

Д.К. ДУРДИЕВ

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Изучены прямая и обратная задачи для модельного смешанного парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа. В прямой задаче исследована нелокальная задача для этого уравнения с внутреннекраевыми условиями в гиперболической части области. Неизвестным обратной задачи является переменный коэффициент при младшем члене в параболическом уравнении. Для его определения изучается обратная задача, если известно относительно решения, определяемого в параболической части области, интегральное условие переопределения. Доказана теорема однозначной разрешимости поставленных задач в смысле классического решения.

Ключевые слова: уравнения смешанного парабола-гиперболического типа, прямая задача, обратная задача, существование, единственность, интегральное уравнение, принцип сжатых отображений.

УДК: 517.968.72

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-34-44

ВВЕДЕНИЕ

Задача Трикоми для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа с характеристической линией изменения изучалась многими авторами (см. например, [1]–[4], а также библиографии в [3], [4]).

Краевые задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были исследованы в работах [5]–[7]. Также отметим работу [8], в которой исследована нелокальная задача для уравнения смешанного гипербола-параболического типа с краевыми условиями со смещением в гиперболической части области.

Спектральный метод решения прямых и обратных задач, связанных с нахождением решения начально-краевой задачи для смешанного парабола-гиперболического уравнений и неизвестной правой части этого уравнения в прямоугольной области был предложен в [9] (см. также работы [10]–[12]). Широкий класс прямых начально-краевых и обратных задач по определению, решение вырождающихся уравнений смешанного парабола-гиперболического типа и правая часть этих уравнений исследованы в работах [13]–[16].

Обратные задачи для уравнений смешанного типа являются мало изученными, чем аналогичные задачи для отдельных классических уравнений. Обратные задачи определения переменных коэффициентов и правых частей отдельных параболических уравнений второго порядка исследовались в работах [17]–[24] (см. также библиографию в монографиях [20],

[21]). В [22]–[24] рассматривались задачи восстановления сверточного ядра в параболических уравнениях, описывающих явления запаздывания, на основе условий переопределения, использованных в этой работе. Различными обратными задачами для уравнений гиперболического типа второго порядка читатель может ознакомиться в монографиях [25]–[28] (см. также обширную библиографию в них).

Настоящая статья продолжает исследования работы [29] автора, в которой изучена разрешимость обратной задачи определения переменного коэффициента при младшем члене гиперболического уравнения для смешанного параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа и локальными краевыми условиями.

1. Постановка задачи

Пусть Ω_{lT} — область на плоскости переменных x, y , определяемая соотношением $\Omega_{lT} = \Omega_{1lT} \cup \Omega_{2l} \cup \{0 < x < l, y = 0\}$, где $\Omega_{1lT} = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y \leq T\}$, $\Omega_{2l} = \{(x, y) : -y < x \leq y + l, -\frac{l}{2} < y < 0\}$, $l > 0, T > 0$ — фиксированные числа. В этой области рассмотрим следующее уравнение:

$$Lu(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1 - \operatorname{sign} y}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1 + \operatorname{sign} y}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1 + \operatorname{sign} y}{2} q(x)u(x, y) = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является смешанно-гиперболическим уравнением второго порядка. Для него линия изменения типа $y = 0$ является характеристикой.

Прямая задача. Найти в области Ω_{lT} решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(l, y) = \varphi_2(y), \quad y \in [0, T] \quad (2)$$

и условиям смещения

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{i=1}^{n-j} a_{n-j}^i u[\theta_{x_i}(x)] + \psi_{n-j}(x), \quad (3)$$

$$x_{n-1-j} \leq x \leq x_{n-j}, \quad j = n-1, \dots, 1, 0; \quad x_0 = 0, \quad x_n = l,$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \psi_k(x)$ — заданные функции; $\theta_{x_i}(\xi) = \left(\frac{x_i + \xi}{2}, \frac{x_i - \xi}{2}\right)$ — точка пересечения характеристики $x - y = \xi$ с характеристикой $x + y = x_i$; $\theta_0(\xi) = \theta_0$, $a_k^i = \operatorname{const}$ и $a_k^i = 0$ для $i = k$.

