Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, №10, с. 45–50 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Б.Д. МАМУРОВ

СХОДИМОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ НЕВОЛЬТЕРРОВСКОГО КВАДРАТИЧНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Аннотация. Рассматриваются невольтерровские квадратичные стохастические операторы, определенные на двумерном симплексе в зависимости от параметра α. Показано, что такой оператор имеет единственную неподвижную точку и все траектории сходятся к единственной неподвижной точке.

Ключевые слова: квадратичный стохастический оператор, вольтерровский и невольтерровский оператор, траектория, симплекс.

УДК: 517.98

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-45-50

Введение

Пусть

$$S^{m-1} = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0 \text{ для всех } i \text{ и } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\}$$

— $(m-1)$-мерный симплекс. Отображение V из S^{m-1} в себя называется *квадратичным стохастическим оператором* (КСО), если

$$(V\mathbf{x})_k = \sum_{i,j=1}^{m} p_{ij,k} x_i x_j$$

для любого $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ и для всех $k = 1, \ldots, m$, где

$$p_{ij,k} \geq 0, \quad p_{ij,k} = p_{ji,k} \text{ для всех } i, j, k; \quad \sum_{k=1}^{m} p_{ij,k} = 1.$$

Определение 1. Квадратичный стохастический оператор называется *вольтерровским*, если

$$p_{ij,k} = 0 \quad \text{для всех} \quad k \notin \{i, j\}, \quad i, j, k = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что $\{\mathbf{x}^{(n)} \in S^{m-1} : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — траектория начальной точки $\mathbf{x} \in S^{m-1}$, где $\mathbf{x}^{(n+1)} = V(\mathbf{x}^{(n)})$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, при этом $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$.

Определение 2. Точка $\mathbf{x} \in S^{m-1}$ называется *неподвижной* точкой отображения V, если $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Через $\operatorname{Fix}(V)$ будем обозначать множество всех неподвижных точек.

Поступила в редакцию 20.11.2023, после доработки 20.11.2023. Принята к печати 26.12.2024.

Определение 3. КСО V называется *регулярным*, если предел $\lim\limits_{n\to\infty} V(\mathbf{x}^{(n)})$ существует для любой начальной точки $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

Определение 4. КСО V называется *эргодическим*, если предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V^k(\mathbf{x})$$

существует для любой точки $\mathbf{x} \in S^{m-1}$.

Отметим, что регулярный КСО является эргодическим, но в общем случае из эргодичности не следует регулярность.

Пусть $\omega_V\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$ — множество предельных точек траектории $\{V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\}_{n\geq 0}$. Таким образом, неподвижные точки КСО описывают предельное или долгосрочное поведение траекторий для любой начальной точки. Предельное поведение траекторий и неподвижные точки играют важную роль во многих прикладных задачах (см. [1]–[12]). Биологическое значение регулярности КСО достаточно очевидно: в долгосрочной перспективе распределение видов в следующем поколении совпадает с распределением видов в предыдущем, т. е. будущее системы стабильно.

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Рассмотрим невольтерровский КСО, имеющий вид

$$V: \begin{cases} x_1' = \left(\dfrac{1}{3}+\alpha\right) x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + \dfrac{1}{3}x_3^2 + \dfrac{1}{3}x_1x_2; \\[2ex] x_2' = \left(\dfrac{1}{3}-\alpha\right) x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + \dfrac{1}{3}x_3^2; \\[2ex] x_3' = \dfrac{1}{3}x_1^2 + \dfrac{1}{3}x_2^2 + \dfrac{1}{3}x_3^2 + \dfrac{2}{3}x_1x_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha \in \left[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right]$.

