему о вычетах для аналитических функций, мы вычисляем интеграл, стоящий в правой части равенства (5).

Лемма 3. *Для любого $z < 0$ верно равенство*

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q\, dq}{\varepsilon(q) - z} = 2\pi + \frac{\sqrt{2}\pi(-z)^{-3/4}}{(4-z)^{1/4}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{-z}{4-z}}} \Bigg[1 - \frac{4\sqrt{-z}}{\sqrt{4-z} + \sqrt{-z}} + z\Bigg]. \tag{8}$$

Доказательство. Для простоты, положив $z = -\alpha^4$, где $\alpha > 0$, по формуле Эйлера $e^{iq} = \cos q + i \sin q$ перепишем интеграл

$$I(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q\, dq}{\varepsilon(q) - z}$$

в виде

$$I(z) := \int_{\mathbb{T}} \frac{(\frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2})^2 dq}{\big(1 - \frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2}\big)^2 + \alpha^4} = -i \int_{\mathbb{T}} \frac{(e^{2iq} + 1)^2 de^{iq}}{e^{iq}((e^{iq} - 1)^4 + 4\alpha^4 e^{2iq})}.$$

Вводя переменную $\xi = e^{iq}$, получаем

$$I(z) = -i \int_{|\xi|=1} \frac{(\xi^2 + 1)^2 d\xi}{\xi((\xi - 1)^4 + 4\alpha^4 \xi^2)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned}(\xi - 1)^4 + 4\alpha^4\xi^2 &= (\xi - 1)^4 - 4i^2\alpha^4\xi^2 = \\ &= \big(\xi^2 - 2(1 + i\alpha^2)\xi + 1\big)\big(\xi^2 - 2(1 - i\alpha^2)\xi + 1\big),\end{aligned}$$

решим уравнения

$$\xi^2 - 2(1 + i\alpha^2)\xi + 1 = 0 \tag{9}$$

и

$$\xi^2 - 2(1 - i\alpha^2)\xi + 1 = 0. \tag{10}$$

Очевидно, что решения уравнения (9) имеют вид

$$\xi_{1,2} := (1 + i\alpha^2) \pm \sqrt{(1 + i\alpha^2)^2 - 1}.$$

Так как

$$\sqrt{(1 + i\alpha^2)^2 - 1} = \sqrt{2i\alpha^2 - \alpha^4} = i\alpha\sqrt{\alpha^2 - 2i} = i\alpha\left(A - \frac{i}{A}\right),$$

где

$$A := \sqrt{\frac{\sqrt{4 + \alpha^4} + \alpha^2}{2}}, \tag{11}$$

то корни $\xi_{1,2}$ можно представить в виде

$$\xi_{1,2} := (1 + i\alpha^2) \pm i\alpha\Big(A - \frac{i}{A}\Big),$$

отсюда

$$\xi_1 := \Big(1 + \frac{\alpha}{A}\Big) + i\,(\alpha^2 + A\alpha) \qquad \text{и} \qquad \xi_2 := \Big(1 - \frac{\alpha}{A}\Big) + i\,(\alpha^2 - A\alpha). \tag{12}$$

Поскольку коэффициенты (9) комплексно сопряжены с соответствующими коэффициентами (10), решения уравнения (10) равны на $\overline{\xi_{1,2}}$, т. е.

$$\xi_3 := \Big(1 + \frac{\alpha}{A}\Big) - i\,(\alpha^2 + A\alpha) \qquad \text{и} \qquad \xi_4 := \Big(1 - \frac{\alpha}{A}\Big) - i\,(\alpha^2 - A\alpha). \tag{13}$$

Из положительности α и A следует $|\xi_1| > 1$ и $|\xi_3| > 1$, поэтому $|\xi_2| < 1$ и $|\xi_4| < 1$ согласно теореме Виета $\xi_1\xi_2 = \xi_3\xi_4 = 1$.