Краевые условия вида (3) впервые были предложены А.М. Нахушевым [30].

Определение. Классическим решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(x, y)$ из класса $C(\overline{\Omega}_{lT}) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_{1lT}) \cap C^2(\Omega_{2l})$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и обращающую уравнение (1) в тождество.

В обратной задаче предполагается неизвестным коэффициент $q(x)$ уравнения (1). В данной работе, мы изучим задачу определения этого коэффициента $q(x) \in C[0, T]$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) задано дополнительное условие

$$\int_0^T h(y)u(x, y)dy = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

где $h(y), f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Таким образом, обратную задачу можно трактовать как задачу определения пары функций $u(x, y)$ и $q(x)$ из класса $C(\bar{\Omega}_{lT}) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C_{x,y}^{1,2}(\Omega_{1lT}) \cap C^2(\Omega_{2l}) \times C[0, T]$, удовлетворяющую равенствам (1)–(4).

Относительно заданных функций будем предполагать выполненными следующие условия:

$$B1 : \varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[0, T], \quad \psi(x) \in C^1[0, l] \cap C^2(0, l);$$

$$B2 : \varphi_1(0) = \varphi_2(0), \quad m_k = 1 - \sum_{i=1}^k a_k^i \neq 0, \quad (m_k)^{-1} \lim_{x \rightarrow x_k-0} \frac{d^\lambda \psi_k(x)}{dx^\lambda} = (m_{k+1})^{-1} \lim_{x \rightarrow x_k+0} \frac{d^\lambda \psi_{k+1}(x)}{dx^\lambda},$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1; \quad \lambda = 1, 2;$$

$$B3 : h(y) \in C^1[0, T], \quad h(0) = h(T) = 0, \quad f(x) \in C^2[0, l], \quad \int_0^T h(y) \varphi_1(y) dy = f(0), \quad \int_0^T h(y) \varphi_2(y) dy = f(l), \quad f(x) \neq 0 \text{ для всех } x \in [0, l].$$

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

В прямой задаче функция $q(x)$ предполагается известной.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $B1, B2, q(x) \in C[0, l]$ и

$$l \|q\|_{C[0, l]} < 1. \quad (5)$$

Тогда существует в области Ω_{lT} единственное решение прямой задачи (1)–(3).

Пусть $u(x, 0) =: \tau(x)$, $\frac{\partial}{\partial y} u(x, 0) =: \nu(x)$. Тогда из условия (2) следует

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(l) = \varphi_2(0), \quad (6)$$

и в силу однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения колебания струны решение уравнения (1) в области Ω_{2T} записывается по формуле Даламбера

$$u(x, y) = \frac{1}{2} [\tau(x+y) + \tau(x-y)] - \frac{1}{2} \int_{x+y}^{x-y} \nu(s) ds. \quad (7)$$

Учитывая в условиях (3) формулу (7), имеем

$$\tau(x) + \tau(0) - \int_0^x \nu(s) ds = \sum_{i=1}^{n-j} a_{n-j}^i \left[\tau(x) + \tau(x_i) - \int_{x_i}^x \nu(s) ds \right] + 2\psi_{n-j}(x),$$

$$x_{n-1-j} \leq x \leq x_{n-j}, \quad j = n-1, \dots, 1, 0.$$

Дифференцируя эти равенства, находим

$$\tau'(x) - \nu(x) = [\tau'(x) - \nu(x)] \sum_{i=1}^{n-j} a_{n-j}^i + 2\psi'_{n-j}(x),$$

$$x_{n-1-j} \leq x \leq x_{n-j}, \quad j = n-1, \dots, 1, 0.$$

Используя условие $B2$, из этих уравнений получаем

$$\tau'(x) - \nu(x) = \Psi(x), \quad (8)$$

где

$$\Psi(x) = \frac{2\psi'_k(x)}{m_k}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

причем $\Psi(x) \in C[0, l] \cap C^1(0, l)$. Здесь отметим, что третьи условия $B2$ обеспечивают непрерывность вторых производных решения на характеристиках $x - y = x_i$, $k = 1, \dots, n$, что необходимо для классического решения.

