

Ж.З. НУРИДДИНОВ, Б.З. НУРИДДИНОВ, З.Ш. ОЧИЛОВА

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН В ПЛОСКИХ ТРЕХСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

Аннотация. В работе рассматривается задача распространения собственных волн напряжения в полосе, которая находится в контакте с неограниченной изотропной вязкоупругой средой из другого материала. Предполагается, что внешние воздействия при распространении собственных волн отсутствуют. В некоторых случаях физические свойства вязкоупругих материалов описываются линейными наследственными соотношениями Больцмана–Вольтера с интегральными разностями ядер наследственности. Некоторые из слоев могут быть упругими. В этом случае ядра наследственности, описывающие реологические свойства слоев, тождественно равны нулю. Систему, в которой реологические свойства слоев идентичны (ядра наследственности элементов равны между собой), будем называть диссипативно однородной. В частном случае, когда внешние воздействия отсутствуют, рассматривается распространение затухающих волн системы; при наличии внешних воздействий — вынужденных. Основной проблемой является исследование диссипативных (демпфирующих) свойств системы в целом, а также ее напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: полоса, наследственная соотношение, диссипация энергия, коэффициент затухания.

УДК: 539.3

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-51-60

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о динамическом взаимодействии оболочек и пластин со сплошными средами (воздух, вода, грунт) рассмотрены в [1], [2], из которых следует, что несмотря на многочисленные исследования по указанным проблемам, ряд вопросов изучен недостаточно. В частности, весьма важные для практики — расчеты конструкций на действие различного рода подвижных нагрузок. Простейшими примерами систем с подвижными нагрузками являются: железнодорожные рельсы под действием движущихся составов, асфальтированные, бетонированные и другие поверхности под действием движущихся транспортных средств, в частности, самолетов, трубопроводы под действием очистных устройств и движущейся жидкости, пластины и оболочки под действием перемещающейся жидкости, газа т. п. [3], [4].

В геофизических и технических приложениях теории распространения упругих волн часто бывает полезно рассматривать среду, в которой распространяются волны, как состоящую из нескольких слоев. Эти волны могут действительно существовать, как, например, в зоне поверхности раздела между океаном и дном, либо могут быть введены в теоретическую модель в качестве простого средства, учитывающего неоднородность физических свойств.

Поступила в редакцию 28.11.2023, после доработки 09.12.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Во всяком случае, слоистость — важный фактор в проблеме распространения упругих волн, и немало труда затрачено на решение подобных проблем [5], [6].

Изучаемая задача имеет огромное значение в области сейсморазведки. В настоящее время в сейсморазведке структурные факторы не играют решающей роли, а на первый план выходят неструктурные литологические проблемы. Иными словами, стало необходимо определять состав и свойства пород, залегающих в сложных условиях на больших глубинах. Такую ситуацию можно описать моделью одного или нескольких пластов, свойства которых изменяются в горизонтальном направлении таким образом, что в них имеется участок с пониженной скоростью распространения упругих (или вязкоупругих) волн. Изменение скорости происходит достаточно плавно и практически мало связано с геометрией пласта [7]. Эти участки перспективны в отношении нефти и газа и поэтому представляют собой объект поиска. Поисковым критерием являются [8], [9] свойства пласта, расположенного на глубине 3000–4000 м. Перепад в упругих свойствах составляет 10–20%.

Актуальной задачей является: возбуждая упругие волны вблизи поверхности земли или моря и проводя прием волн, прошедших в землю и возвращающихся к поверхности, по наблюдаемым волнам восстановить "образ" объекта, т. е. построить модель одного из перечисленных выше типов. В большинстве задач по слоистым средам на поверхности раздела принимались условия идеального соединения, что, несомненно, важно во многих ситуациях. В некоторых же случаях могут быть основания считать соединение не полностью жестким, что требует исследование "несовершенного" соединения. Данная задача относится к проблемам распространения волн напряжения в слоистой среде, часто встречающимся в научных [10], [11] публикациях по этим вопросам вследствие их большого значения в геофизике. Однако детально разработаны вплоть до численных результатов только те задачи, которые приводят к реальному решению. Комплексными решениями, получение которых достаточно сложно, до сих пор пренебрегали как не имеющими большого значения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим деформируемый (упругий или вязкоупругий) слой толщиной h , находящийся в безграничной деформируемой среде и пусть в нем распространяется гармоническая волна с фазовой скоростью C .

