

К.Р. ПРАСАД, Б. СРАВАНИ, Н. СРИДХАР

СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ИТЕРАТИВНОЙ СИСТЕМЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ВРЕМЕННЫХ ШКАЛАХ

Аннотация. Устанавливается существование счетного множества положительных решений для итеративной системы второго порядка двухточечных краевых задач с использованием неравенства Гёльдера и теоремы о неподвижной точке Гуо–Красносельского для оператора на конусе.

Ключевые слова: итеративная система, временная шкала, функция Грина, особенность, конус, положительное решение.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-61-76

ВВЕДЕНИЕ

Инженерные, научные и технологические задачи включают в себя сложные системы со множеством степеней свободы, которые необходимо рассматривать как систему дифференциальных, разностных или динамических уравнений на временных шкалах при определенных условиях. Первым сложным шагом здесь является формулировка математической модели этих систем, а затем исследование количественных и качественных свойств модели. В последние годы, благодаря своей важности как в теории, так и в приложениях, значительное внимание уделяется установлению существования положительных решений и множественных положительных решений для системы нелинейных краевых задач с помощью различных теорем о неподвижной точке.

Теория временных шкал объединяет, генерирует и расширяет непрерывные динамические системы и дискретные динамические системы в единую теорию. Сила теории заключается в произвольном выборе временных шкал, которые могут быть взяты как комбинация непрерывных интервалов и дискретных множеств. Более того, основные результаты по этой теории хорошо задокументированы в статьях (см. [1]–[3]).

В 2009 году М. Бенчохра и др. [4] определили собственные значения, для которых итеративная система краевых задач на временных шкалах

$$\begin{aligned} u_i^{\Delta\Delta}(t) + \lambda_i a_i(t) f_i(u_{i+1}(\sigma(t))) &= 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}, \\ u_{n+1}(t) &= u_1(t), \quad t \in [0, 1]_{\mathbb{T}}, \end{aligned}$$

Поступила в редакцию 23.11.2023, после доработки 26.01.2024. Принята к печати 20.03.2024.

Благодарности. Буту Сравани благодарен UGC (Университетская грантовая комиссия, правительство Индии, Нью Дели) за присуждение JRF (младшая научная стипендия) по программе SJSGC (стипендии для девушек без братьев и сестер); № UGCES-22-OB-AND-F-SJSGC-8159.

$$u_i(0) = 0 = u_i(\sigma^2(1)), \quad 1 \leq i \leq n,$$

имеет положительное решение. Недавно, в 2022 году, К. Прасад и др. [5] изучили следующую двухточечную итеративную краевую задачу на временных шкалах:

$$u_l^{\Delta\Delta}(t) + \lambda(t)g_l(u_{l+1}(t)) = 0, \quad 1 \leq l \leq m, \quad t \in (0, \mathfrak{T})_{\mathbb{T}},$$

$$u_{m+1}(t) = u_1(t), \quad t \in (0, \mathfrak{T})_{\mathbb{T}},$$

$$u_l(0) = u_l^{\Delta}(0), u_l(\mathfrak{T}) = -u_l^{\Delta}(\mathfrak{T}), \quad 1 \leq l \leq m,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $\lambda(t) = \prod_{i=1}^m \lambda_i(t)$ и все $\lambda_i(t) \in L_{\Delta}^{p_i}([0, \mathfrak{T}]_{\mathbb{T}})$ ($p_i \geq 1$) имеют m -особенности в интервале $(0, \mathfrak{T})_{\mathbb{T}}$; они показали, что задача имеет бесконечно много положительных решений. Упомянем еще работы [6]–[11] по этой теме, связанные с обыкновенными дифференциальными уравнениями, и работы [12]–[16], связанные с динамическими уравнениями на временных шкалах.

Вдохновившись вышеприведенным работами, мы в настоящей статье устанавливаем существование счетного множества положительных решений для итеративной системы второго порядка двухточечных краевых задач на временных шкалах

$$\begin{aligned} u_j^{\Delta\Delta}(t) + \lambda(t)f_j(v_{j+1}(t)) &= 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}; \\ v_j^{\Delta\Delta}(t) + \mu(t)g_j(u_{j+1}(t)) &= 0, \quad 1 \leq j \leq n, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}; \\ u_{n+1}(t) &= u_1(t), \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}; \\ v_{n+1}(t) &= v_1(t), \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_j(0) - \beta_1 u_j^{\Delta}(0) &= 0, \quad \gamma_1 u_j(\xi) + \delta_1 u_j^{\Delta}(\xi) = 0; \\ \alpha_2 v_j(0) - \beta_2 v_j^{\Delta}(0) &= 0, \quad \gamma_2 v_j(\xi) + \delta_2 v_j^{\Delta}(\xi) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\lambda(t) = \prod_{k=1}^n \lambda_k(t)$, $\mu(t) = \prod_{k=1}^n \mu_k(t)$ и все $\lambda_k(t)$, $\mu_k(t) \in L_{\Delta}^{p_k}([0, \xi]_{\mathbb{T}})$ ($p_k \geq 1$) имеют n -особенности в интервале $(0, \xi)_{\mathbb{T}}$.

На протяжении статьи будем предполагать выполнимость следующих условий:

- (Z1) $f_j, g_j : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ непрерывны, $1 \leq j \leq n$,
- (Z2) $\lim_{t \rightarrow t_k} \lambda_k(t) = \infty$, где $0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < \xi$,
- (Z3) $\lim_{t \rightarrow t_k} \mu_k(t) = \infty$, где $0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < \xi$.

Оставшаяся часть статьи устроена следующим образом. В разделе 1 мы строим функцию Грина для однородной краевой задачи (1), (2) и находим ее оценки. В разделе 2 разработан критерий наличия счетного множества положительных решений задачи (1), (2) с использованием теоремы Гуо–Красносельского о неподвижной точке. В последнем разделе приводится пример, иллюстрирующий наши результаты.

Определение 1 ([3]). Временная шкала $\mathbb{T}$ — это непустое замкнутое подмножество вещественных чисел $\mathbb{R}$. Операторы скачков $\sigma, \rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ и зернистость $\mu : \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ задаются формулами $\sigma(t) = \inf \{\tau \in \mathbb{T} : \tau > t\}$, $\rho(t) = \sup \{\tau \in \mathbb{T} : t > \tau\}$ и $\mu(t) = \sigma(t) - t$ соответственно.

Определение 2 ([3], [17]). Пусть $E \subset \mathbb{T}$ — Δ -измеримое множество и $p \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ такое, что $p \geq 1$, пусть также $f : E \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ — Δ -измеримая функция. Скажем, что f принадлежит $L_{\Delta}^p(E)$, если

$$\int_E |f|^p(s) \Delta s < \infty \text{ при } p \in [1, +\infty),$$

или же существует константа $M \in \mathbb{R}$ такая, что

$$|f| \leq M \text{ } \Delta\text{-п.в. на } E \text{ при } p = +\infty.$$

1. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ЕЕ ОЦЕНКИ

В этом разделе для однородной краевой задачи (1), (2) определяется функция Грина и приводится ряд лемм, необходимых для дальнейшего обсуждения темы.