Используя функцию Грина

$$G(x - \xi, y, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(x - \xi)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(y - \eta + 2n)^2}{4(x - \xi)}\right) - \exp\left(-\frac{(y + \eta + 2n)^2}{4(x - \xi)}\right) \right]$$

первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в области Ω_{1IT} , решение уравнения (1) с условиями (2) и $u|_{y=0} = \tau(x)$ представим в виде интегрального уравнения

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \int_0^l G(x, \xi, y) \tau(\xi) d\xi + \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta - \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y - \eta) q(\xi) u(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем нам необходимо дифференцировать уравнения (9) по y . Прежде мы будем проводить некоторые упрощения с первым интегралом в правой части (9) после дифференцирования. Функция Грина G удовлетворяет (в обобщенном смысле) уравнению $G_y(x, \xi, y) = G_{\xi\xi}(x, \xi, y)$ и соотношению $\lim_{\eta \rightarrow y} G(x, \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта функция Дирака.

Учитывая это и $\tau(0) = \tau(l)$ (вследствие условий $B2$), интегрируя по частям, находим

$$\int_0^l G_y(x, \xi, y) \tau(\xi) d\xi = \int_0^l G(x, \xi, y) \tau''(\xi) d\xi.$$

Используя эти соотношения, дифференцируем теперь (9) по y и положим $y = 0$. Так как $(\partial/\partial y)u(x, 0) = \nu(x)$, с учетом условий согласования $B2$ и основного свойства $\delta(\cdot)$ функции $\int_0^l g(x) \delta(x - x_0) dx = g(x_0)$, справедливого для любой непрерывной функции $g(x)$ на отрезке $[0, l]$, имеем

$$\nu(x) = \tau''(x) - q(x)\tau(x). \quad (10)$$

Уравнения (8) и (10) с некоторыми граничными условиями позволяют однозначно определить функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $[0, l]$.

Согласно (8) и (10) находим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения неизвестного $\tau(x)$

$$\tau''(x) - \tau'(x) - q(x)\tau(x) = -\Psi(x), \quad x \in (0, l), \quad (11)$$

которое может быть рассмотрено с граничными условиями (6). Задача (11), (6) эквивалентна интегральному уравнению

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \int_0^l K(x, t) q(t) \tau(t) dt, \quad (12)$$

где

$$\tau_0(x) = \frac{1}{1 - e^l} \left[(e^x - e^l) \varphi_1(0) + (1 - e^x) \varphi_2(0) \right] - \int_0^l K(x, t) \Psi(t) dt, \quad (13)$$

$$K(x, t) = \frac{1}{e^l - 1} \begin{cases} (e^x - 1)(1 - e^{l-t}), & 0 \leq x \leq t; \\ (e^x - e^l)(1 - e^{-t}), & t \leq x \leq l. \end{cases}$$

Задача (12), (6) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда однородное уравнение, соответствующее (12) с условиями $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ в (13), имеет только нуль решение ([31], с. 225–240). Это эквивалентно тому, что однородное интегральное уравнение, соответствующее (12), имеет только нулевое решение.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда уравнение (12) при $\tau_0(x) = 0$ имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$\Lambda(\tau(x)) = \int_0^l K(x, t)q(t)\tau(t)dt.$$

Тогда уравнение (12) с $\tau_0(x) = 0$ можно записать в виде операторного уравнения

$$\tau(x) = \Lambda(\tau(x)). \quad (14)$$

Очевидно, оператор Λ непрерывен в классе функций $C[0, l]$.