Ниже мы рассмотрим плоскую задачу, где перемещения не зависят от перемещенной Z . Математически эта задача сформулируется следующим образом:

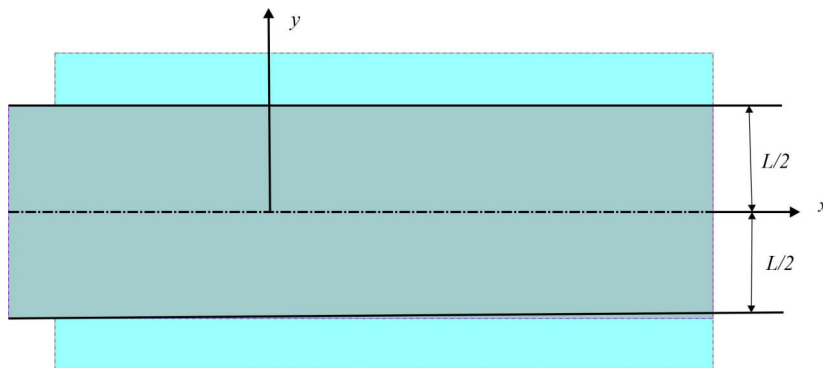


Рис. 1. Расчетные схемы

$$\begin{aligned}\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} j &= \frac{\partial \sigma_{xx}^{(\nu)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(\omega)}}{\partial y}, \\ \rho_j \frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial t^2} j &= \frac{\partial \sigma_{yy}^{(S)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{(S)}}{\partial x}, \quad j = (1, 2, 3),\end{aligned}\tag{1}$$

где ρ_j — плотность материала; u_j и ϑ_j соответственно перемещения по направлениям x и y ; j — номер слоя. Теперь рассмотрим решение дифференциального уравнения (1) для одного слоя. Тогда вместо $\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}$ подставляем следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{(j)} &= \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \nu_j \frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} \right), \\ \sigma_{yy}^{(j)} &= \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} + \nu_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xy}^{(j)} &= G_j \left(\frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

После этого решение уравнения (1) находится в виде

$$u_j = U_j(y) e^{i(\omega t - \gamma x)}, \quad \vartheta_j = V_j(y) e^{i(\omega t - \gamma x)},\tag{2}$$

где ω — круговая частота, $\omega = 2\pi n$, n — частота колебаний; $\lambda = 2\pi\gamma$ — длина волны, $l = \omega\gamma$ — фазовая скорость волн.

Подставив (2) в (1), получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned}L_{Lj} \frac{d\nu_i}{dy} - L_2; \quad \nu_j - G \frac{d^2 \nu_j}{dy^2} &= 0, \\ L_{Lj} \frac{d\nu_i}{dy} - L_3 V; \quad \nu_j - L_{4j} \frac{d^2 \nu_j}{dy^2} &= 0, \\ L_{Lj} = \left(\frac{E_j \nu_j}{1 - \nu_j^2} - G_j \right)^{j\gamma}; \quad L_{2j} = \rho_j \omega^2 - \frac{E_j}{1 - \nu_j^2} \gamma^2,\end{aligned}\tag{3}$$

где

$$L_{3j} = \rho_j \omega^2 - G_j \gamma^2; \quad L_{4j} = \frac{E_j}{1 - \nu_j^2}.$$

После введения вспомогательной функции $\Phi_j(y)$ в силу

$$U_j = L_{ij} \frac{d}{dy} \Phi_j; \quad V_j = \left[L_{ij} + G \frac{d}{dy^2} \right] \Phi_j\tag{4}$$

получим из (3) дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4 \Phi_j}{dy^4} + L_{5j} \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} + L_{6j} \Phi_j,$$

где

$$\begin{aligned}L_{5j} &= -2\gamma^2 + \frac{(3 - \nu_j)\omega^2}{2c_{sj}^2}, \quad L_{6j} = \gamma^2 - \frac{(3 - \nu_j)\omega^2 \gamma^2}{2c_{sj}^2} + \frac{\omega^4}{c_{pj}^2 c_{sj}^2}, \\ c_{pj} &= \sqrt{\frac{E_j}{\rho_j(1 - \nu_j)}} \text{ и } c_{sj} = \sqrt{\frac{G_j}{\rho_j}}, \\ \Phi_j(y) &= A_j e^{\alpha_j y} + B_j e^{-\alpha_j y} + C_j e^{S_j y} + D_j e^{-S_j y}.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь

$$\alpha_j^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{pj}^2} \right); \quad S_j^2 = \gamma^2 \left(1 - \frac{c^2}{c_{Sj}^2} \right),$$

где A_j, B_j, C_j, D_j — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий. Если $\frac{c^2}{c_{pj}^2} > 1$ и $\frac{c^2}{c_{Sj}^2} > 1$, то решение (5) выражается через тригонометрические функции. С помощью уравнений (4) выражаются смещения Π_1 .