Пусть $\xi_5 := 0$. Таким образом, по теореме о вычетах имеем

$$I(z) = 2\pi\Bigg[1 + \frac{1}{\xi_2 - \xi_4}\Bigg(\frac{\big(\xi_2^2+1\big)^2\xi_1}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} - \frac{\big(\xi_4^2+1\big)^2\xi_3}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_4-\xi_3)}\Bigg)\Bigg].$$

Используя равенства $\xi_4 = \overline{\xi_2}$, $\xi_3 = \overline{\xi_1}$, $\xi_4 - \xi_1 = \overline{\xi_2 - \xi_3}$, $\xi_4 - \xi_3 = \overline{\xi_2 - \xi_1}$ и $\big(\xi_2^2+1\big)^2 = \overline{\big(\xi_4^2+1\big)^2}$, получаем

$$\frac{\overline{\big(\xi_4^2+1\big)^2\xi_3}}{(\xi_4-\xi_1)(\xi_4-\xi_3)} = \frac{\big(\xi_2^2+1\big)^2\xi_1}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)}.$$

В силу равенства $\xi_1\xi_2 = 1$ имеем

$$\begin{aligned} I(z) &= 2\pi + \frac{4\pi i}{\xi_2-\xi_4}\,\mathrm{Im}\,\frac{\big(\xi_2^2+1)\big)^2\xi_1}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = \\ &= 2\pi + \frac{4\pi i}{\xi_2-\xi_4}\,\mathrm{Im}\,\frac{\big(\xi_2^2+1\big)^2\xi_1^2\xi_2}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)} = 2\pi + \frac{4\pi i}{\xi_2-\xi_4}\,\mathrm{Im}\,\frac{\xi_2\Big(\xi_2+\xi_1\Big)^2}{(\xi_2-\xi_1)(\xi_2-\xi_3)}, \end{aligned} \tag{14}$$

где Im — мнимая часть комплексного числа. Из (12) и (13) следуют

$$\begin{aligned} &\xi_2 = \Big(1 - \frac{\alpha}{A}\Big) - A\alpha i\,\Big(1 - \frac{\alpha}{A}\Big) = \Big(1 - \frac{\alpha}{A}\Big)\,(1 - A\alpha i), \\ &\xi_2 - \xi_4 = 2i(\alpha^2 - A\alpha) = -2A\alpha i\,\Big(1 - \frac{\alpha}{A}\Big), \\ &\xi_2 - \xi_1 = -\frac{2\alpha}{A} - 2A\alpha\, i = -2\alpha\Big(\frac{1}{A} + Ai\Big), \\ &\xi_2 - \xi_3 = -\frac{2\alpha}{A} + 2\alpha^2 i = -\frac{2\alpha}{A}\,(1 - A\alpha i), \\ &\xi_2 + \xi_1 = 2 + 2i\alpha^2. \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя эти отношения в (14), получаем

$$I(z) = 2\pi + \frac{4\pi i}{-2A\alpha i\,\Big(1 - \dfrac{\alpha}{A}\Big)}\,\mathrm{Im}\,\frac{\Big(1 - \dfrac{\alpha}{A}\Big)\,(1 - A\alpha i)}{2\alpha\,\Big(\dfrac{1}{A} + Ai\Big)\,\dfrac{2\alpha}{A}\,(1 - A\alpha i)}(2 + 2i\alpha^2)^2 =$$

$$
= 2\pi - \frac{\pi}{2\alpha^3}\,\mathrm{Im}\,\frac{\dfrac{1}{A} - Ai}{\dfrac{1}{A^2} + A^2}(2 + 2i\alpha^2)^2 = 2\pi + \frac{2A\pi}{\alpha^3\left(\dfrac{1}{A^2} + A^2\right)}\left(1 - \frac{2\alpha^2}{A^2} - \alpha^4\right).
$$

Из явного вида (11) числа A имеем

$$
\frac{1}{A^2} + A^2 = \frac{2}{\sqrt{4+\alpha^4} + \alpha^2} + \frac{\sqrt{4+\alpha^4} + \alpha^2}{2} = \frac{\sqrt{4+\alpha^4} - \alpha^2}{2} + \frac{\sqrt{4+\alpha^4} + \alpha^2}{2} = \sqrt{4+\alpha^4}.
$$

Таким образом,

$$
I(z) = 2\pi + \frac{2A\pi}{\alpha^3\sqrt{4+\alpha^4}}\left(1 - \frac{2\alpha^2}{A^2} - \alpha^4\right).
$$

Отсюда вытекает равенство (8). □

Лемма 4. *Пусть $\mu > 0$. Функция*

$$
\Delta(\mu; z) = 1 - \frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q\, dq}{\varepsilon(q) - z}
$$