Лемма 1. Пусть $\phi_1(t) \in C_{rd}([0, \xi])_{\mathbb{T}}$. Тогда краевая задача

$$u_1^{\Delta\Delta}(t) + \phi_1(t) = 0, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad (3)$$

$$\alpha_1 u_1(0) - \beta_1 u_1^{\Delta}(0) = 0, \gamma_1 u_1(\xi) + \delta_1 u_1^{\Delta}(\xi) = 0 \quad (4)$$

имеет ровно одно решение

$$u_1(t) = \int_0^{\xi} \aleph_1(t, \tau) \phi_1(\tau) \Delta \tau,$$

где

$$\aleph_1(t, \tau) = \frac{1}{A_1} \begin{cases} (\alpha_1 \sigma(\tau) + \beta_1)(\gamma_1(\xi - t) + \delta_1), & \text{если } \sigma(\tau) \leq t; \\ (\alpha_1 t + \beta_1)(\gamma_1(\xi - \sigma(\tau)) + \delta_1), & \text{если } t \leq \tau, \end{cases}$$

и

$$A_1 = \alpha_1 \delta_1 + \gamma_1 \xi \alpha_1 + \beta_1 \gamma_1.$$

Доказательство. Интегрируя (3) дважды от 0 до t , получаем

$$u_1(t) = - \int_0^t (t - \sigma(\tau)) \phi_1(\tau) \Delta \tau + c_1 t + c_2.$$

Используя краевые условия (4), получаем

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{A_1} \int_0^{\xi} [\gamma_1(\xi - \sigma(\tau)) + \delta_1] \phi_1(\tau) \Delta \tau \text{ и } c_2 = \frac{\beta_1 c_1}{\alpha_1}.$$

Тогда

$$u_1(t) = - \int_0^t [t - \sigma(\tau)] \phi_1(\tau) \Delta \tau + \frac{(\alpha_1 t + \beta_1)}{A_1} \int_0^{\xi} [\gamma_1(\xi - \sigma(\tau)) + \delta_1] \phi_1(\tau) \Delta \tau = \int_0^{\xi} \aleph_1(t, \tau) \phi_1(\tau) \Delta \tau.$$

□

Лемма 2. Пусть $\phi_2(t) \in C_{rd}([0, \xi])_{\mathbb{T}}$. Тогда краевая задача

$$v_1^{\Delta\Delta}(t) + \phi_2(t) = 0, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}},$$

$$\alpha_2 v_1(0) - \beta_2 v_1^{\Delta}(0) = 0, \gamma_2 v_1(\xi) + \delta_2 v_1^{\Delta}(\xi) = 0$$

имеет ровно одно решение

$$v_1(t) = \int_0^{\xi} \aleph_2(t, \tau) \phi_2(\tau) \Delta \tau,$$

где

$$\aleph_2(t, \tau) = \frac{1}{A_2} \begin{cases} (\alpha_2 \sigma(\tau) + \beta_2)(\gamma_2(\xi - t) + \delta_2), & \text{если } \sigma(\tau) \leq t; \\ (\alpha_2 t + \beta_2)(\gamma_2(\xi - \sigma(\tau)) + \delta_2), & \text{если } t \leq \tau, \end{cases}$$

u

$$A_2 = \alpha_2 \delta_2 + \gamma_2 \xi \alpha_2 + \beta_2 \gamma_2.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. $\square$

Лемма 3. Пусть $\mathcal{G}(\eta) = \min \left\{ \frac{\alpha_1 \eta + \beta_1}{\alpha_1 \xi + \beta_1}, \frac{\gamma_1 \eta + \delta_1}{\gamma_1 \xi + \delta_1} \right\} < 1$, где $\eta \in \left(0, \frac{\xi}{2}\right)_T$. Тогда $\aleph_1(t, \tau)$ обладает следующими свойствами:

- (i) $0 \leq \aleph_1(t, \tau) \leq \aleph_1(\tau, \tau)$ для всех $t, \tau \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}$,
- (ii) $\mathcal{G}(\eta) \aleph_1(\tau, \tau) \leq \aleph_1(t, \tau)$ для всех $t \in [\eta, \xi - \eta]_{\mathbb{T}}$ и $\tau \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}$.

Доказательство. Неравенство (i) легко проверяется. Для неравенства (ii) положив $t \in [\eta, \xi - \eta]_{\mathbb{T}}$ и $t \leq \tau$, получим

$$\frac{\aleph_1(t, \tau)}{\aleph_1(\tau, \tau)} = \frac{\alpha_1 t + \beta_1}{\alpha_1 \tau + \beta_1} \geq \frac{\alpha_1 \eta + \beta_1}{\alpha_1 \xi + \beta_1} \geq \mathcal{G}(\eta).$$

Пусть $t \in [\eta, \xi - \eta]_{\mathbb{T}}$ и $t \geq \tau$, тогда

$$\frac{\aleph_1(t, \tau)}{\aleph_1(\tau, \tau)} = \frac{(\gamma_1(\xi - t) + \delta_1)}{(\gamma_1(\xi - \tau) + \delta_1)} \geq \frac{\gamma_1 \eta + \delta_1}{\gamma_1 \xi + \delta_1} \geq \mathcal{G}(\eta).$$

$\square$

Лемма 4. Пусть $\rho \in \left(0, \frac{\xi}{2}\right)_T$ и $\mathcal{H}(\rho) = \min \left\{ \frac{\alpha_2 \rho + \beta_2}{\alpha_2 \xi + \beta_2}, \frac{\gamma_2 \rho + \delta_2}{\gamma_2 \xi + \delta_2} \right\} < 1$. Тогда $\aleph_2(t, \tau)$ обладает следующими свойствами:

- (i) $0 \leq \aleph_2(t, \tau) \leq \aleph_2(\tau, \tau)$ для всех $t, \tau \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}$,
- (ii) $\mathcal{H}(\rho) \aleph_2(\tau, \tau) \leq \aleph_2(t, \tau)$ для всех $t \in [\rho, \xi - \rho]_{\mathbb{T}}$ и $\tau \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. $\square$

Заметим, что $2n$ -кортеж $(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$ является решением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда

$$u_j(t) = \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau) \lambda(\tau) \mathfrak{f}_j(v_{j+1}(\tau)) \Delta \tau, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$v_j(t) = \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau) \mu(\tau) \mathfrak{g}_j(u_{j+1}(\tau)) \Delta \tau, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$u_{n+1}(t) = u_1(t), \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}},$$

$$v_{n+1}(t) = v_1(t), \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}.$$

Эквивалентно при четном n

$$u_1(t) = \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \mu(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_2, \tau_3) \lambda(\tau_3) \mathfrak{f}_3 \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n) \Delta \tau_n) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \right. \\ \left. \right) \Delta \tau_1$$

и

$$v_1(t) = \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \mathfrak{g}_3 \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n) \Delta \tau_n) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \right. \\ \left. \right) \Delta \tau_1.$$

При нечетном n

$$u_1(t) = \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \mu(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_2, \tau_3) \lambda(\tau_3) \mathfrak{f}_3 \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n (v_1(\tau_n) \Delta \tau_n) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \right.$$

и

$$v_1(t) = \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \mathfrak{g}_3 \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n (u_1(\tau_n) \Delta \tau_n) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \right.$$

2. СЧЕТНОЕ МНОЖЕСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе мы устанавливаем существование счетного множества положительных решений задачи (1), (2) с использованием теоремы Гуро–Красносельского и неравенства Гёльдера.