Запишем решение уравнения для первого и второго слоя:

$$\begin{aligned} u_j &= i\gamma \left[A_j q_j e^{q_1 y} - B_j q_j e^{-q_1 y} + C_j S_j e^{S_1 y} - D_j S_j e^{-S_1 y} \right] e^{-(\omega t - \gamma x)}, \\ \nu_j &= \left[-A_j q_j e^{q_1 y} - B_j q_j e^{-q_1 y} + C_j S_j e^{S_1 y} - D_j y^2 \cos(-S_j y) \right] e^{-(\omega t - \gamma x)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение (6) для полупространства записывается в виде:

$$\begin{aligned} u_2 &= i\gamma \left[A_3 q_3 \sin(q_3 y) - B_3 q_3 \cos(-q_3 y) + C_3 S_3 e^{S_3 y} - D_3 S_3 e^{-S_3 y} \right] e^{-(\omega t - \gamma x)}, \\ \nu_3 &= \left[A_3 q_3^2 e^{q_3 y} - B_3 q_3 e^{-q_3 y} - C_3 C_4^2 e^y - D_3^2 e^{-S} \right] e^{-(\omega t - \gamma x)}, \\ q_j &= \gamma \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{pj}^2}}; \quad S_j = \gamma \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{Sj}^2}}; \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$c_{pj}^2 = \frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}, \quad c_{Sj}^2 = \frac{\mu_j}{\rho_j},$$

ω — круговая частота; A_j, B_j, C_j, D_j — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

Решения (7) должны удовлетворять условию экспоненциального затухания по координате $y (y \rightarrow \infty)$. Тогда решение (7) для $y \geq il/2$ и $y \leq -il/2$ принимает вид:

$$\begin{aligned} u_3 &= \left[-B_3 i \gamma q_3 e^{-q_2 y} - D_3 i \gamma S_3 e^{-q_2 y} \right] e^{i(\omega t - \gamma x)}, \\ V_3 &= \left[B_3 i \gamma q_3^2 e^{-q_2 y} - D_3 i \gamma^2 S_3 e^{-q_2 y} \right] e^{i(\omega t - \gamma x)}. \end{aligned}$$

В симметричном движении слоя решение при $-L/2 \leq y \leq L/2$ записывается в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \left[A_1 i_1 \gamma_1 q_1 \cos(q_2 y) - C_2 i \gamma S_2 \cos(S_2 y) \right] e^{i(\omega t - \gamma x)}, \\ V_3 &= \left[-A_1 q_2^2 \sin(q_2 y) - C_2 \gamma^2 S_2 \sin(S_2 y) \right] e^{i(\omega t - \gamma x)}. \end{aligned}$$

На контакте $y = \pm L/2$ выполняются условия равенства перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} (U^{(1)})_{y=L/2} &= (U^{(2)})_{y=L/2}, & (U^{(2)})_{y=L/2} &= (U^{(2)})_{y=-L/2}, \\ (v^{(1)})_{y=L/2} &= (v^{(2)})_{y=L/2}, & (v^{(2)})_{y=L/2} &= (v^{(2)})_{y=-L/2}, \\ (\sigma_{yy}^{(1)})_{y=L/2} &= (\sigma_{yy}^{(2)})_{y=L/2}, & (\sigma_{yy}^{(2)})_{y=L/2} &= (\sigma_{yy}^{(3)})_{y=-L/2}, \\ (\sigma_{xy}^{(1)})_{y=L/2} &= (\sigma_{xy}^{(2)})_{y=L/2}, & (\sigma_{xy}^{(2)})_{y=L/2} &= (\sigma_{xy}^{(3)})_{y=-L/2}. \end{aligned}$$

На свободной поверхности $y = 1 + L/2$ ставится условие свободы от напряжений, $\sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(1)}$.

Рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $C_1 < C_2$, q_j и S_j являются действительными.