Теорема. *Для КСО* (1) *справедливы следующие утверждения:*

i) *существует единственная неподвижная точка* $\mathbf{x}^* \in S^2$, *где* $x_1^* = 1 - x_2^* - x_3^*$,

$$x_2^* = \frac{3\alpha\sqrt{17} + \sqrt{216\alpha - 78 - 72\alpha\sqrt{17} + 34\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 3\alpha - 5}{4(3\alpha-2)}, \quad x_3^* = \frac{5-\sqrt{17}}{4};$$

ii) *не существует периодических точек, кроме неподвижной точки*;

iii) *для любой начальной точки* $\mathbf{x}^{(0)} \in \operatorname{int} S^2$ *имеем* $\lim\limits_{n\to\infty} V^n\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = \mathbf{x}^*$;

iv) *оператор* (1) *является регулярным.*

Доказательство. i) Напомним, что неподвижная точка КСО V является решением уравнения $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, и это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(\frac{1}{3}+\alpha\right)x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{1}{3}x_1x_2; \\ x_2 &= \left(\frac{1}{3}-\alpha\right)x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2; \\ x_3 &= \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Из третьего уравнения системы (2) получаем

$$x_3 = \frac{1}{3}\left(x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\right) + \frac{1}{3}x_3^2 \quad\Rightarrow\quad 3x_3 = (x_1+x_2)^2 + x_3^2 \quad\Rightarrow\quad 2x_3^2 - 5x_3 + 1 = 0,$$

где мы использовали равенство $x_1 + x_2 = 1 - x_3$. Тогда последнее уравнение имеет решения

$$x_3^* = \frac{5-\sqrt{17}}{4}, \qquad x_3^{**} = \frac{5+\sqrt{17}}{4}.$$

Несложно проверить, что $0 \le x_3^* \le 1$ и $x_3^{**} > 1$.

Из второго уравнения в (2) получаем

$$x_2 = \left(\frac{1}{3}-\alpha\right)(1-x_2-x_3)^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}x_3^2,$$

используя $x_3^* = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$, имеем

$$x_2 = \left(\frac{1}{3}-\alpha\right)\left(1-x_2-\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}x_2^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2 \quad\Rightarrow$$

$$\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)x_2^2 + \left(\frac{2}{3}-\alpha\right)\frac{1-\sqrt{17}}{2}x_2 + \left(\frac{1}{3}-\alpha\right)\frac{-2+\sqrt{17}}{2} + \left(\frac{2}{3}-\alpha\right)\left(\frac{5-\sqrt{17}}{4}\right)^2 = 0.$$

Легко проверить, что последнее уравнение имеет два решения и одно из них принадлежит $[0,1]$. Это решение имеет следующий вид:

$$x_2^* = \frac{3\alpha\sqrt{17} + \sqrt{216\alpha - 78 - 72\alpha\sqrt{17} + 34\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 3\alpha - 5}{4(3\alpha-2)}.$$

Таким образом, из равенства $x_1^* = 1 - x_2^* - x_3^*$ получаем

$$x_1^* = \frac{1}{4}\left(\sqrt{17}-1\right) - \frac{3\alpha\sqrt{17} + \sqrt{216\alpha - 78 - 72\alpha\sqrt{17} + 34\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 3\alpha - 5}{4(3\alpha-2)}.$$

ii) Из третьего уравнения в (1) получаем

$$x_3^{(n+1)} = \frac{2}{3}\left(x_3^{(n)}\right)^2 - \frac{2}{3}x_3^{(n)} + \frac{1}{3},$$

т. е. траектория $x_3^{(n)}$ задается динамической системой

$$g(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad x_3 = x \in [0,1].$$

Через $g^n = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n\,\text{раз}}$ обозначим n-кратную композицию $g(x)$ с самой собой. Тогда получаем

$$g^2(x) = g(g(x)) = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} =$$
$$= \frac{1}{27}(8x^4 - 16x^3 + 4x^2 + 4x + 5).$$

Мы утверждаем, что $g^2(x) = x$ не имеет решений $x \in [0,1]$, отличных от неподвижной точки. Действительно, поскольку решение $g(x) = x$ является решением $g^2(x) = x$, нам нужно рассмотреть следующее уравнение:

$$\frac{g^2(x) - x}{g(x) - x} = \frac{8x^4 - 16x^3 + 4x^2 - 23x + 5}{9(x^2 - 5x + 1)} = 4x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Поскольку $4x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 3x^2 + 4 > 0$, последнее уравнение решений не имеет. Таким образом, по теореме Шарковского (см., например, [13]) уравнение $g^n(x) = x$ не имеет решений при любых $n \geq 2$.

iii)

Определение 5. Пусть $f : A \to A$ и $g : B \to B$ — два отображения. f и g называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $h : A \to B$ такой, что $h \circ f = g \circ h$.