Пусть $\mathcal{B} = \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ — банахово пространство с нормой $\|(u, v)\|_{\mathcal{B}} = \|u\| + \|v\|$ для $(u, v) \in \mathcal{B}$, где $\mathbb{E} = \{u : u \in C_{rd}((0, \xi)_{\mathbb{T}}, \mathbb{R})\}$ и $\|u\| = \max_{t \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}} |u(t)|$. Для $\varepsilon \in (0, \frac{\xi}{2})_{\mathbb{T}}$ положим $\mathcal{J}(\varepsilon) = \min \{\mathcal{G}(\eta), \mathcal{H}(\rho)\}$ и определим конус $\mathbb{K}_{\varepsilon} \subset \mathcal{B}$:

$$\mathbb{K}_{\varepsilon} = \{(u, v) \in \mathcal{B} : u(t) \text{ неотрицательна, } v(t) \text{ неотрицательна и} \\ \min_{t \in [\varepsilon, \xi - \varepsilon]_{\mathbb{T}}} \{u(t) + v(t)\} \geq \mathcal{J}(\varepsilon) \|(u, v)\|_{\mathcal{B}}\}.$$

Для любых $(u_1, v_1) \in \mathbb{K}_{\varepsilon}$ определим оператор $\Omega : \mathbb{K}_{\varepsilon} \rightarrow \mathcal{B}$ равенством $\Omega(u_1, v_1) = (\Omega_1 u_1, \Omega_2 v_1)$, где $\Omega_1 : \mathbb{P}_{\eta} \rightarrow \mathbb{E}$, $\Omega_2 : \mathbb{P}_{\rho} \rightarrow \mathbb{E}$ и

$$\mathbb{P}_{\eta} = \left\{ u \in \mathbb{E} : u(t) \geq 0 \text{ и } \min_{t \in [\eta, \xi - \eta]_{\mathbb{T}}} u(t) \geq \mathcal{G}(\eta) \|u(t)\| \right\}, \\ \mathbb{P}_{\rho} = \left\{ v \in \mathbb{E} : v(t) \geq 0 \text{ и } \min_{t \in [\rho, \xi - \rho]_{\mathbb{T}}} v(t) \geq \mathcal{H}(\rho) \|v(t)\| \right\}.$$

Лемма 5. *Предположим, что выполняются условия (Z1)–(Z3). Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \frac{\xi}{2})_{\mathbb{T}}$ имеем $\Omega(\mathbb{K}_{\varepsilon}) \subset \mathbb{K}_{\varepsilon}$ и $\Omega : \mathbb{K}_{\varepsilon} \rightarrow \mathbb{K}_{\varepsilon}$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Из лемм 3 и 4 получаем $\aleph_1(t, \tau) \geq 0$, $\aleph_2(t, \tau) \geq 0$ для всех $t, \tau \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$, отсюда $\Omega(u_1, v_1) \geq 0$. Можно легко проверить, что Ω_1, Ω_2 вполне непрерывны.

Для любых $(u_1, v_1) \in \mathbb{K}_{\varepsilon}$ имеем

$$\min_{t \in [\varepsilon, \xi - \varepsilon]_{\mathbb{T}}} \{\Omega_1 u_1(t) + \Omega_2 v_1(t)\} \geq \min_{t \in [\eta, \xi - \eta]_{\mathbb{T}}} \{\Omega_1 u_1(t)\} + \min_{t \in [\rho, \xi - \rho]_{\mathbb{T}}} \{\Omega_2 v_1(t)\} \geq \\ \geq \mathcal{G}(\eta) \|\Omega_1 u_1(t)\| + \mathcal{H}(\rho) \|\Omega_2 v_1(t)\| \geq \mathcal{J}(\varepsilon) \|\Omega_1 u_1(t)\| + \mathcal{J}(\varepsilon) \|\Omega_2 v_1(t)\| = \\ = \mathcal{J}(\varepsilon) \{\|\Omega_1 u_1(t)\| + \|\Omega_2 v_1(t)\|\} = \mathcal{J}(\varepsilon) \|(\Omega_1 u_1, \Omega_2 v_1)\|.$$

Итак, $\min_{t \in [\varepsilon, \xi - \varepsilon]_{\mathbb{T}}} \{\Omega_1 u_1(t) + \Omega_2 v_1(t)\} \geq \mathcal{J}(\varepsilon) \|\Omega(u_1, v_1)\|_{\mathcal{B}}$.

Следовательно, $\Omega(\mathbb{K}_{\varepsilon}) \subset \mathbb{K}_{\varepsilon}$ и ввиду теоремы Арцела–Асколи получаем, что Ω вполне непрерывен. $\square$

Теорема 1 (неравенство Гёльдера [18]–[20]). Пусть $f \in L_{\Delta}^{p_k}[0, 1]$, $p_k > 1$, $k = 1, 2, \dots, n$, и $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$. Тогда $\prod_{k=1}^n f_k \in L_{\Delta}^1[0, 1]$ и $\left\| \prod_{k=1}^n f_k \right\|_1 \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}$. Далее, если $f \in L_{\Delta}^1[0, 1]$ и $g \in L_{\Delta}^{\infty}[0, 1]$, то $fg \in L_{\Delta}^1[0, 1]$ и $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_{\infty}$.

Теорема 2 ([21]). Пусть $\mathbb{K}_{\varepsilon}$ — конус в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, а $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ — открытые множества, причем $0 \in \mathbb{R}_1, \bar{\mathbb{R}}_1 \subset \mathbb{R}_2$. Пусть $\Omega : \mathbb{K}_{\varepsilon} \cap (\bar{\mathbb{R}}_2 \setminus \mathbb{R}_1) \rightarrow \mathbb{K}_{\varepsilon}$ — вполне непрерывный оператор такой, что

$$(a_1) \quad \|\Omega r\| \leq \|r\|, r \in \mathbb{K}_{\varepsilon} \cap \partial \mathbb{R}_1, \text{ и } \|\Omega r\| \geq \|r\|, r \in \mathbb{K}_{\varepsilon} \cap \partial \mathbb{R}_2, \text{ или}$$

$$(a_2) \quad \|\Omega r\| \geq \|r\|, r \in \mathbb{K}_{\varepsilon} \cap \partial \mathbb{R}_1, \text{ и } \|\Omega r\| \leq \|r\|, r \in \mathbb{K}_{\varepsilon} \cap \partial \mathbb{R}_2.$$

Тогда Ω имеет неподвижную точку в $\mathbb{K}_{\varepsilon} \cap (\bar{\mathbb{R}}_2 \setminus \mathbb{R}_1)$.

В наших основных результатах мы будем использовать следующие условия:

(Z4) существует $\chi_i > 0$ такое, что $\lambda_i(t) > \chi_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при $t \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}$,

(Z5) существует $\zeta_i > 0$ такое, что $\mu_i(t) > \zeta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при $t \in [0, \xi]_{\mathbb{T}}$.

Рассмотрим разные случаи для $\lambda_k, \mu_k \in L_{\Delta}^{p_k}(0, \xi)_{\mathbb{T}}$:

$$(i) \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} < 1, (ii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1, (iii) \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} > 1.$$

Сначала будем искать счетное множество положительных решений для случая (i).