Покажем, что Λ — оператор сжатия в $C[0, l]$. Так как $\max_{0 \leq x, t \leq l} |K(x, t)| \leq 1$, то легко видеть, что неравенство

$$\|\Lambda(\tau_1) - \Lambda(\tau_2)\|_{C[0, l]} \leq l\|q\|_{C[0, l]}\|\tau_1 - \tau_2\|_{C[0, l]}$$

выполняется для любых функций $\{\tau_1(x), \tau_2(x)\} \in C[0, l]$. Отсюда с учетом (5) следует, что оператор Λ сжимающий в $C[0, l]$. Таким образом, оператор Λ имеет единственную неподвижную точку в пространстве $C[0, l]$. Так как $\tau(x) = 0$ является решением уравнения (14), то оно единственно. $\square$

При известной $\tau(x)$ функция $\nu(x)$ находится по формуле (10). Тогда неизвестная функция $u(x, y)$ вычисляется согласно (2).

Отсюда ясно, что при выполнении условий $B1, B2$ (касательно ψ) имеем $u(x, y) \in C^2(\Omega_{2l})$.

Заметим также, что уравнение (10) на основе условий, наложенных на φ_1, φ_2 в $B1$, определяет функцию $u(x, y) \in C_{x, y}^{1, 2}(\Omega_{1lT})$, т. е. решение задачи (1), (2) в области Ω_{1lT} .

Таким образом, построенные функции в Ω_{1lT} и Ω_{2l} в совокупности являются классическим решением прямой задачи (1)–(3) в области Ω_{lT} . Теорема 1 доказана. $\square$

Действительно, используя принцип максимума можно доказать единственность решения прямой задачи. При этом условие (5) можно ослабить, заменив его на $q(x) \geq 0$.

Лемма 2. Пусть функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega_{lT}}) \cap C^1(\Omega_{lT}) \cap C_{x, y}^{2, 1}(\Omega_{1lT} \cup \{0 < x < l, y = 0\}) \cap C^2(\Omega_{2l}), \quad (15)$$

$$Lu(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega_{1lT} \cup \Omega_{2l},$$

$$u[\theta_0(x)] = \sum_{i=1}^{n-j} a_{n-j}^i u[\theta_{x_i}(x)], \quad m_k = 1 - \sum_{i=1}^k a_k^i \neq 0,$$

$$x_{n-1-j} \leq x \leq x_{n-j}, \quad j = n-1, \dots, 1, 0; \quad x_0 = 0, \quad x_n = l.$$

Тогда если $q(x) \geq 0$, то $\max_{(x, y) \in \Omega_{lT}} u(x, y) > 0$ и $\min_{(x, y) \in \Omega_{lT}} u(x, y) < 0$ достигаются на $\{x = 0, 0 \leq y < T\} \cup \{x = l, 0 \leq y < T\}$.

Доказательство. Предположим, что функция $u(x, y)$ достигает наибольшего положительного значения по $\bar{\Omega}_{lT}$ в некоторой точке $(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}_{lT}$, т.е. $\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}_{lT}} u(x, y) = u(x_0, y_0) > 0$.

В области Ω_{lT} функция $u(x, y)$ является решением параболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} - q(x)u(x, y) = 0.$$

При выполнении условия $q(x) \geq 0$ согласно принципу максимума $(x_0, y_0) \notin \Omega_{lT}$, т.е. точка (x_0, y_0) принадлежит параболической границе области $\Omega_{lT} : (x_0, y_0) \in \{x = 0, 0 \leq y \leq T\} \cup \{x = l, 0 \leq y \leq T\} \cup \{0 < x < l, y = 0\}$. Пусть $(x_0, y_0) \in \{0 < x < l, y = 0\}$. Поскольку $u(x, 0) = \tau(x)$, значит, $\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}_{lT}} u(x, y) = \tau(x_0) > 0$. Так как $\tau(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$ и ес-

ли $m_k \neq 0$ и $\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, то ввиду $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \nu(x)$ из (8) имеем

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, 0 - 0) = \tau(x_0) > 0. \quad (16)$$

С другой стороны, из (10) находим

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x_0, 0 + 0) = \tau''(x_0) - q(x_0)\tau(x_0) \leq 0. \quad (17)$$

Неравенство (17) в силу (15) противоречит (16). Таким образом, $(x_0, y_0) \notin \{0 < x < l, y = 0\}$, и остается случай, когда $(x_0, y_0) \in \{x = 0, 0 \leq y \leq T\} \cup \{x = l, 0 \leq y \leq T\}$. $\square$

Из леммы 2 очевидным образом вытекает единственность решения прямой задачи.