Тогда частотное уравнение принимает вид

$$\|\Delta(a_{ij})\| = 0, \quad i = \overline{1, 10}, \quad j = \overline{1, 10}; \quad (8)$$

здесь

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_2 \cos(q_2 L/2), \quad a_{12} = S_1 \cos(S_1 L/2), \quad a_{13} = q_1 e^{-qL/2}, \quad a_{14} = S_2 e^{-SL/2}, \\ a_{21} &= -q_2^2 \sin(q_2 L/2), \quad a_{22} = -\gamma^2 \cos(S_1 L/2), \quad a_{31} = q_1(-q_1^2 + \nu_1 \gamma^2) \cos(S_1 L/2), \\ a_{33} &= \rho_0 \varepsilon_u^2 q_2(-q_1^2 + \nu_{21} \gamma^2) e^{q_j L/2}, \quad a_{34} = \rho_0 \varepsilon_u^2 S_2 \gamma^2 (1 - \nu_2) + \nu_2 \gamma^2 \gamma e^{-S_2 L/2}, \\ a_{41} &= 2q_1^2 \sin(q_1 l/2), \quad a_{42} = (S_1^2 + g^2) \sin(S_1 l/2), \\ a_{43} &= \rho_0 E_{11}^2 (S^2 + \gamma^2) e^{-S_2 l/2}, \quad a_{44} = \rho_0 E_{22}^2 (S^2 + \gamma^2) e^{-S_2 l/2}, \\ \rho_0 &= \rho_2 / \rho, \quad E_{11} = C_{p_2} / C_{p_1}, \quad E_{22} = C_{S_2} / C_{S_1}. \end{aligned}$$

Остальные элементы определяются аналогично. Основной целью работы является исследование изменения фазовой скорости C_{RJ} в зависимости от длины волны, геометрических и физико-механических параметров системы. В рассматриваемом случае, если $E_1 = E_2$; $\nu_1 = \nu_2$; $\rho_1 = \rho_2$, то два слоя работают как одно целое: при $\gamma = \gamma_R$, где $\gamma_R = 2\pi/\lambda$ — действительная часть волнового числа; λ — длина волны; $C = \omega/\gamma_R$. Численные результаты получены при следующих параметрах слоя и окружающей его среды: $C_{p_1} = 2300$ м/с, $C_{S_1} = 1300$ м/с, $\nu_1 = 0,35$, $\rho_1 = 0,12$ кг/м³; $S_{p_2} = 5400$ м/с, $S_{S_2} = 3100$ м/с, $\nu_2 = 0,3$, $\rho_2 = 0,28$ кг/м³; частотное уравнение (8) решается методом Мюллера. Для проверки достоверности результатов решена тестовая задача [11].

Исследуем распространение плоских волн в слое, который находится в контакте с упругим полупространством. На контакте выполняются условия непрерывности напряжений и перемещений.

Частотное уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} -q_1 a_1 & q_1 a_1 & -2S_1 a_1 & 2S_1 a_1 \\ 2q_1^2 & 2q_1^2 & a_1 & a_1 \\ 2q_1^2 e^{q_1 h} & 2q_1^2 e^{-q_1 h} & a_1^2 e^{S_1 h} & a_1^2 e^{-S_1 h} \\ \left(\frac{q_1^2}{b_1} - \frac{a_1 q_1}{b_2}\right) e^{q_1 h + qh} & \left(\frac{q_1^2}{b_1} + \frac{a_1 q_1}{b_2}\right) e^{q_1 h + qh} & \left(\frac{a^2}{b_1} - \frac{2S_1 a^2}{b_2}\right) e^{q_1 h + qh} & \left(\frac{a^2}{b_1} + \frac{2S_1 a^2}{b_2}\right) e^{q_1 h + qh} \end{vmatrix},$$

$$q_1 = S_1 + \alpha^2, \quad b_1 = \frac{q^2(3^2 - \alpha)}{S^2 + \alpha^2}, \quad b_2 = \frac{Gq[(S^2 + \alpha^2)^2 - 4qS\alpha^2]}{G_1(S^2 + \alpha^2)},$$

$$q^2 = \alpha^2 \frac{\bar{\omega}^2}{c_1^2}, \quad S^2 = \alpha^2 \frac{\bar{\omega}^2}{c_2^2}, \quad q_1^2 = \alpha^2 \frac{\bar{\omega}^2}{c_{1i}^2}, \quad S_1^2 = \alpha^2 \frac{\bar{\omega}^2}{c_{2i}^2},$$