Теорема 3. Предположим, что выполняются условия (Z1)–(Z5). Пусть $\{\eta_r\}_{r=1}^{\infty}$ — последовательность такая, что $\eta_r \in (t_{r+1}, t_r)$, $0 < \eta_1 < \frac{\xi}{2}$, а $\{\rho_r\}_{r=1}^{\infty}$ — последовательность такая, что $\rho_r \in (t_{r+1}, t_r)$, $0 < \rho_1 < \frac{\xi}{2}$. Пусть $\{\mathfrak{C}_r\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{\mathfrak{M}_r\}_{r=1}^{\infty}$ таковы, что

$$\mathfrak{C}_{r+1} < \mathcal{G}(\eta_r) \mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r < \theta_1 \mathfrak{M}_r < \mathfrak{C}_r, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$\mathfrak{C}_{r+1} < \mathcal{H}(\rho_r) \mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r < \theta_2 \mathfrak{M}_r < \mathfrak{C}_r, \quad r \in \mathbb{N},$$

где

$$\theta_1 = \max \left\{ \left[\mathcal{G}(\eta_1) \prod_{k=1}^n \chi_k \int_{\eta_1}^{\xi - \eta_1} \aleph_1(\tau, \tau) \Delta \tau \right]^{-1}, 1 \right\},$$

$$\theta_2 = \max \left\{ \left[\mathcal{H}(\rho_1) \prod_{k=1}^n \zeta_k \int_{\rho_1}^{\xi - \rho_1} \aleph_2(\tau, \tau) \Delta \tau \right]^{-1}, 1 \right\}.$$

Предположим, что $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ удовлетворяют условиям

$$(H1) \quad \mathfrak{f}_j(v) \leq \mathfrak{h}_1 \mathfrak{C}_r \text{ для всех } t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 0 \leq v \leq \mathfrak{C}_r, \text{ где}$$

$$\mathfrak{h}_1 < \left[\|\aleph_1\|_{L_{\Delta}^q} \prod_{k=1}^n \|\lambda_k\|_{L_{\Delta}^{p_k}} \right]^{-1},$$

$$(H2) \quad \mathfrak{f}_j(v) \geq \theta_1 \mathfrak{M}_r \text{ для всех } t \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}, \quad \mathcal{G}(\eta_r) \mathfrak{M}_r \leq v \leq \mathfrak{M}_r,$$

$$(H3) \quad \mathfrak{g}_j(u) \leq \mathfrak{h}_2 \mathfrak{C}_r \text{ для всех } t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 0 \leq u \leq \mathfrak{C}_r, \text{ где}$$

$$\mathfrak{h}_2 < \left[\|\aleph_2\|_{L_{\Delta}^q} \prod_{k=1}^n \|\mu_k\|_{L_{\Delta}^{p_k}} \right]^{-1},$$

$$(H4) \quad \mathfrak{g}_j(u) \geq \theta_2 \mathfrak{M}_r \text{ для всех } t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}, \quad \mathcal{H}(\rho_r) \mathfrak{M}_r \leq u \leq \mathfrak{M}_r.$$

Тогда задача (1), (2) имеет счетное множество положительных решений

$$\left\{ \left(u_1^{[r]}, u_2^{[r]}, \dots, u_n^{[r]}, v_1^{[r]}, v_2^{[r]}, \dots, v_n^{[r]} \right) \right\}_{r=1}^{\infty}$$

таких, что $u_j^{[r]}(t) \geq 0$, $v_j^{[r]}(t) \geq 0$ на $(0, \xi)_{\mathbb{T}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть

$$\mathbb{R}_{1,r} = \{(u, v) \in \mathcal{B} : \|(u, v)\| \leq \mathfrak{C}_r\}, \quad \mathbb{R}_{2,r} = \{(u, v) \in \mathcal{B} : \|(u, v)\| \leq \mathfrak{M}_r\}$$

— открытые подмножества $\mathcal{B}$. И пусть

$$\begin{aligned} \mathbb{R}'_{1,r} &= \{u \in \mathbb{E} : \|u\| \leq \mathfrak{C}_r\}, & \mathbb{R}'_{2,r} &= \{u \in \mathbb{E} : \|u\| \leq \mathfrak{M}_r\}, \\ \mathbb{R}''_{1,r} &= \{v \in \mathbb{E} : \|v\| \leq \mathfrak{C}_r\}, & \mathbb{R}''_{2,r} &= \{v \in \mathbb{E} : \|v\| \leq \mathfrak{M}_r\} \end{aligned}$$

— открытые подмножества $\mathbb{E}$. По условию имеем

$$t^* < t_{r+1} < \eta_r < t_r < \frac{\xi}{2}, \quad t^* < t_{r+1} < \rho_r < t_r < \frac{\xi}{2} \text{ для всех } r \in \mathbb{N}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\varepsilon_r} &= \left\{ (u, v) \in \mathcal{B} : u(t) \text{ неотрицательна, } v(t) \text{ неотрицательна и} \right. \\ &\quad \left. \min_{t \in [\varepsilon_r, \xi - \varepsilon_r]_{\mathbb{T}}} \{u(t) + v(t)\} \geq \mathcal{J}(\varepsilon_r) \|(u, v)\|_{\mathcal{B}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_{\eta_r} = \left\{ u \in \mathbb{E} : u(t) \geq 0, \min_{t \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}} u(t) \geq \mathcal{G}(\eta_r) \|u(t)\| \right\}$$

и

$$\mathbb{P}_{\rho_r} = \left\{ v \in \mathbb{E} : v(t) \geq 0, \min_{t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}} v(t) \geq \mathcal{H}(\rho_r) \|v(t)\| \right\}.$$

Пусть $u_1 \in \mathbb{P}_{\eta_r} \cap \partial \mathbb{R}'_{1,r}$ и $v_1 \in \mathbb{P}_{\rho_r} \cap \partial \mathbb{R}''_{1,r}$. Тогда $u_1(\tau) \leq \mathfrak{C}_r = \|u_1\|$ и $v_1(\tau) \leq \mathfrak{C}_r = \|v_1\|$ для всех $\tau \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$. Ввиду (H1) для $\tau_{n-1} \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n &\leq \int_0^{\xi} \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \leq \\ &\leq \mathfrak{h}_1 \mathfrak{C}_r \int_0^{\xi} \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \lambda(\tau_n) \Delta \tau_n \leq \mathfrak{h}_1 \mathfrak{C}_r \int_0^{\xi} \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \prod_{k=1}^n \lambda_k(\tau_n) \Delta \tau_n. \end{aligned}$$

Поскольку $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} < 1$, то существует $\mathfrak{q} > 1$ такое, что $\frac{1}{\mathfrak{q}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$. Итак,

$$\int_0^{\xi} \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \leq \mathfrak{h}_1 \mathfrak{C}_r \|\aleph_1\|_{L^{\mathfrak{q}}_{\Delta}} \left\| \prod_{k=1}^n \lambda_k \right\|_{L^{p_k}_{\Delta}} \leq \mathfrak{C}_r.$$

Аналогично для $\tau_{n-2} \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi} \aleph_2(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) \mu(\tau_{n-1}) \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^{\xi} \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \Delta \tau_{n-1} &\leq \\ &\leq \int_0^{\xi} \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_{n-1}) \mu(\tau_{n-1}) \mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{C}_r) \Delta \tau_{n-1} \leq \mathfrak{C}_r. \end{aligned}$$

Для нечетного n

$$(\Omega_1 u_1)(t) = \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \mu(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_2, \tau_3) \lambda(\tau_3) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r.$$

Для четного n

$$(\Omega_1 u_1)(t) = \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \mu(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_2, \tau_3) \lambda(\tau_3) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r.$$

Поскольку $\mathfrak{C}_r = \|u_1\|$ для $u_1 \in \mathbb{P}_{\eta_r} \cap \partial \mathbb{R}'_{1,r}$, получаем $\|\Omega_1 u_1\| \leq \|u_1\|$. Ввиду (НЗ) для $\tau_{n-1} \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$ имеем

$$\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \leq \int_0^\xi \aleph_2(\tau_n, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \leq \\ \leq \mathfrak{h}_2 \mathfrak{C}_r \int_0^\xi \aleph_2(\tau_n, \tau_n) \prod_{\mathbf{k}=1}^n \mu_{\mathbf{k}}(\tau_n) \Delta \tau_n.$$