является вещественно-аналитической в $(\mu, z) \in (0, +\infty) \times (\mathbb{C} \setminus [0,4])$. Более того, $\Delta(\mu;\cdot)$ строго убывает в $(-\infty, 0)$ и

$$
\lim_{z\to-\infty} \Delta(\mu; z) = 1, \tag{15}
$$

$$
\lim_{z\to 0^-} \Delta(\mu; z) = -\infty. \tag{16}
$$

Доказательство. Аналитичность функции $\Delta(\cdot;\cdot)$ очевидна. Так как

$$
\frac{\partial}{\partial z}\Delta(\mu; z) = -\frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{\cos^2 q\, dq}{(\varepsilon(q) - z)^2} < 0
$$

для любого $z < 0$, то функция $\Delta(\mu;\cdot)$ строго убывает в $(-\infty, 0)$. Равенство (15) следует из теоремы Лебега, а равенства (16) — из представлений (8). □

Доказательство теоремы 1. Согласно непрерывности и строгой монотонности $\Delta(\mu;\cdot)$, а также равенств (15) и (16) для каждого $\mu > 0$ существует единственное $e(\mu) < 0$ такое, что $\Delta(\mu; e(\mu)) = 0$. По лемме 2 число $e(\mu)$ является единственным собственным значением оператора $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{e})}$ в $(-\infty, 0)$. Из вещественной аналитичности $\Delta(\cdot;\cdot)$ и теоремы о неявной функции в монотонном случае следует, что решение уравнения $\Delta(\mu; z) = 0$, т. е. функция $z = e(\mu)$ также вещественно-аналитична в $(0, +\infty)$. Функция $e(\cdot)$ строго убывающая и строго вогнутая. По лемме 3 число $e(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$
\mu + \frac{\mu(-e(\mu))^{-3/4}}{\sqrt{2}(4 - e(\mu))^{1/4}}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{-e(\mu)}{4 - e(\mu)}}}\left[1 - \frac{4\sqrt{-e(\mu)}}{\sqrt{4 - e(\mu)} + \sqrt{-e(\mu)}} + e(\mu)\right] = 1. \tag{17}
$$

Значит, $\lim\limits_{\mu\searrow 0} e(\mu) = 0$. Аналогично можно показать, что

$$
\lim_{\mu\to+\infty} \frac{e(\mu)}{\mu} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \cos^2 q\, dq = -\frac{1}{2}.
$$

Наконец, мы докажем (2). Положив $\mu := \lambda^3$ и $e(\mu) = -\alpha^4$, где $\alpha := \alpha(\lambda) > 0$, перепишем (17) в виде

$$2\alpha^3 = \lambda^3 \left[2\alpha^3 + \frac{\sqrt{2}}{(4+\alpha^4)^{1/4}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4+\alpha^4}}} \left(1 - \frac{4\,\alpha^2}{\sqrt{4+\alpha^4}+\alpha^2} + \alpha^4 \right) \right]. \tag{18}$$

Решим это уравнение относительно α. С этой целью мы сначала перепишем правую часть (18) как абсолютно сходящийся ряд по α, а затем из теоремы о неявной функции в аналитическом случае выводим, что α имеет сходящийся степенной ряд по λ и коэффициенты ряда будут найдены индуктивно из ряда по α. В силу строгого убывания $\alpha(\cdot)$ и асимптотики (1) существует единственное число $\gamma_1 > 0$ такое, что $|\alpha(\lambda)| < 1$ для любого $\lambda \in (0, \gamma_1)$. Учитывая

$$(1+x)^{-1/4} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4^n n!} \prod_{j=0}^{n-1} (1+4j)\, x^n \tag{19}$$

и

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \prod_{j=0}^{n-2} (1+2j)\, x^n \tag{20}$$

при $|x| < 1$, имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{(4+\alpha^4)^{1/4}} = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{16^n n!} \prod_{j=0}^{n-1} (1+4j)\, \alpha^{4n} \tag{21}$$

и

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{4+\alpha^4}} = \frac{\alpha^2}{2} \left(1 + \frac{\alpha^4}{4} \right)^{-1/2} = \frac{\alpha^2}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{2\cdot 8^n n!} \prod_{j=0}^{n-1} (1+2j)\, \alpha^{4n+2}. \tag{22}$$