Следствие. Пусть $q(x) \geq 0$. Тогда, если существует решение задачи в смысле определения, то оно единственно.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Предполагая выполнение условия B2, умножим уравнение (1) в Ω_{lT} на функцию $h(y)$ и интегрируем по отрезку $[0, T]$. Учитывая (4) и разрешая полученное соотношение относительно $q(x)$, находим

$$q(x) = \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \int_0^T h'(y)u(x, y)dy, \quad x \in [0, l]. \quad (18)$$

Равенства (9), (12) и (18) составляют замкнутую систему интегральных уравнений для определения $u(x, y)$, $\tau(x)$ и $q(x)$ в области $\bar{\Omega}_{lT}$. Запишем эти уравнения в операторно-векторном виде

$$v(x, y) = A[v](x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}_{lT}, \quad (19)$$

где

$$v(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x), v_3(x)]^* := \left[u(x, y) - \int_0^l G(x, \xi, y)\tau(\xi)d\xi, \quad \tau(x), \quad q(x) \right]^*,$$

* — знак транспонирования, а компоненты оператора $A = [A_1, A_2, A_3]^*$ в соответствии с правыми частями (9), (12) и (18) определяются равенствами:

$$A_1 v(x, y) = v_{01}(x, y) - \int_0^y \int_0^l G(x, \xi, y - \eta) v_3(\xi) \left[v_1(\xi, \eta) + \int_0^l G(\xi, s, \eta) v_2(s) ds \right] d\xi d\eta, \quad (20)$$

$$A_2 v(x) = v_{02}(x) + \int_0^l K(x, \xi) v_3(\xi) v_2(\xi) d\xi, \quad (21)$$

$$A_3(x) = v_{03} + \frac{1}{f(x)} \int_0^T h'(\eta) v_1(x, \eta) d\eta, \quad (22)$$

где в (20)–(22) через v_{01} , v_{02} и v_{03} обозначены свободные члены интегральных уравнений

$$v_{01}(x, y) := \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta - \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta,$$

$$v_{02}(x) := \tau_0(x), \quad v_{03} := \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Основным результатом настоящего раздела является

Теорема 2. Пусть выполнены условия B1–B3. Тогда существуют числа $l^* \in (0, l)$, $T^* \in (0, T)$ такие, что в области $\Omega_{l^*T^*}$ уравнение (19) имеет единственное решение $u(x, y) \in C(\Omega_{l^*T^*})$, $q(x) \in C[0, l^*]$.

Доказательство. Используем метод сжимающих отображений. Обратимся к уравнению (19). Очевидно, что оператор A переводит функции $v(x, y) \in C(\overline{\Omega}_{lT})$ в функции, также принадлежащие пространству $C(\overline{\Omega}_{lT})$. Норму v в $C(\overline{\Omega}_{lT})$ определим следующим образом:

$$\|v\|_{lT} = \max \left\{ \max_{(x,y) \in \overline{\Omega}_{lT}} |v_1(x, y)|, \max_{x \in [0, l]} |v_2(x)|, \max_{x \in [0, l]} |v_3(x)| \right\}.$$

В дальнейшем используем обозначения

$$f_0 := \min_{x \in [0, l]} |f(x)|, \quad f_1 := \max_{x \in [0, l]} |f''(x)|, \quad h_0 := \max_{x \in [0, T]} |h'(y)|,$$

$$m_0 := \min_{1 \leq k \leq n} m_k, \quad M := \max_{0 \leq k \leq n-1} \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |\psi'(x)|.$$

Рассмотрим некоторый шар

$$S(v_0, \|v_0\|_{lT}) := \{v : \|v - v_0\|_{lT} \leq \|v_0\|_{lT}\} \subset C(\overline{\Omega}_{lT})$$

радиуса $\|v_0\|_{lT}$ с центром в точке $v_0(x, y) = (v_{01}(x, y), v_{02}(x), v_{03}(x))$ и покажем, что для достаточно малых l и T оператор A осуществляет сжатое отображение в себя.