C_{q_1} , C_{q_2} , C_{s_1} , C_{s_2} — скорости распространения продольных и поперечных волн. На рис. 2 изображены первые две дисперсионные кривые фазовых скоростей C/C_{s_1} для значений параметров:

$$\frac{C_2^1}{C_1^1} = 0,55; \quad \frac{C_2^1}{C_1^1} = 6,5; \quad \frac{C_2^1}{C_2^1} = 13,5; \quad \frac{S_1}{S} = 1,3; \quad \nu_1 = 0,25; \quad \nu_2 = 0,35.$$

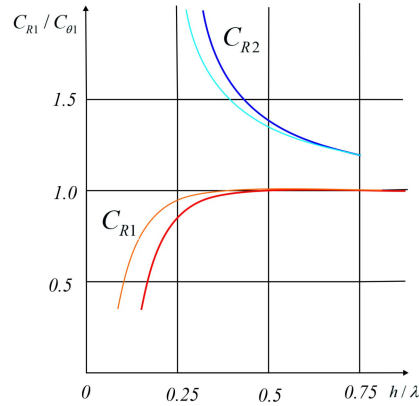


Рис. 2. Дисперсионные волны напряжения

Результаты расчетов сравнивали с результатами работы [11], они практически совпадают. На рис. 3 изображено сравнение теоретических и экспериментальных [11] результатов. При длинных волнах теоретические и экспериментальные результаты совпадают с разницей до 10%. Рассмотрим механическую систему, изображенную на рис. 1:

$$\begin{aligned} C_{p1} &= 4000 \text{ м/с}, \quad \nu_1 = 0,20, \quad C_{S1} = \text{м/с}, \quad \rho_1 = 0,201 \text{ кг/м}^3, \\ C_{p2} &= 5000 \text{ м/с}, \quad \nu_2 = 0,25, \quad C_{S2} = 0,25, \quad \rho_2 = 0,201 \text{ кг/м}^3 = 0,25, \\ C_{p3} &= 2300 \text{ м/с}, \quad \nu_3 = 0,3 \text{ м/с}, \quad C_{S3} = 1300 \text{ м/с}, \quad \rho_3 = 1,26 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

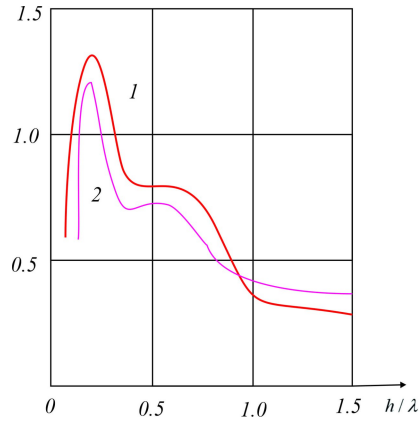


Рис. 3. Экспериментальная дисперсионная кривая продольных волн напряжения на участках покрытий, определенная методом механической импеданс; 1 — результаты экспериментальных работ, 2 — наши результаты

Исследовано изменение фазовых скоростей от длины волн. Результаты расчетов представлены на рис. 4. Здесь видно влияние соприкосновения деформируемого двухслойного тела с основанием.

Из рисунков видно, что фазовые скорости в зависимости от длины волны монотонно убывают и приближаются к асимптоте.