Таким образом,

$$\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{\sqrt{4+\alpha^4}}} = 1 + \frac{\alpha^2}{4} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{4\cdot 8^n n!} \prod_{j=0}^{n-1} (1+2j)\, \alpha^{4n+2} +$$

$$+ \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \prod_{j=0}^{n-2} (1+2j) \left(\frac{\alpha^2}{2} + \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^m}{2\cdot 8^m m!} \prod_{j=0}^{m-1} (1+2j)\, \alpha^{4m+2} \right)^n;$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^4}{4} \right)^{1/2} = 1 + \frac{\alpha^4}{8} + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \prod_{j=0}^{n-2} (1+2j) \left(\frac{\alpha^4}{4} \right)^n, \tag{23}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{(4+\alpha^4)^{1/4}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4+\alpha^4}}} = 1 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{32} + \sum_{n\geq 3} \tilde{C}_n \alpha^{2n}, \tag{24}$$

где $\tilde{C}_n$, $n = 3, 4, \ldots,$ — действительные коэффициенты. В частности,

$$\frac{\sqrt{2}}{(4+\alpha^4)^{1/4}} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4+\alpha^4}}} \left(1 - \frac{4}{\sqrt{\frac{4}{\alpha^4}+1}+1} - \alpha^4 \right) = 1 - \frac{3}{32}\,\alpha^4 + \sum_{n\geq 3} c_n \alpha^{2n},$$

где c_n, $n = 3, 4, \ldots,$ — действительные коэффициенты. Таким образом, для $\lambda \in (0, \gamma_1)$ уравнение (18) представляется в виде

$$2\alpha^3 = \lambda^3 \Big(2\alpha^3 + 1 - \frac{3}{32}\,\alpha^4 + \sum_{n\geq 3} c_n \alpha^{2n}\Big),$$

из которого следует

$$2^{1/3}\alpha = \lambda \left(1 + 2\alpha^3 - \frac{3}{32}\alpha^4 + \sum_{n\geq 3} c_n \alpha^{2n}\right)^{1/3}. \tag{25}$$

В силу равенства

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n n!} \prod_{j=0}^{n-2} (1+3j)\, x^n, \quad |x| < 1,$$

из (25) получим

$$\alpha = \lambda\left(2^{-1/3} + \frac{2 \cdot 2^{-1/3}}{3}\alpha^3 + \sum_{n\geq 2} 2^{-1/3} c_n \alpha^{2n}\right). \tag{26}$$

Обозначив $\alpha = \lambda(2^{-1/3} + u)$, перепишем (26) в виде

$$u = 2^{2/3}\frac{\lambda^3(2^{-1/3}+u)^3}{3} + \sum_{n\geq 2} 2^{-1/3} c_n \lambda^{2n} (2^{-1/3}+u)^{2n}. \tag{27}$$

Уравнение (27) представим в виде

$$F(u, \lambda) = 0,$$

где функция

$$F(u,\lambda) := u - 2^{2/3}\frac{\lambda^3(2^{-1/3}+u)^3}{3} + \sum_{n\geq 2} 2^{-1/3} c_n \lambda^{2n} (2^{-1/3}+u)^{2n}$$

аналитична в окрестности точки $(u, \lambda) = (0, 0)$ и удовлетворяет условиям

$$F(0,0) = 0 \qquad \text{и} \qquad F_u(0,0) = 1 > 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции в аналитическом случае существуют $\gamma \in (0, \gamma_1)$ и аналитическая функция $u = u(\lambda)$ такие, что $u(0) = 0$ и $F(u(\lambda), \lambda) \equiv 0$ для $|\lambda| < \gamma$. Подставляя $u(\lambda) := \sum\limits_{n\geq 1} c_n \lambda^n$ в (27), получаем

$$\sum_{n\geq 1} c_n \lambda^n - 2^{2/3} \cdot \frac{\lambda^3 \left(2^{-1/3} + \sum\limits_{n\geq 1} c_n \lambda^n\right)^3}{3} - \sum_{n\geq 2} 2^{-1/3} c_n \lambda^{2n} \left(2^{-1/3} + \sum_{n\geq 1} c_n \lambda^n\right)^{2n} = 0.$$

Коэффициенты c_k могут быть найдены индуктивно:

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = \frac{2^{-1/3}}{3} \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом,

$$\alpha(\lambda) = 2^{-1/3}\,\lambda + \frac{2^{-1/3}}{3}\,\lambda^4 + \sum_{n\geq 4} c_n \lambda^{n+1}.$$

Из определений α и λ мы получим искомое равенство (2). $\square$

3. Доказательство теоремы 2

Доказательства лемм 5, 6 и 7 аналогичны доказательствам лемм 2, 3 и 4 сответственно.