Очевидно, что для элементов $v \in S(v_0, \|v_0\|_{lT})$ имеет место оценка

$$\|v\|_{lT} \leq 2 \|v_0\|_{lT} =: R,$$

где

$$\|v_0\|_{lT} = \max \left\{ \max_{(x,y) \in \overline{\Omega}_{lT}} |v_{01}(x, y)|, \max_{x \in [0, l]} |v_{02}(x)|, \max_{x \in [0, l]} |v_{03}(x)| \right\}.$$

Оценим $\|v_0\|_{lT}$. Для этого нам необходимы оценки интегралов, содержащих функции G , G_ξ , в определении $v_{01}(x, y)$. При этом используем равенство

$$\int_0^l G(x, \xi, y) d\xi = 1,$$

вытекающее из определения функции G . Далее заметим, что G имеет эквивалентное выражение ([31], с. 200–204):

$$G(x, \xi, y) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 y \right] \sin \frac{n\pi x}{2} \sin \frac{n\pi \xi}{2}.$$

С учетом этого имеем равенства

$$G_\xi(x, 0, y - \eta) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 (y - \eta) \right] \frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} = \frac{1}{l} \int_0^l G_\eta(x, \xi, y - \eta) (l - \xi) d\xi,$$

которые проверяются непосредственно. Воспользовавшись этими соотношениями, преобразуем следующий интеграл:

$$\begin{aligned} \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta &= \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \int_0^y G_\eta(x, \xi, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta d\xi = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \left\{ \left[G(x, \xi, y - \eta) \varphi_1(\eta) \right]_0^y - \int_0^y G(x, \xi, y - \eta) \varphi_1'(\eta) d\eta \right\} d\xi = \\ &= \frac{l - x}{l} \varphi_1(y) + \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) \int_0^y G(x, \xi, y - \eta) \varphi_1'(\eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Из этих соотношений для $(x, y) \in \overline{\Omega}_{1lT}$ легко вытекает оценка

$$\left| \int_0^y G_\xi(x, 0, y - \eta) \varphi_1(\eta) d\eta (1 + l) \right| \leq \|\varphi_1\|_{C^1[0, T]}. \quad (23)$$

Подобным образом для $(x, y) \in C(\overline{\Omega}_{1lT})$ может быть получена также оценка

$$\left| \int_0^y G_\xi(x, l, y - \eta) \varphi_2(\eta) d\eta \right| \leq (1 + l) \|\varphi_2\|_{C^1[0, T]}. \quad (24)$$

Тогда из соотношения (14) и неравенств (23), (24) следует

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{lT} &\leq \max \left\{ 2(1 + l) \max \left(\|\varphi_1\|_{C^1[0, T]}, \|\varphi_2\|_{C^1[0, T]} \right), \right. \\ &\quad \left. 2 \max \left(\|\varphi_1\|_{C^1[0, T]}, \|\varphi_2\|_{C^1[0, T]} \right) + \frac{2lM}{m_0}, \frac{f_1}{f_0} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Переходим к получению условий, при которых возможно применение теоремы о неподвижной точке к оператору A . Пусть $v \in S(v_0, r)$. Значит, для всех $(x, y) \in \bar{\Omega}_{lT}$, учитывая оценку (25), из (20)–(22) получим

$$\begin{aligned} \|Av - v_0\|_{lT} &= \max \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}_{lT}} |A_1 v^1 - v_{01}|, \max_{x \in [0,l]} |A_2 v^1 - v_{02}|, \max_{x \in [0,l]} |A_3 v^1 - v_{03}| \right\} \leq \\ &\leq 2 \max \left\{ 2T, Rl, \frac{h_0}{f_0} T \right\} \|v_0\|_{lT}. \end{aligned}$$