Поскольку $\sum_{\mathbf{k}=1}^n \frac{1}{\mathbf{p}_{\mathbf{k}}} < 1$, то существует $\mathfrak{q} > 1$ такое, что $\frac{1}{\mathfrak{q}} + \sum_{\mathbf{k}=1}^n \frac{1}{\mathbf{p}_{\mathbf{k}}} = 1$. Итак,

$$\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \leq \mathfrak{h}_2 \mathfrak{C}_r \|\aleph_2\|_{L_{\Delta}^{\mathfrak{q}}} \left\| \prod_{\mathbf{k}=1}^n \mu_{\mathbf{k}} \right\|_{L_{\Delta}^{\mathbf{p}_{\mathbf{k}}}} \leq \mathfrak{C}_r.$$

Аналогично для $\tau_{n-2} \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$

$$\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) \lambda(\tau_{n-1}) \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \Delta \tau_{n-1} \leq \\ \leq \int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) \lambda(\tau_{n-1}) \mathfrak{f}_{n-1}(\mathfrak{C}_r) \Delta \tau_{n-1} \leq \mathfrak{C}_r.$$

При нечетном n имеем

$$(\Omega_2 v_1)(t) = \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r.$$

При четном n

$$(\Omega_2 v_1)(t) = \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r.$$

Поскольку $\mathfrak{C}_r = \|v_1\|$ для $v_1 \in \mathbb{P}_{\rho_r} \cap \partial \mathbb{R}''_{1,r}$, получаем $\|\Omega_2 v_1\| \leq \|v_1\|$. Отсюда

$$\|\Omega(u_1, v_1)\| = \|\Omega_1 u_1\| + \|\Omega_2 v_1\| \leq \|u_1\| + \|v_1\| = \|(u_1, v_1)\|. \quad (5)$$

Пусть $t \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}$, тогда

$$\mathfrak{M}_r = \|u_1\| \geq u_1(t) \geq \min_{t \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}} u_1(t) \geq \mathcal{G}(\eta_r) \|u_1(t)\| \geq \mathcal{G}(\eta_r) \mathfrak{M}_r.$$

Ввиду (H2) для $\tau_{n-1} \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n &\geq \mathcal{G}(\eta_r) \int_{\eta_r}^{\xi - \eta_r} \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \geq \\ &\geq \mathcal{G}(\eta_r) \theta_1 \mathfrak{M}_r \int_{\eta_r}^{\xi - \eta_r} \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \lambda(\tau_n) \Delta \tau_n \geq \mathcal{G}(\eta_r) \theta_1 \mathfrak{M}_r \prod_{k=1}^n \chi_k \int_{\eta_1}^{\xi - \eta_1} \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \Delta \tau_n \geq \mathfrak{M}_r. \end{aligned}$$

Продолжая аналогично, для четного n имеем

$$\begin{aligned} (\Omega_1 u_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \mu(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_2, \tau_3) \lambda(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \geq \mathfrak{M}_r. \end{aligned}$$

Для нечетного n

$$\begin{aligned} (\Omega_1 u_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \mu(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_2, \tau_3) \lambda(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \geq \mathfrak{M}_r. \end{aligned}$$

Поэтому при $u_1 \in \mathbb{P}_{\eta_r} \cap \partial \mathbb{R}'_{2,r}$ получаем $\|\Omega_1 u_1\| \geq \|u_1\|$.

Пусть $t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}$, тогда

$$\mathfrak{M}_r = \|v_1\| \geq v_1(t) \geq \min_{t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}} v_1(t) \geq \mathcal{H}(\rho_r) \|v_1(t)\| \geq \mathcal{H}(\rho_r) \mathfrak{M}_r.$$

Ввиду (H2) для $\tau_{n-1} \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}$ имеем

$$\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \geq \mathcal{H}(\rho_r) \int_{\rho_r}^{\xi - \rho_r} \aleph_2(\tau_n, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \geq \mathfrak{M}_r.$$

Если n четное, то

$$\begin{aligned} (\Omega_1 v_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \geq \mathfrak{M}_r. \end{aligned}$$

Если n нечетное, то

$$\begin{aligned} (\Omega_2 v_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \geq \mathfrak{M}_r. \end{aligned}$$

Таким образом, если $v_1 \in \mathbb{P}_{\rho_r} \cap \partial \mathbb{R}''_{2,r}$, то $\|\Omega_2 v_1\| \geq \|v_1\|$. Отсюда

$$\|\Omega(u_1, v_1)\| = \|\Omega_1 u_1\| + \|\Omega_2 v_1\| \geq \|u_1\| + \|v_1\| = \|(u_1, v_1)\|. \quad (6)$$

Очевидно, $0 \in \partial \mathbb{R}_{2,r} \subset \partial \bar{\mathbb{R}}_{2,r} \subset \partial \mathbb{R}_{1,r}$. Учитывая (5) и (6), из теоремы 2 следует, что Ω имеет неподвижную точку $(u_1^{[r]}, v_1^{[r]}) \in \mathbb{K}_{\varepsilon_r} \cap (\bar{\mathbb{R}}_{1,r} \setminus \mathbb{R}_{2,r})$ такую, что $u_1^{[r]}(t) \geq 0$, $v_1^{[r]}(t) \geq 0$

на $[0, \xi]_{\mathbb{T}}$ и $r \in \mathbb{N}$. Полагая далее $u_{n+1} = u_1$, $v_{n+1} = v_1$, получаем счетное множество положительных решений $\left\{ \left(u_1^{[r]}, u_2^{[r]}, \dots, u_n^{[r]}, v_1^{[r]}, v_2^{[r]}, \dots, v_n^{[r]} \right) \right\}_{r=1}^{\infty}$ задачи (1), (2), задаваемых формулами

$$\begin{aligned} u_j(t) &= \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau) \lambda(\tau) f_j(v_{j+1}(\tau)) \Delta \tau, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 1 \leq j \leq n, \\ v_j(t) &= \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau) \mu(\tau) g_j(u_{j+1}(\tau)) \Delta \tau, \quad t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

□

Для случая $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = 1$ имеет место

Теорема 4. *Предположим, что выполняются условия (Z1)–(Z5). Пусть $\{\eta_r\}_{r=1}^{\infty}$ — последовательность такая, что $\eta_r \in (t_{r+1}, t_r)$ и $0 < \eta_1 < \frac{\xi}{2}$, а $\{\rho_r\}_{r=1}^{\infty}$ — последовательность такая, что $\rho_r \in (t_{r+1}, t_r)$ и $0 < \rho_1 < \frac{\xi}{2}$. Пусть $\{\mathfrak{C}_r\}_{r=1}^{\infty}$ и $\{\mathfrak{M}_r\}_{r=1}^{\infty}$ таковы, что*

$$\mathfrak{C}_{r+1} < \mathcal{G}(\eta_r) \mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r < \theta_1 \mathfrak{M}_r < \mathfrak{C}_r, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$\mathfrak{C}_{r+1} < \mathcal{H}(\rho_r) \mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r < \theta_2 \mathfrak{M}_r < \mathfrak{C}_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Предположим также, что f, g удовлетворяют условиям (H2), (H4) и

(H5) $f_j(v) \leq h_3 \mathfrak{C}_r$ для всех $t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$, $0 \leq v \leq \mathfrak{C}_r$, где

$$h_3 < \left[\|\aleph_1\|_{L_{\Delta}^{\infty}} \prod_{k=1}^n \|\lambda_k\|_{L_{\Delta}^{p_k}} \right]^{-1},$$