Лемма 5. *Число $z<0$ является собственным значением оператора $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{o})}$ тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu;z)=0$, где*

$$\Delta(\mu;z):=1-\frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 q\,dq}{\varepsilon(q)-z}.$$

Более того, если z является собственным значением $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{o})}$, то соответствующая собственная функция (с точностью до постоянного множителя) имеет вид

$$f(p)=\frac{\sin p}{\varepsilon(p)-z}.$$

Лемма 6. *Для любого $z<0$ верно равенство*

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 q\,dq}{\varepsilon(q)-z}=-2\pi+\frac{\sqrt{2}\pi(-z)^{-3/4}}{(4-z)^{1/4}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{-z}{4-z}}}\left[\frac{4\sqrt{-z}}{\sqrt{4-z}+\sqrt{-z}}-z\right].$$

Лемма 7. *Пусть $\mu>0$. Функция*

$$\Delta(\mu;z)=1-\frac{\mu}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\frac{\sin^2 q\,dq}{\varepsilon(q)-z}$$

является вещественно-аналитической в $(\mu,z)\in(0,+\infty)\times(\mathbb{C}\setminus[0,4])$. Более того, $\Delta(\mu;\cdot)$ строго убывает в $(-\infty,0)$ и

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta(\mu;z)=1, \tag{28}$$

$$\lim_{z\to 0^-}\Delta(\mu;z)=-\infty. \tag{29}$$

Доказательство теоремы 2. Из непрерывности и строгой монотонности $\Delta(\mu;\cdot)$, а также равенств (28) и (29) следует, что для каждого $\mu>0$ существует единственное число $e(\mu)<0$ такое, что $\Delta(\mu;e(\mu))=0$. По лемме 5 число $e(\mu)$ является единственным собственным значением оператора $\mathbf{H}_\mu^{(\mathrm{o})}$ в $(-\infty,0)$. Из вещественной аналитичности $\Delta(\cdot;\cdot)$ и теоремы о неявной функции в монотонном случае вытекает, что решение уравнения $\Delta(\mu;z)=0$, т. е. функция $z=e(\mu)$ также вещественно-аналитична в $(0,+\infty)$. Функция $e(\cdot)$ строго убывающая и строго вогнутая. По лемме 6 число $e(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$-\mu+\frac{\mu(-e(\mu))^{-3/4}}{\sqrt{2}(4-e(\mu))^{1/4}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{-e(\mu)}{4-e(\mu)}}}\left[\frac{4\sqrt{-e(\mu)}}{\sqrt{4-e(\mu)}+\sqrt{-e(\mu)}}-e(\mu)\right]=1. \tag{30}$$

Следовательно, $\lim\limits_{\mu\searrow 0}e(\mu)=0$. Аналогично можно показать, что

$$\lim_{\mu\to+\infty}\frac{e(\mu)}{\mu}=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\sin^2 q\,dq=-\frac{1}{2}.$$

Наконец, мы докажем (4). Положив $\mu := \kappa$ и $e(\mu) = -\beta^4$, где $\beta := \beta(\kappa) > 0$, мы перепишем (30) в виде

$$2\beta^3 = \kappa\left[\frac{\sqrt{2}}{(4+\beta^4)^{1/4}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{\beta^4}{4+\beta^4}}} - 2\beta^3 - \frac{\sqrt{2}}{(4+\beta^4)^{1/4}}\sqrt{1+\sqrt{\frac{\beta^4}{4+\beta^4}}}\left(1 - \frac{4\,\beta^2}{\sqrt{4+\beta^4}+\beta^2} + \beta^4\right)\right]. \tag{31}$$

Решим это уравнение относительно β. С этой целью мы сначала перепишем правую часть (31) как абсолютно сходящийся ряд по β, а затем из теоремы о неявной функции в аналитическом случае выводим, что β имеет сходящийся степенной ряд по κ и коэффициенты ряда будут найдены индуктивно из ряда по β. В силу убываемости $\beta(\cdot)$ и асимптотики (3) существует единственное $\gamma_1 > 0$ такое, что $|\beta(\kappa)| < 1$ для любого $\kappa \in (0, \gamma_1)$. Согласно (19)–(24) для $\kappa \in (0, \gamma_1)$ уравнение (31) представим в виде

$$2\beta^3 = \kappa\left(1 + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^4}{32} + \sum_{n\geq 3} B_n\beta^{2n} - \left(2\beta^3 + 1 - \frac{3}{32}\,\beta^4 + \sum_{n\geq 3} C_n\beta^{2n}\right)\right),$$