Элемент	Действительная часть	Мнимая часть
α_{11}	$\cosh t g_{\alpha} \cos m_{z\alpha}$	$\sinh q_{\alpha} \sin m_{q\alpha}$
α_{12}	$r_{z\alpha} \cos r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha}$	$m_{z\alpha} \cos r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha} + r_{z\alpha} \sin r_{z\alpha} \sin m_{z\alpha}$
α_{10}	1	-
α_{14}	r_{ip}	$m_{q\beta}$
α_{21}	$-r_{q\alpha} \sin r_{q\alpha} \cos m_{q\alpha} + m_{q\alpha} \cos r_{q\alpha} \sin m_{q\alpha}$	$-m_{q\alpha} \sin r_{q\alpha} \cos m_{q\alpha} - r_{q\alpha} \cos r_{q\alpha} \sin m_{q\alpha}$
α_{22}	$-f_r \sin r_{z\alpha} + \cos m_{z\alpha} + f_r \cos r_{z\alpha} \sin m_{z\alpha}$	$-f_r \sin r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha} - f_r \cos r_{z\alpha} \sin m_{z\alpha}$
α_{23}	$r_f \beta$	$m_{q\beta}$
α_{24}	f_i	f_i
α_{31}	$(-q_{\alpha} 1_r + \mu_{\alpha} f_r) \cos r_{q\alpha} \cos m_{q\alpha} -$ $(q_{\alpha} 1_r + \mu_{\alpha} f_r) \sin r_{q\alpha} \sin m_{q\alpha}$	$(-q_{\alpha} 1_r + \mu_{\alpha} f_r) \sin r_{q\alpha} \sin m_{q\alpha} +$ $(q_{\alpha} 1_r + \mu_{\alpha} f_r) \cos r_{q\alpha} \cos m_{q\alpha}$
α_{32}	$-(1 - \mu_{\alpha})(r_{z\alpha} f_r - m_{z\alpha} f_r) \cos r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha} -$ $-(m_{z\alpha} f_r - r_{z\alpha} f_r) \sin r_{z\alpha} \sin m_{z\alpha}$	$-(1 - \mu_{\alpha})[(\sqrt{s\alpha} f_r - m_{z\alpha} f_r) \sin \sqrt{\alpha} \alpha *$ $\sin m_{z\alpha} + (m_{z\alpha} f_r + r_{z\alpha} f_r) * \cos r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha}]$
α_{33}	$\rho_0 \varepsilon_1^2 (-S_{\beta r} + \mu_{\beta} f_r)$	$\rho_0 \varepsilon_1^2 (-q_{\beta r} + \mu_{\beta} f_r)$
α_{34}	$-\rho_0 \varepsilon_1^2 (1 - \mu_{\beta})(r_{z\beta} f_r - m_{z\beta} f_r)$	$-q_0 \varepsilon_1^2 (1 - \mu_{\beta})(m_{z\beta} f_r - m_{z\beta} f_r)$
α_{41}	$2r_{q\alpha} \sin r_{q\alpha} \cos m_{q\alpha} - 2m_{q\alpha} \cos r_{q\alpha} \sin m_{q\alpha}$	$2r_{q\alpha} \cos r_{q\alpha} \sin m_{q\alpha} +$ $2m_{q\alpha} \sin r_{q\alpha} \cos m_{q\alpha}$
α_{42}	$(S_q 1_r + f_r) \sinh r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha} -$ $-(S_q 1_r + f_r) \cos \sqrt{s\alpha} \sin s\alpha$	$(S_q 1_r + f_r) \cos r_{z\alpha} \sin m_{z\alpha} +$ $+(S_q 1_r + f_r) \sin r_{z\alpha} \cos m_{z\alpha}$
α_{43}	$-\rho_0 \varepsilon \beta^2 r_{q\beta}$	$-2\rho_0 \varepsilon \beta^2 m_{q\beta}$
α_{44}	$-\rho_0 \varepsilon \beta^2 (S_{\beta i} + f_r)$	$-\rho_0 \varepsilon \beta^2 (S_{\beta i} + f_i)$

Рис. 4. Элементы детерминанта (8) частотного уравнения при комплексном решении

2. Пусть $S > S_{S_2}$, тогда $\gamma_3 = \gamma_0 + i\alpha$, где $\gamma_0 = 2\pi/\lambda$; α — коэффициент демпфирования; $c = \omega/\gamma_0$. Элементы детерминанта (8) частотного уравнения приведены на рис. 4.

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta} &= \frac{C_{S,2}}{C_{\rho,1}}, \quad r_{S\beta} = \frac{S_{\beta,i}}{2m_{s,\beta}}, \quad m_{S,\beta} = \sqrt{-\frac{S_{\beta,r}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{S_{\beta,r}^2 + S_{\beta,i}^2}}, \\
r_{S3} &= \frac{S_{\beta,i}}{2m_{s,\beta}}, \quad \omega_{\alpha} = \frac{C_{S,1}}{C_{\rho,1}}, \quad r_{S\alpha} = \frac{S_{\alpha,i}}{2m_{s,\alpha}}, \quad \chi = \frac{C}{C_{\rho,1}}, \\
m_{S,\alpha} &= \sqrt{-\frac{S_{\alpha,r}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{S_{\alpha,r}^2 + S_{\alpha,i}^2}}, \quad S_{\alpha,i} = 2\pi \frac{l}{\lambda} G^*, \quad r_{q\alpha} = \frac{S_{\alpha,i}}{2m_{q,\alpha}}, \\
m_{q1} &= \sqrt{-\frac{q_{\alpha,r}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q_{\alpha,r}^2 + q_{\alpha,i}^2}}, \quad S_{\alpha,r} = \frac{\pi^2 l^2}{\lambda} (1 + \frac{\chi^2}{\omega^2}) - \chi_i, \\
m_{q,\beta} &= \sqrt{-\frac{q_{\beta,r}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q_{\beta,r}^2 + q_{\beta,i}^2}}, \quad q_{\beta,i} = 2\pi \frac{l}{\lambda} \chi_i, \quad S_{\beta,r} = \frac{\pi^2 r}{\lambda} (1 + \frac{\chi^2}{\omega_i^2}) \chi_i, \quad \chi_i = \frac{\alpha l}{2}.
\end{aligned}$$