Отметим, что топологически сопряженные отображения полностью эквивалентны в своей динамике. В частности, h задает взаимно-однозначное соответствие между предельными точками f и g. Например, для логистического отображения известно следующее (см. [13]).

Рассмотрим функцию $g(x)$. Если взять $h(x) = bx + d$, то можно заметить, что $g(x)$ является топологически сопряженным к широко известному логистическому отображению $f(x) = \mu x(1-x)$, где

$$\mu = \frac{18 + \sqrt{612}}{18} \approx 2.37, \; b = \frac{-2}{3\mu} \approx -0.281, \quad d = \frac{1}{3\mu} + \frac{1}{2} \approx 0.681.$$

Поскольку $1 < \mu < 3$ и ввиду сопряженности все траектории $g(x)$ приближаются к неподвижной точке x_3^*, мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} g^n(x_3) = \frac{5 - \sqrt{17}}{4},$$

т. е. для любого малого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n_0 такое, что для любого $n > n_0$ выполняется

$$\left| x_3^{(n)} - \frac{5-\sqrt{17}}{4} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon + \frac{5-\sqrt{17}}{4} < x_3^{(n)} < \varepsilon + \frac{5-\sqrt{17}}{4}.$$

Из второго уравнения в (1) имеем

$$x_2^{(n+1)} = \left(\frac{1}{3} - \alpha\right)\left(1 - x_1^{(n)} - x_3^{(n)}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x_2^{(n)}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x_3^{(n)}\right)^2. \tag{3}$$

Используя последние неравенства и уравнение (3), получаем

$$\widetilde{g}\left(x_2^{(n)}\right) - \varepsilon\widehat{g}\left(x_2^{(n)}\right) < x_2^{(n+1)} < \widetilde{g}\left(x_2^{(n)}\right) + \varepsilon\widehat{g}\left(x_2^{(n)}\right),$$

$$\widetilde{g}\left(x_2^{(n)}\right)=\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)\left(x_2^{(n)}\right)^2+\frac{\sqrt{17}-1}{6}(3\alpha-1)x_2^{(n)}+\frac{1}{8}\alpha\sqrt{17}-\frac{9}{8}\alpha+\frac{5-\sqrt{17}}{4},$$

$$\widehat{g}(x_2^{(n)})=\left(\left(2x_2^{(n)}+\frac{\sqrt{17}-1}{2}-\varepsilon\right)\alpha+\frac{2}{3}\left(x_2^{(n)}+\varepsilon+1\right)\right).$$

Известно, что $-1/3\leq\alpha\leq 1/3$. Рассмотрим функцию

$$\widetilde{g}(x)=\left(\frac{2}{3}-\alpha\right)x^2+\frac{\sqrt{17}-1}{6}(3\alpha-1)x+\frac{1}{8}\alpha\sqrt{17}-\frac{9}{8}\alpha+\frac{5-\sqrt{17}}{4}.$$

Функция $\widetilde{g}(x)$ имеет две неподвижные точки. Одна из эти точек x_2^*, а другая не принадлежит $[0,1]$.