где B_n, C_n, $n = 3, 4, \ldots,$ — действительные коэффициенты. Из этого уравнения получим

$$\beta = \kappa\left(\frac{1}{8} - \beta + \frac{1}{32}\beta^2 + \sum_{n\geq 3} D_n\beta^n\right), \tag{32}$$

где D_n, $n = 3, 4, \ldots,$ — действительные коэффициенты. Обозначив $\beta = \kappa(2^{-3} - u)$, перепишем (32) в виде

$$u = \kappa(2^{-3} - u) - 2^{-5}\kappa^2(2^{-3} - u)^2 - \sum_{n\geq 3} D_n\kappa^n(2^{-3} - u)^n. \tag{33}$$

Уравнение (33) представим в виде

$$G(u, \kappa) = 0,$$

где функция

$$G(u, \kappa) := u - \kappa(2^{-3} - u) + 2^{-5}\kappa^2(2^{-3} - u)^2 + \sum_{n\geq 3} D_n\kappa^n(2^{-3} - u)^n$$

аналитична в окрестности точки $(u, \kappa) = (0, 0)$ и удовлетворяет условиям

$$G(0, 0) = 0 \qquad \text{и} \qquad G_u(0, 0) = 1 > 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции в аналитическом случае, существуют $\gamma \in (0, \gamma_1)$ и аналитическая функция $u = u(\kappa)$ такие, что $u(0) = 0$ и $G(u(\kappa), \kappa) \equiv 0$ для $|\kappa| < \gamma$. Подставляя $u(\kappa) := \sum_{n\geq 1} c_n\kappa^n$ в (33), получим

$$\sum_{n\geq 1} c_n\kappa^n - \kappa\left(2^{-3} - \sum_{n\geq 1} c_n\kappa^n\right) + 2^{-5}\kappa^2\left(2^{-3} - \sum_{n\geq 1} c_n\kappa^n\right)^2 + \sum_{n\geq 3} D_n\kappa^n\left(2^{-3} - \sum_{n\geq 1} c_n\kappa^n\right)^n = 0.$$

Теперь, коэффициенты c_k могут быть найдены индуктивно:

$$c_1 = 2^{-3}, \qquad c_2 = -2^{-11}\left(2^8 + 1\right) \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом,

$$\beta(\kappa) = 2^{-3}\,\kappa - 2^{-11}\left(2^8 + 1\right)\,\kappa^2 + \sum_{n\geq 2} c_n\kappa^{n+1}.$$

Из определений β и κ мы получим равенство (4). $\square$

Литература

[1] McKenna P.J., Walter W. *Nonlinear oscillations in a suspension bridge*, Arch. Rational Mech. Anal. **98**, 167–177 (1987).

[2] Hoffmann S., Plonka G., Weickert J. *Discrete Green's Functions for Harmonic and Biharmonic Inpainting with Sparse Atoms. In: X. Tai et al (eds) Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition.*, EMMCVPR. Lect. Notes Computer Sci. **8932**, 169–182 (2015).

[3] Ben-Artzi M., Katriel G. *Spline functions, the biharmonic operator and approximate eigenvalues*, Numer. Math. **141**, 839–879 (2019).

[4] Graef J., Heidarkhani Sh., Kong L., Wang M. *Existence of solutions to a discrete fourth order boundary value problem*, J. Diff. Equ. Appl. **24** (6), 849–858 (2018).

[5] Tee G.J. *A Novel Finite-Difference Approximation to the Biharmonic Operator*, Computer J. **6**, 177–192 (1963).

[6] Andrew A., Paine J. *Correction of finite element estimates for Sturm–Liouville eigenvalues*, Numer. Math. **50**, 205–215 (1986).

[7] Boumenir A. *Sampling for the fourth-order Sturm–Liouville differential operator*, J. Math. Anal. Appl. **278** (2), 542–550 (2003).

[8] Rattana A., Böckmann C. *Matrix methods for computing eigenvalues of Sturm–Liouville problems of order four*, J. Comput. Appl. Math. **249**, 144–156 (2013).

[9] Albeverio S., Lakaev S., Makarov K., Muminov Z. *The Threshold Effects for the Two-Particle Hamiltonians on Lattices*, Commun. Math. Phys. **262**, 91–115 (2006).