Исследована зависимость фазовой скорости (c_R) от длины волны λ . На рис. 5 изображено изменение фазовой скорости и скорости демпфирования от длины волны при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned}
C_{p1} &= 2300 \text{ м/с}, \quad \nu_1 = 0,35; \\
C_{p2} &= 5000 \text{ м/с}, \quad \nu_2 = 0,25; \\
C_{S1} &= 1300 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 0,126 \text{ кг/м}^3; \\
C_{S2} &= 3000 \text{ м/с}, \quad \rho_2 = 0,203 \text{ кг/м}^3; \\
C_{p3} &= 9000 \text{ м/с}, \quad \rho_2 = 0,203 \text{ кг/м}^3; \\
C_{S3} &= 3000 \text{ м/с}, \quad \rho_3 = 0,12 \text{ кг/м}^3.
\end{aligned}$$

Первые моды. Фазовой скоростью для коротких волн является немонотонная функция длины волн. Для $L/\lambda > 0,5$ фазовые скорости монотонно убывают и приближаются к асимптоте.

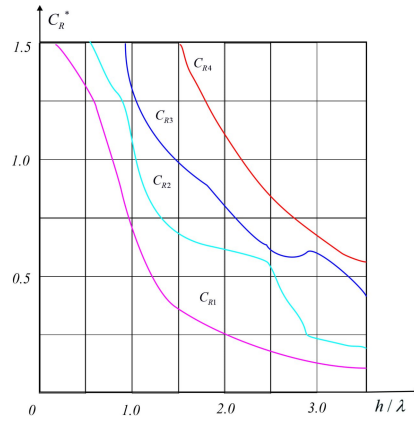


Рис. 5. Изменение фазовых скоростей (C_R^*) в зависимости от длины волн

Из численных результатов вытекает, что распространение волн напряжения в трехслойном теле осуществляется при высших частотах, как в свободном слое. Коренное влияние соприкосновения слоя с верхним и нижним телом покажется в области низких частот, когда соотношения $L/\lambda < 0,5$ и фазовые скорости приближаются к скорости поверхностных волн в полупространстве. Из рис. 5 видно, что при $L/\lambda = 0,5$ первые моды фазовой скорости в зависимости от L/λ изменялись монотонно возрастая. Во втором случае фазовые скорости различных мод сопровождалась сильными затуханиями. На основании полученных результатов можно предложить следующие рекомендации.

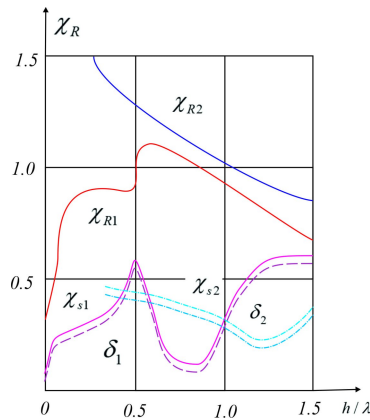


Рис. 6. Дисперсионные кривые фазовых скоростей и коэффициентов рассеяния для дюралевой полосы в контакте с акриловой средой

1. Полученные результаты приобретают значение при развитии динамических диагностических методов, основанных непосредственно на измерении фазовых скоростей волн,

напряжения, а именно, в диагностике конструкции подземных сооружений, дорог и при разработке технической теории динамики и оснований.

2. При проектировании и строительстве подземных сооружений, в первую очередь, необходимо обратить внимание на свойства грунта (многослойность, физико-механические параметры, водонасыщенность и другие факторы).