Если взять $h(x)=mx+n$, то можно увидеть, что функция $f(x)$ топологически сопряжена к логистическому отображению $f(x)=\mu x(1-x)$, где

$$m=-\frac{1}{4(9\sqrt{17}\alpha)+36\alpha^2-87\alpha+44}C,\quad n=\frac{6\alpha-4-(\sqrt{17}-1)(3\alpha-1)m}{12\alpha-8},\quad \mu=\frac{3\alpha-2}{3m},$$

$$C=\left(-3\sqrt{17}-27+\sqrt{2520\alpha-144\sqrt{14}\alpha^2-702+24\sqrt{17}\alpha-1296\alpha^2-14\sqrt{17}}\right)(3\alpha-2).$$

Легко проверить, что $1<\mu=\dfrac{3\alpha-2}{3m}<3$ при $-\dfrac{1}{3}<\alpha<\dfrac{1}{3}$. Отсюда и ввиду сопряженности получаем $\lim\limits_{n\to\infty}x_2^{(n)}=x_2^*$. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}x_1^{(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-x_2^{(n)}-x_3^{(n)}\right)=x_1^*$, и мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}V^n\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)=\mathbf{x}^*$ для любой $\mathbf{x}^{(0)}\in S^2$.

iv) Следует из iii).

□

Литература

[1] Blath J., Jamilov U.U., Scheutzow M. *(G,μ)-quadratic stochastic operators*, J. Diff. Equat. Appl. **20** (8), 1258–1267 (2014).

[2] Ганиходжаев Р.Н. *Квадратичные стохастические операторы, функции Ляпунова и турниры*, Матем. сб. **183** (8), 119–140 (1992).

[3] Ganikhodzhaev R., Mukhamedov F., Rozikov U. *Quadratic stochastic operators and processes: results and open problems*, Infin. Dimens. Anal. Quan. Probab. Relat. Top. **14** (2), 279–335 (2011).

[4] Jamilov U.U. *Quadratic stochastic operators corresponding to graphs*, Lobachevskii J. Math. **34** (2), 148–151 (2013).

[5] Jamilov U.U. *On a family of strictly non-volterra quadratic stochastic operators*, J. Phys.: Conf. Ser. **697** (1), 012013 (2016), DOI: 10.1088/1742-6596/697/1/012013.

[6] Jamilov U.U., Mamurov B.J. *Asymptotical behavior of trajectories of non-Volterra quadratic stochastic operators*, Lobachevskii J. Math. **43** (11), 3174–3182 (2022).

[7] Jamilov U.U., Khudoyberdiev Kh.O. *An (α,β)-quadratic stochastic operator acting in $S2$*, J. Appl. Nonlinear Dynamics **11** (4), 777–788 (2022).

[8] Lyubich Y.I. *Mathematical Structures in Population Genetics*, Biomathematics **22** (Springer-Verlag, Berlin, 1992).

[9] Мамуров Б.Дж. *Выпуклая комбинация двух квадратичных стохастических операторов, действующих на 2D-симплексе*, Изв. вузов. Матем. (7), 66–70 (2023).

[10] Rozikov U.A., Solaeva M.N. *Behavior of Trajectories of a Quadratic Operator*, Lobachevskii J. Math. **44** (7), 2910–2915 (2023).

[11] Rozikov U.A., Nazir S. *Separable Quadratic Stochastic Operators*, Lobachevskii J. Math. **31** (3), 215–221 (2010).

[12] Ulam S.M. *A collection of Mathematical Problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics **8** (Interscience Publ., New York–London, 1960).

[13] Devaney R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd edition, Studies in Nonlinearity (Addison-Wesley Publ. Comp., 1989).

Бобохон Джураевич Мамуров

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: bmamurov.51@mail.ru, b.j.mamurov@buxdu.uz

B.J. Mamurov

Convergence of the trajectories of a non-Volterra quadratic stochastic operator

Abstract. In the present paper we consider non-Volterra quadratic stochastic operators defined on the two-dimensional simplex depending on a parameter α. We show that such an operator has a unique fixed point and all the trajectories converge to this unique fixed point.

Keywords: quadratic stochastic operator, Volterra and non-Volterra operator, trajectory, simplex.

Bobokhon Jurayevich Mamurov

Bukhara State University,
11 M. Iqbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: bmamurov.51@mail.ru, b.j.mamurov@buxdu.uz