[10] Graf G., Schenker D. 2-*magnon scattering in the Heisenberg model*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor. **67** (1), 91–107 (1997).

[11] Lakaev S.N., Khalkhuzhaev A.M., Lakaev Sh.S. *Asymptotic behavior of an eigenvalue of the two-particle discrete Schrödinger operator*, Theoret. and Math. Phys. **171** (3), 800–811 (2012).

[12] Lakaev S.N., Kholmatov Sh.Yu. *Asymptotics of eigenvalues of two-particle Schrödinger operators on lattices with zero-range interaction*, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (13) (2011).

[13] Kholmatov Sh., Khalkhuzhaev A., Pardabaev M. *Expansion of eigenvalues of the perturbed discrete bilaplacian*, Monatshefte fur Math. **197**, 607–633 (2022).

[14] Kholmatov Sh., Pardabaev M. *On Spectrum of the Discrete Bilaplacian with Zero-Range Perturbation*, Lobachevskii J. Math. **42** (6), 1286–1293 (2021).

[15] Klaus M. *On the bound states of Schrödinger operators in one dimension*, Ann. Phys. **108** (2), 288–300 (1977).

[16] Simon B. *The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions*, Ann. Phys. **97** (2), 279–288 (1976).

[17] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики*, Т. 4, *Анализ операторов* (Мир, М., 1982).

[18] Бахронов Б.И., Расулов Т.Х., Рехман М. *Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана*, Изв. вузов. Матем. (7), 3–12 (2023).

[19] Абдуллаев Ж.И., Халхужаев А.М., Расулов Т.Х. *Инвариантные подпространства и собственные значения трехчастичного оператора Шрёдингера*, Изв. вузов. Матем. (9), 3–19 (2023).

[20] Расулов Т.Х., Мухитдинов Р.Т. *Конечность дискретного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке*, Изв. вузов. Матем. (1), 61–70 (2014).

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Ахмад Мияссарович Халхужаев

Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова,
Университетский бульвар, д. 15, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан;
Институт математики имени В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: ahmad_x@mail.ru

Мардон Алмуратович Пардабаев

Узбекско-Финский педагогический институт,
ул. Спитамен, д. 166, г. Самарканд, 140104, Республика Узбекистан,

e-mail: p_mardon75@mail.ru

Хилола Гафуровна Хайитова

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: x.g.xayitova@buxdu.uz

T.Kh. Rasulov, A.M. Khalkhuzhaev, M.A. Pardabaev, and Kh.G. Khayitova

Expansions of eigenvalues of a discrete bilaplacian with two-dimensional perturbation

Abstract. In this paper we consider the family of operators

$$\widehat{\mathbf{H}}_\mu := \widehat{\Delta}\widehat{\Delta} - \mu\widehat{\mathbf{V}}, \quad \mu > 0,$$

that is, a bilaplacian with a finite-dimensional perturbation on a one-dimensional lattice $\mathbb{Z}$, where $\widehat{\Delta}$ is a discrete Laplacian, and $\widehat{\mathbf{V}}$ is an operator of rank two. It is proved that for any $\mu > 0$ the discrete spectrum $\widehat{\mathbf{H}}_\mu$ is two-element $e_1(\mu) < 0$ and $e_2(\mu) < 0$. We find convergent expansions of the eigenvalues $e_i(\mu)$, $i = 1, 2$ in a small neighborhood of zero for small $\mu > 0$.

Keywords: discrete bilaplacian, discrete Schrödinger operator, essential spectrum, eigenvalue, expansion, asymptotics.

Tulkin Khusenovich Rasulov

Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200118, Republic of Uzbekistan,

e-mail: rth@mail.ru, t.h.rasulov@buxdu.uz

Ahmad Miyassarovich Khalkhuzhaev

Samarkand State University after named Sharof Rashidov,
15 University blvrd., Samarkand, 140104 Republic of Uzbekistan;
V.I. Romanovsky Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of Uzbekistan,
9 University str., Tashkent, 100174, Republic of Uzbekistan,

e-mail: ahmad_x@mail.ru

Mardon Almuratovich Pardabaev

Uzbek-Finnish Pedagogical Institute,
166 Spitamen str., Samarkand, 140104, Republic of Uzbekistan,

e-mail: p_mardon75@mail.ru

Khilola Gafurovna Khayitova

Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200118, Republic of Uzbekistan,

e-mail: x.g.xayitova@buxdu.uz