(H6) $g_j(u) \leq h_4 \mathfrak{C}_r$ для всех $t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$, $0 \leq u \leq \mathfrak{C}_r$, где

$$h_4 < \left[\|\aleph_2\|_{L_{\Delta}^{\infty}} \prod_{k=1}^n \|\mu_k\|_{L_{\Delta}^{p_k}} \right]^{-1},$$

Тогда задача (1), (2) имеет счетное множество положительных решений

$$\left\{ \left(u_1^{[r]}, u_2^{[r]}, \dots, u_n^{[r]}, v_1^{[r]}, v_2^{[r]}, \dots, v_n^{[r]} \right) \right\}_{r=1}^{\infty}$$

таких, что $u_j^{[r]}(t) \geq 0$, $v_j^{[r]}(t) \geq 0$ на $(0, \xi)_{\mathbb{T}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для фиксированного r положим $\mathbb{R}_{1,r}, \mathbb{R}_{2,r}, \mathbb{R}'_{1,r}, \mathbb{R}'_{2,r}, \mathbb{R}''_{1,r}, \mathbb{R}''_{2,r}$ как в доказательстве теоремы 3, и пусть $u_1 \in \mathbb{P}_{\eta_r} \cap \partial \mathbb{R}'_{1,r}$. Снова $u_1(\tau) \leq \mathfrak{C}_r = \|u_1\|$ для всех $\tau \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$.

Ввиду (H5) для $\tau_{n-1} \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) f_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n &\leq \int_0^\xi \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \lambda(\tau_n) f_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \leq \\ &\leq h_3 \mathfrak{C}_r \int_0^\xi \aleph_1(\tau_n, \tau_n) \lambda(\tau_n) \Delta \tau_n \leq \mathfrak{C}_r. \end{aligned}$$

Аналогично для $\tau_{n-2} \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}$ получаем

$$\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) \mu(\tau_{n-1}) g_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) f_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \Delta \tau_{n-1} \leq$$

$$\leq \int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) \mu(\tau_{n-1}) \mathfrak{g}_{n-1}(\mathfrak{C}_r) \Delta \tau_{n-1} \leq \mathfrak{h}_4 \mathfrak{C}_r \int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_{n-1}) \mu(\tau_{n-1}) \Delta \tau_{n-1} \leq \mathfrak{C}_r.$$

При нечетном n имеем

$$\begin{aligned} (\Omega_1 u_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{g}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_{n-1}, \tau_n) \lambda(\tau_n) \mathfrak{f}_n(v_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r. \end{aligned}$$

При четном n

$$\begin{aligned} (\Omega_1 u_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_1(t, \tau_1) \lambda(\tau_1) \mathfrak{f}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{g}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{C}_r = \|u_1\|$ для $u_1 \in \mathbb{P}_{\eta_r} \cap \partial \mathbb{R}'_{1,r}$, получаем $\|\Omega_1 u_1\| \leq \|u_1\|$.

Пусть $v_1 \in \mathbb{P}_{\rho_r} \cap \partial \mathbb{R}''_{1,r}$ и $t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}$.

Тогда при нечетном n имеем

$$\begin{aligned} (\Omega_2 v_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r. \end{aligned}$$

При четном n получаем

$$\begin{aligned} (\Omega_2 v_1)(t) &= \int_0^\xi \aleph_2(t, \tau_1) \mu(\tau_1) \mathfrak{g}_1 \left(\int_0^\xi \aleph_1(\tau_1, \tau_2) \lambda(\tau_2) \mathfrak{f}_2 \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_2, \tau_3) \mu(\tau_3) \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mathfrak{f}_{n-1} \left(\int_0^\xi \aleph_2(\tau_{n-1}, \tau_n) \mu(\tau_n) \mathfrak{g}_n(u_1(\tau_n)) \Delta \tau_n \right) \dots \Delta \tau_3 \right) \Delta \tau_2 \right) \Delta \tau_1 \leq \mathfrak{C}_r. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{C}_r = \|v_1\|$ для $v_1 \in \mathbb{P}_{\rho_r} \cap \partial \mathbb{R}''_{1,r}$, имеем $\|\Omega_2 v_1\| \leq \|v_1\|$.

Отсюда следует (6). Пусть $t \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}$. Тогда

$$\mathfrak{M}_r = \|u_1\| \geq u_1(t) \geq \min_{t \in [\eta_r, \xi - \eta_r]_{\mathbb{T}}} u_1(t) \geq \mathcal{G}(\eta_r) \|u_1(t)\| \geq \mathcal{G}(\eta_r) \mathfrak{M}_r.$$

Пусть $t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}$, тогда

$$\mathfrak{M}_r = \|v_1\| \geq v_1(t) \geq \min_{t \in [\rho_r, \xi - \rho_r]_{\mathbb{T}}} v_1(t) \geq \mathcal{H}(\rho_r) \|v_1(t)\| \geq \mathcal{H}(\rho_r) \mathfrak{M}_r.$$

Теперь аргументация, приведшая нас к (6), может быть использована и в этом случае, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Рассмотрим, наконец, случай $\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} > 1$.

Теорема 5. *Предположим, что выполняются условия (Z1)–(Z5). Пусть $\{\eta_r\}_{r=1}^\infty$ — последовательность такая, что $\eta_r \in (t_{r+1}, t_r)$, $0 < \eta_1 < \frac{\xi}{2}$, а $\{\rho_r\}_{r=1}^\infty$ — последовательность такая, что $\rho_r \in (t_{r+1}, t_r)$, $0 < \rho_1 < \frac{\xi}{2}$. Пусть $\{\mathfrak{C}_r\}_{r=1}^\infty$ и $\{\mathfrak{M}_r\}_{r=1}^\infty$ таковы, что*

$$\mathfrak{C}_{r+1} < \mathcal{G}(\eta_r)\mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r < \theta_1 \mathfrak{M}_r < \mathfrak{C}_r, \quad r \in \mathbb{N},$$

$$\mathfrak{C}_{r+1} < \mathcal{H}(\rho_r)\mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r < \theta_2 \mathfrak{M}_r < \mathfrak{C}_r, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Предположим также, что $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ удовлетворяют (H2), (H4) и

$$(H7) \quad \mathfrak{f}_j(v) \leq \mathfrak{h}_5 \mathfrak{C}_r \text{ для всех } t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 0 \leq v \leq \mathfrak{C}_r, \text{ где}$$

$$\mathfrak{h}_5 < \left[\|\aleph_1\|_{L_\Delta^\infty} \prod_{k=1}^n \|\lambda_k\|_{L_\Delta^1} \right]^{-1},$$

$$(H8) \quad \mathfrak{g}_j(u) \leq \mathfrak{h}_6 \mathfrak{C}_r \text{ для всех } t \in (0, \xi)_{\mathbb{T}}, \quad 0 \leq u \leq \mathfrak{C}_r, \text{ где}$$

$$\mathfrak{h}_6 < \left[\|\aleph_2\|_{L_\Delta^\infty} \prod_{k=1}^n \|\mu_k\|_{L_\Delta^1} \right]^{-1}.$$

Тогда задача (1), (2) имеет счетное множество положительных решений

$$\left\{ \left(u_1^{[r]}, u_2^{[r]}, \dots, u_n^{[r]}, v_1^{[r]}, v_2^{[r]}, \dots, v_n^{[r]} \right) \right\}_{r=1}^\infty$$

таких, что $u_j^{[r]}(t) \geq 0$, $v_j^{[r]}(t) \geq 0$ на $(0, \xi)_{\mathbb{T}}$, $j = 1, 2, \dots, n$, $r \in \mathbb{N}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. □