Пусть T^* и l^* выбраны из условия $2 \max \left\{ 2T, Rl, \frac{h_0}{f_0} T \right\}$. Тогда из предыдущей оценки следует, что для $T \leq T^*$ и $l \leq l^*$ имеет место оценка $\|v - v_0\|_{lT} \leq \|v_0\|_{lT}$, т. е. $Av \in S(v_0, \|v_0\|_{lT})$.

Нам остается показать, что оператор A сжимает расстояние между элементами шара $S(v_0, \|v_0\|_{lT})$. Для доказательства этого возьмем любые два элемента $v^1, v^2 \in S(v_0, \|v_0\|_{lT})$ и оценим норму разности между их образами Av^1, Av^2 . Обозначим компоненты элементов v^1, v^2 через $v_i^1, v_i^2, i = 1, 2, 3$. При оценке $\|Av^1 - Av^2\|_{lT}$ воспользуемся неравенством

$$|v_i^1 v_j^1 - v_i^2 v_j^2| = |v_i^1 - v_i^2| |v_j^1| + |v_j^1 - v_j^2| |v_i^2| \leq 2R \|v^1 - v^2\|_{lT}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

которое имеет место для произвольных $v^1, v^2 \in S(v_0, \|v_0\|_{lT})$. Используя формулы (20)–(22) и оценку (25), находим

$$\begin{aligned} \max \left\{ \max_{(x,y) \in \bar{\Omega}_{lT}} |A_1 v^1 - A_1 v^2|, \max_{x \in [0,l]} |A_2 v^1 - A_2 v^2|, \max_{x \in [0,l]} |A_3 v^1 - A_3 v^2| \right\} \leq \\ \leq \max \left\{ 2T, Rl, \frac{h_0}{f_0} T \right\} \|v^1 - v^2\|_{lT}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\|Av^1 - Av^2\|_{lT} \leq \frac{T}{T^*} \|v^1 - v^2\|_{lT},$$

и оператор A при $T \in (0, T^*)$ и $l \in (0, l^*)$ осуществляет сжатое отображение шара $S(v_0, r)$ на себя. Тогда согласно принципу сжимающих отображений уравнение (19) имеет в области $\bar{\Omega}_{lT}$ единственное непрерывное решение, удовлетворяющее неравенству $\|v - v_0\|_{lT} \leq \|v_0\|_{lT}$.

По известным функциям $v(x, y) = [v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x)]$ функции $u(x, y), q(x)$ находятся по формулам

$$u(x, y) = v_1(x, y) + \int_0^l G(x, \xi, y) v_2(\xi) d\xi, \quad q(x) = v_3(x).$$

□

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа, ЖВМ и МФ **6** (6), 991–1001 (1966).
- [2] Бжихатлов Х.Г., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа, ДАН СССР **183** (2), 261–264 (1968).
- [3] Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов (Изд-во Фан, Ташкент, 1979).
- [4] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа (Изд-во Фан, Ташкент, 1986).
- [5] Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области, Дифференц. уравнения **17** (1), 129–136 (1981).