3. Если вблизи трубопровода выполняются буровзрывные работы, необходимо определить спектральные свойства системы "грунт-сооружение", в противном случае могут происходить резонансные явления в трубопроводе. Физической природе функциональной зависимости скорости от длины волны принято говорить, что указанная зависимость имеет дисперсионную природу. Иными словами, формы импульсов при их распространении не остаются неизменными, как в однородных упругих телах, потому что волны различной длины рассеиваются по мере распространения импульса по-разному.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вестяк А.В., Горшков А.В., Тарлаковский Д.В. *Нестационарное взаимодействие деформируемых тел с окружающей средой*, Итоги науки и техн. Сер. МДТТ **15**, 69–148 (ВИНИТИ, М., 1983).
- [2] Горшков А.Г. *Нестационарное взаимодействие пластин и оболочек со сплошными средами*, Изв. РАН. МТТ (4), 177–189 (1981).
- [3] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций* (Машиностроение, М., 1980).
- [4] Krylov V.V. *On the velocities of localised vibration modes in immersed solid wedges*, J. Acoustical Soc. Amer. **103** (2), 767–770 (1998).
- [5] Hladky-Hennion A.-C. *Finite element analysis of the propagation of acoustic waves in waveguides*, J. Sound and Vibration **194** (2), 119–136 (1996).
- [6] Krylov V.V., Shuvalov A.L. *Propagation of localised flexural vibrations along plate edges described by a power law*, Proc. Inst. Acoustics **22** (2), 263–270 (2000).
- [7] Shuvalov A.L., Krylov V.V. *Localised vibration modes in free anisotropic wedges*, J. Acoustical Soc. Amer. **107** (1), 657–660 (2000).
- [8] Krylov V.V., Parker D.F. *Harmonic generation and parametric mixing in wedge acoustic waves*, Wave Motion **15** (2), 185–200 (1992).
- [9] Krylov V.V., Mayer A.P., Parker D.F. *Nonlinear evolution of initially sine-like wedge acoustic waves*, Proc. IEEE 1993 Ultrasonics Symposium, Baltimore, USA, 765–768 (1993).
- [10] Mayer A.P., Krylov V.V., Lomonosov A.M. *Guided acoustic waves propagating at surfaces, interfaces and edges*, Proc. IEEE 2011 International Ultrasonics Symposium, Orlando, FL, USA, 2046–2052 (2011).
- [11] Hayashi T., Tamayama C., Murase M. *Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section*, Ultrasonics **44** (1), 17–24 (2006).

Жавлон Зафарович Нуриддинов

Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: j.zafarovich@mail.ru

Бахтиёр Зафарович Нуриддинов

Ташкентский химико-технологический институт,

ул. А. Навои, д. 32, г. Ташкент, 100011, Республика Узбекистан,

e-mail: nuriddinovbaxtiyor@gmail.com

Замира Шукирилловна Очилова

Бухарский государственный педагогический институт,

ул. Пиридагир, д. 2, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

e-mail: Zamira_ochilova93@mail.ru

*J.Z. Nuriddinov, B.J. Nuriddinov, and Z.Sh. Ochilova***Propagation of eigenwaves in plane three-layer media**

Abstract. The paper considers the problem of propagation of natural stress waves in a strip that is in contact with an unbounded isotropic viscoelastic medium made of another material. It is assumed that there are no external influences during the propagation of natural waves. In some cases, the physical properties of viscoelastic materials are described by linear hereditary Boltzmann–Voltaire relations with integral differences of heredity kernels. Some of the layers can be elastic. In this case, the heredity kernels describing the rheological properties of the layers are identically zero. A system in which the rheological properties of the layers are identical (the nuclei of heredity of elements are equal to each other) will be called dissipatively homogeneous. In the particular case, when there are no external influences, the propagation of damped waves of the system is considered; — in the presence of external influences — forced. The main problem is the study of the dissipative (damping) properties of the system as a whole, as well as its stress-strain state.

Keywords: band, hereditary relationships, energy dissipation, damping coefficient.

Javlon Zafarovich Nuriddinov

*Bukhara State University,
11 M. Iqbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: j.zafarovich@mail.ru

Baxtiyor Zafarovich Nuriddinov

*Tashkent Institute Chemical Technology,
32 A. Navoi str., Tashkent, 100011 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: nuriddinobaxtiyor@gmail.com

Zamira Shukirillo qizi Ochilova

*Bukhara State Pedagogical Institute,
2 Piridastgir str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: Zamira_ochilova93@mail.ru