3. ПРИМЕР

Для иллюстрации наших результатов рассмотрим

Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу на $\mathbb{T} = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_j''(t) + \lambda(t)\mathfrak{f}_j(v_{j+1}(t)) &= 0, \quad t \in [0, 1], \quad j = 1, 2; \\ v_j''(t) + \mu(t)\mathfrak{g}_j(u_{j+1}(t)) &= 0; \\ u_3(t) &= u_1(t), \quad v_3(t) = v_1(t); \\ u_j(0) - u_j'(0) &= 0, \quad v_j(0) - v_j'(0) = 0; \\ u_j(1) + u_j'(1) &= 0, \quad v_j(1) + v_j'(1) = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\lambda(t) = \lambda_1(t)\lambda_2(t)$, $\mu(t) = \mu_1(t)\mu_2(t)$ и

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{\left| t - \frac{1}{4} \right|^{\frac{1}{2}}}, \quad \lambda_2(t) = \frac{1}{\left| t - \frac{3}{4} \right|^{\frac{1}{2}}}, \quad \mu_1(t) = \frac{1}{\left| t - \frac{1}{4} \right|^{\frac{1}{2}}}, \quad \mu_2(t) = \frac{1}{\left| t - \frac{1}{3} \right|^{\frac{1}{2}}},$$

$$f_1(v) = f_2(v) = \begin{cases} 0.05 \times 10^{-4}, & v \in (10^{-4}, \infty); \\ \frac{23 \times 10^{-(4r+3)} - 0.05 \times 10^{-(4r)}}{10^{-(4r+3)} - 10^{-(4r)}} (v - 10^{-(4r)}) + 0.05 \times 10^{-(8r)}, \\ & v \in [10^{-(4r+3)}, 10^{-(4r)}]; \\ 23 \times 10^{-(4r+3)}, & v \in \left(\frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)}, 10^{-(4r+3)}\right); \\ \frac{23 \times 10^{-(4r+3)} - 0.05 \times 10^{-(8r)}}{0.05 \times 10^{-(4r+3)} - 10^{-(4r+4)}} (v - 10^{-(4r+4)}) + 0.05 \times 10^{-(8r)}, \\ & v \in \left(10^{-(4r+4)}, \frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)}\right]; \\ 0, & v = 0, \end{cases}$$

$$g_1(u) = g_2(u) = \begin{cases} 0.05 \times 10^{-4}, & u \in (10^{-4}, \infty); \\ \frac{49 \times 10^{-(4r+3)} - 0.05 \times 10^{-(4r)}}{10^{-(4r+3)} - 10^{-(4r)}} (u - 10^{-(4r)}) + 0.05 \times 10^{-(8r)}, \\ & u \in [10^{-(4r+3)}, 10^{-(4r)}]; \\ 49 \times 10^{-(4r+3)}, & u \in \left(\frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)}, 10^{-(4r+3)}\right); \\ \frac{49 \times 10^{-(4r+3)} - 0.05 \times 10^{-(8r)}}{0.05 \times 10^{-(4r+3)} - 10^{-(4r+4)}} (u - 10^{-(4r+4)}) + \\ 0.05 \times 10^{-(8r)}, & u \in \left(10^{-(4r+4)}, \frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)}\right]; \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

Пусть $t_r = \frac{31}{64} - \sum_{k=1}^r \frac{1}{4(k+1)^4}$, $\eta_r = \rho_r = \frac{1}{2}(t_r + t_{r+1})$, $r = 1, 2, 3, \dots$, тогда $\eta_1 = \rho_1 = \frac{15}{32} - \frac{1}{648} < \frac{15}{32}$ и $t_{r+1} < \eta_r = \rho_r < t_r$, $\eta_r > \frac{1}{5}$, $\rho_r > \frac{1}{5}$, $r = 1, 2, 3, \dots$. Ясно, что $t_1 = \frac{15}{32} < \frac{1}{2}$, $t_r - t_{r+1} = \frac{1}{4(r+2)^4}$, $r = 1, 2, 3, \dots$.

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, то

$$t^* = \lim_{r \rightarrow \infty} t_r = \frac{31}{64} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4(k+1)^4} = \frac{47}{64} - \frac{\pi^4}{360} > \frac{1}{5}.$$

Поэтому $\lambda_1, \lambda_2 \in L^p[0, 1]$, $\mu_1, \mu_2 \in L^p[0, 1]$ для всех $0 < p < 2$,

$$\mathcal{G}(\eta_1) = 0.7336033951 = \mathcal{H}(\rho_1), \quad \chi_1 = \chi_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$$

и

$$\int_{\eta_1}^{\xi - \eta_1} \aleph_1(\tau, \tau) d\tau = \int_{\frac{15}{32} - \frac{1}{648}}^{1 - \frac{15}{32} + \frac{1}{648}} \frac{(2 - \tau)(1 + \tau)}{3} d\tau = 0.04918197801 = \int_{\rho_1}^{\xi - \rho_1} \aleph_2(\tau, \tau) d\tau.$$

Таким образом, мы получаем

$$\theta_1 = \max \left\{ \left[\mathcal{G}(\eta_1) \prod_{k=1}^n \chi_k \int_{\eta_1}^{\xi-\eta_1} \aleph_1(\tau, \tau) d\tau \right]^{-1}, 1 \right\} = 22.879165774714,$$

$$\theta_2 = \max \left\{ \left[\mathcal{H}(\rho_1) \prod_{k=1}^n \zeta_k \int_{\rho_1}^{\xi-\rho_1} \aleph_2(\tau, \tau) d\tau \right]^{-1}, 1 \right\} = 48.005754905498.$$

Наконец, зафиксируем $0 < a < 1$. Тогда $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in L^{1+a}[0, 1]$ и $\frac{2}{1+a} > 1$ для $0 < a < 1$.

Получаем

$$\prod_{k=1}^n \|\lambda_k\|_{L^{p_k}} \approx 5.78, \quad \prod_{k=1}^n \|\mu_k\|_{L^{p_k}} \approx 9.30$$

и $\|\aleph_1\|_\infty = \frac{2}{3}$, $\|\aleph_2\|_\infty = \frac{2}{3}$. Итак, для $0 < a < 1$ имеем

$$\mathbf{h}_1 < \left[\|\aleph_1\|_\infty \prod_{k=1}^n \|\mu_k\|_{L_\Delta^{p_k}} \right]^{-1} \approx 0.2595155709342,$$

$$\mathbf{h}_2 < \left[\|\aleph_2\|_\infty \prod_{k=1}^n \|\mu_k\|_{L_\Delta^{p_k}} \right]^{-1} \approx 0.1612903225806.$$

Возьмем $\mathbf{h}_1 = \frac{1}{4}$, $\mathbf{h}_2 = \frac{3}{20}$. Кроме того, если взять $\mathfrak{C}_r = 10^{-4r}$, $\mathfrak{M}_r = 10^{-(4r+3)}$, то

$$\mathfrak{C}_{r+1} = 10^{-(4r+4)} < \frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)} < \mathcal{G}(\eta_r) \mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r = 10^{-(4r+3)} < \mathfrak{C}_r = 10^{-4r},$$

$$\theta_1 \mathfrak{M}_r = 22.879165774714 \times 10^{-(4r+3)} < \frac{1}{4} \times 10^{-4r} = \mathbf{h}_1 \mathfrak{C}_r, \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\mathfrak{C}_{r+1} = 10^{-(4r+4)} < \frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)} < \mathcal{H}(\rho_r) \mathfrak{M}_r < \mathfrak{M}_r = 10^{-(4r+3)} < \mathfrak{C}_r = 10^{-4r},$$

$$\theta_2 \mathfrak{M}_r = 48.005754905498 \times 10^{-(4r+3)} < \frac{3}{20} \times 10^{-4r} = \mathbf{h}_2 \mathfrak{C}_r, \quad r = 1, 2, 3, \dots,$$