- [6] Ефимова С.В., Репин О.А. *Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса*, Дифференц. уравнения **40** (10), 1419–1422 (2004).
- [7] Репин О.А. *О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения*, Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-матем. науки **43**, 10–14 (2006).
- [8] Хубиев К.У. *Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного гипербола-параболического типа*, Матем. заметки СВФУ **24** (3), 12–18 (2017).
- [9] Сабитов К.Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* (Наука, М., 2016).
- [10] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области*, Изв. вузов. Матем. (4), 55–62 (2010).
- [11] Сабитов К.Б., Сафин Э.М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа*, Матем. заметки **87** (6), 907–918 (2010).
- [12] Сабитов К.Б. *Начально-граничная и обратные задачи для неоднородного уравнения смешанного параболо-гиперболического уравнения*, Матем. заметки **102** (3), 415–435 (2017).
- [13] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием*, Изв. вузов. Матем. (1), 46–59 (2015).
- [14] Сидоров С.Н. *Обратные задачи для вырождающегося смешанного параболо-гиперболического уравнения по нахождению сомножителей правых частей, зависящих от времени*, Уфимск. матем. журн. **11** (1), 75–89 (2019).
- [15] Sabitov K.B., Sidorov S.N. *On a nonlocal problem for a degenerating parabolic-hyperbolic equation*, Diff. Equat. **50** (3), 352–361 (2014).
- [16] Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. *Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа*, Итоги науки и техн. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз. **137**, 26–60 (2017).
- [17] Прилепко А.И., Костин А.В., Соловьев В.В. *Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева*, Сиб. журн. чист. и прикл. матем. **17** (3), 67–85 (2017).
- [18] Иванчов Н.И. *Об обратной задаче одновременного определения коэффициентов теплопроводности и теплоемкости*, Сиб. матем. журн. **35** (3), 612–621 (1994).
- [19] Durdiev D.K., Durdiev D.D. *The Fourier spectral method for determining a heat capacity coefficient in a parabolic equation*, Turkish J. Math. **46** (8), 3223–3233 (2022).
- [20] Денисов А.М. *Введение в теорию обратных задач* (Изд-во Моск. ун-та, М., 1994).
- [21] Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics* (Textbooks Pure Appl. Math., 231, Marcel Dekker, New York, 1999).
- [22] Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z. *Memory kernel reconstruction problems in the integrodifferential equation of rigid heat conductor*, Math. Methods Appl. Sci. **45** (14), 8374–8388 (2022).
- [23] Durdiev D.K., Zhumaev Z.Z. *One-dimensional inverse problems of finding the kernel of integrodifferential heat equation in a bounded domain*, Ukrain. Math. J. **73** (11), 1723–1740 (2022).
- [24] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Задача определения тепловой памяти проводящей среды*, Дифференц. уравнения **56** (6), 796–807 (2020).
- [25] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики* (Наука, М., 1984).
- [26] Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи* (Сиб. научн. изд-во, Новосибирск, 2009).
- [27] Hasanogğlu A., Hasanov, Romanov V.G. *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations* (Springer Int. Publ., 2017).
- [28] Durdiev D.K., Totieva Z.D. *Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations* (Springer Nature Singapore Pte Ltd, Ser. Sci. Foundation Ser. Math. Sci., 2023).
- [29] Дурдиев Д.К. *Об определении коэффициента уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нехарактеристической линией изменения*, Дифференц. уравнения **58** (12), 1633–1644 (2022).
- [30] Нахушев А.М. *О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравнения **5** (1), 44–59 (1969).
- [31] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1977).

Дурдимурод Каландарович Дурдиев

Бухарское отделение Института Математики АН республики Узбекистан, Бухарский государственный университет,

ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: d.durdiev@mathinst.uz

D.K. Durdiev

Coefficient inverse problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type with nonlocal conditions

Abstract. The direct and inverse problems for a model mixed parabolic-hyperbolic equation with a characteristic line of type change have been studied. In the direct problem, a nonlocal problem for this equation with interior boundary conditions in the hyperbolic part of the domain has been investigated. The unknown of the inverse problem is the variable coefficient of the lower-order term in the parabolic equation. To determine it, the inverse problem is studied under the assumption that an integral overdetermination condition is known for the solution defined in the parabolic part of the domain. A theorem of unique solvability for the posed problems in the sense of a classical solution has been proven.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, direct problem, inverse problem, existence, uniqueness, integral equation, contraction mapping principle.

Durdimurod Kalandarovich Durdiev

Bukhara branch of the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Bukhara State University,

11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: d.durdiev@mathinst.uz