и $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ удовлетворяют следующим условиям роста:

$$\mathbf{f}_1(v) = \mathbf{f}_2(v) \leq \mathbf{h}_1 \mathfrak{C}_r = \frac{1}{4} \times 10^{-4r}, \quad v \in [0, 10^{-4r}];$$

$$\mathbf{f}_1(v) = \mathbf{f}_2(v) \geq \theta_1 \mathfrak{M}_r = 22.879165774714 \times 10^{-(4r+3)}, \quad v \in \left[\frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)}, 10^{-(4r+3)} \right];$$

$$\mathbf{g}_1(u) = \mathbf{g}_2(u) \leq \mathbf{h}_2 \mathfrak{C}_r = \frac{3}{20} \times 10^{-4r}, \quad u \in [0, 10^{-4r}];$$

$$\mathbf{g}_1(u) = \mathbf{g}_2(u) \geq \theta_2 \mathfrak{M}_r = 48.005754905498 \times 10^{-(4r+3)}, \quad u \in \left[\frac{1}{5} \times 10^{-(4r+3)}, 10^{-(4r+3)} \right].$$

Следовательно, все условия теоремы 3 выполнены. Поэтому по теореме 3 итеративная система краевых задач (7) обладает счетным множеством положительных решений $\left\{ \left(u_1^{[r]}, u_2^{[r]}, v_1^{[r]}, v_2^{[r]} \right) \right\}_{r=1}^\infty$ таких, что $u_j^{[r]}(t) \geq 0$, $v_j^{[r]}(t) \geq 0$ на $[0, 1]$, $j = 1, 2$ и $r \in \mathbb{N}$.

Авторы благодарны рецензентам за их ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Agarwal R.P., Bohner M. *Basic Calculus on Time Scales and some of its Applications*, Results Math. **35**, 3–22 (1999).
- [2] Agarwal R., Bohner M., O'Regan D., Peterson A. *Dynamic equations on time scales: a survey*, J. Comput. Appl. Math. **141** (1–2), 1–26 (2002).
- [3] Bohner M., Peterson A.C. *Advances in Dynamic Equations on Time Scales* (Birkhauser, Boston, 2003).
- [4] Benchohra M., Berhoun F., Hamani S., Henderson J., Ntouyas S.K., Quahab A., Purnas I.K. *Eigenvalues for iterative systems of nonlinear boundary value problems on time scales*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory. **1** (1), 11–22 (2009).
- [5] Prasad K.R., Khuddush M., Vidyasagar K.V. *Infinitely many positive solutions for an iterative system of singular BVP on time scales*, Cubo **24** (1), 21–35 (2022).
- [6] Graef J.R., Heidarkhani S., Kong L. *Infinitely Many Solutions for Systems of Sturm–Liouville Boundary Value Problems*, Results Math. **66**, 327–341 (2014).
- [7] Henderson J., Ntouyas S.K. *Positive solutions for systems of n^{th} order three-point nonlocal boundary value problems*, Electron. J. Qual. Theory Diff. Equat. **2007** (18), 1–12 (2007).
- [8] Henderson J., Ntouyas S.K., Purnaras I.K. *Positive solutions for systems of generalized three-point nonlinear boundary value problems*, Comment. Math. Univ. Carol. **49** (1), 79–91 (2008).
- [9] Henderson J., Ntouyas S.K., Purnaras I.K. *Positive solutions for systems of second order four-point nonlinear boundary value problems*, Commun. Appl. Anal. **12** (1), 29–40 (2008).
- [10] Prasad K.R., Sreedhar N., Kumar K.R. *Solvability of iterative systems of three-point boundary value problems*, TWMS J. Appl. Eng. Math. **3** (2), 147–159 (2013).
- [11] Prasad K.R., Rashmita M., Sreedhar N. *Solvability of higher order three-point iterative systems*, Уфимск. матем. журн. **12** (3), 107–122 (2020).
- [12] Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. *Eigenvalue Problems for Systems of Nonlinear Boundary Value Problems on Time Scales*, Adv. Diff. Equat. **2007** (1), 1–10 (2007).
- [13] Prasad K.R., Sreedhar N., Srinivas M.A.S. *Eigenvalue intervals for iterative systems of nonlinear three-point boundary value problems on time scales*, Nonlinear Stud. **22** (3), 419–431 (2015).
- [14] Prasad K.R., Sreedhar N., Narasimhulu Y. *Eigenvalue intervals for iterative systems of nonlinear m -point boundary value problems on time scales*, Diff. Equat. Dyn. Syst. **22**, 353–368 (2014).
- [15] Prasad K.R., Khuddush M., Vidyasagar K.V. *Denumerably Many Positive Solutions for Iterative System of Singular Two-Point Boundary Value Problems on Time Scales*, Int. J. Diff. Equat. **15** (1), 153–172 (2020).
- [16] Karaca I.Y., Tokmak F. *Eigenvalues for iterative systems of nonlinear m -point boundary value problems on time scales*, Bound. Value Probl. **2014** (63), 1–17 (2014).
- [17] Bohner M., Luo H. *Singular second-order multipoint dynamic boundary value problems with mixed derivatives*, Adv. Diff. Equat. **2006**, 054989, 1–15 (2006).
- [18] Agarwal R.P., Otero-Espinar V., Perera K., Vivero D.R. *Basic properties of Sobolev's spaces on time scales*, Adv. Diff. Equat. **2006**, 038121, 1–14 (2006).
- [19] Anastassiou G.A. *Intelligent Mathematics: Computational Analysis* (Springer, Heidelberg, 2011).
- [20] Özkan U.M., Sarikaya M.Z., Yildirim H. *Extensions of certain integral inequalities on time scales*, Appl. Math. Lett. **21** (10), 993–1000 (2008).
- [21] Guo D., Lakshmikantham V. *Nonlinear problems in abstract cones* (Academic Press, San Diego, 1988).

Капула Раджендра Прасад

Университет Андхра,

Вишакхапатнам, 530003, Индия,

e-mail: rajendra92@rediffmail.com

Буту Сравани

Университет Андхра,

Вишакхапатнам, 530003, Индия,

e-mail: butusravani@gmail.com

Намбурн Сридхар

*Институт технологий и менеджмента Ганди,
Вишакхапатнам, 530045, Индия,*

e-mail: sreedharnamburil3@gmail.com

K.R. Prasad, B. Sravani, and N. Sreedhar

Countably many positive solutions for iterative system of boundary value problems on time scales

Abstract. This paper establishes the existence of countably many positive solutions for a second order iterative system of two-point boundary value problems by using Hölder's inequality and Guo–Krasnoselskii's fixed point theorem for operator on a cone.

Keywords: iterative system, time scale, Green's function, singularity, cone, positive solution.

Kapula Rajendra Prasad

*Andhra University,
Visakhapatnam, 530003 India,*

e-mail: rajendra92@rediffmail.com

Butu Sravani

*Andhra University,
Visakhapatnam, 530003 India,*

e-mail: butusravani@gmail.com

Namburi Sreedhar

*GITAM (Deemed to be University),
Visakhapatnam, 530045 India,*

e-mail: sreedharnamburil3@gmail.com