

М. РЕХМАН, Т. РАСУЛОВ, Б. АМИНОВ

НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ И ИХ СТРУКТУРИРОВАННЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Аннотация. В статье представлены новые результаты, касающиеся вычисления структурированных сингулярных значений неотрицательных матриц, подверженных чисто мнимым возмущениям. Доказана эквивалентность структурированных сингулярных значений и спектрального радиуса возмущенной матрицы $(M\Delta)$. Предложены и проанализированы новые результаты об эквивалентности структурированных сингулярных значений, неотрицательного спектрального радиуса и неотрицательного детерминанта матрицы $(M\Delta)$. В частности, показано, что при единичном спектральном радиусе матрицы $(M\Delta)$ структурированные сингулярные значения и спектральный радиус в точности равны. Наконец, предложена точная эквивалентность между структурированным сингулярным значением и наибольшим сингулярным значением матрицы $(M\Delta)$.

Ключевые слова: μ -значение, сингулярное значение, собственное значение, структурированная матрица.

УДК: 517.984

DOI: 10.26907/0021-3446-2023-10-36-45

ВВЕДЕНИЕ

Структурированное сингулярное значение является известным инструментом в теории систем. Концепция структурированного сингулярного значения была предложена Дж. Дойлом [1] для анализа надежности и производительности и синтеза систем с линейной обратной связью, подверженных структурным неопределенностям или структурным возмущениям. Вдобавок к этому, вычисление структурированных сингулярных значений дополняет H^∞ -подход к проектированию систем управления.

Точное вычисление структурированного сингулярного значения очень трудоемко и, в действительности, является NP-задачей [2]. Природа NP-сложности структурированного сингулярного значения позволяет вычислить нижнюю и верхнюю оценки. Верхние границы определяют консервативные оценки размера возмущений и описывают устойчивость системы с линейной обратной связью. С другой стороны, вычисление нижних границ структурированных сингулярных значений дает возмущение задачи и описывает неустойчивость системы управления.

Задача вычисления структурированных сингулярных значений может быть переформулирована как задача гладкой оптимизации [3]. Однако предложенный метод позволяет найти только нижние оценки, так как функция, которую надо максимизировать, обладает, скорее, локальными максимумами, чем глобальным. В работе [4] схожий подход разработан для аппроксимации нижних оценок структурированных сингулярных значений.

Поступила в редакцию 29.03.2023, после доработки 29.03.2023. Принята к публикации 29.05.2023.

Практический алгоритм точной аппроксимации верхних оценок структурированных сингулярных значений разработан П.М. Янгом и др. в [5] и доступен среди μ -инструментов во вкладке Toolbox в среде MATLAB. Этот алгоритм, разработанный в [5], является высокоэффективным и к тому же точно подсчитывает границы структурированных сингулярных значений. Более того, он справляется с задачами, имеющими около 100 возмущений.

В работе [6] решен частный случай задачи о структурированном сингулярном значении. Было показано, что задача вычисления структурированного сингулярного значения эквивалентна смешанной задаче о μ -значении ранга 1. Также было показано, что смешанная задача о μ -значении эквивалентна аппроксимации верхних границ.

Некоторые новые результаты относительно вычисления и более хорошей аппроксимации верхних границ представлены в [7] вместе с методом вычисления двойственной характеристики структурированных сингулярных значений и скошенных структурированных сингулярных значений. Полученные результаты также полезны для вычисления нижних границ. Новый итерационный метод, основанный на обыкновенных дифференциальных уравнениях малого ранга, представлен в [8]. Этот итерационный метод аппроксимирует структурированное сингулярное значение снизу и дает гораздо лучший результат в сравнении с функцией `mussv` среды MATLAB. Более того, задача о μ -значении сводится к эквивалентной ей задаче оптимизации (максимизация и минимизация собственных значений и сингулярных значений).

Вводный курс по вычислению чисто мнимых структурированных сингулярных значений представлен в [9]. Предложенный метод полезен для анализа производительности и надежности систем замкнутого цикла в теории систем. Дробно-линейные преобразования используются для описания рассматриваемых систем с целью объединения метода пространства состояний и метода частотных областей.

Вычисление структурированного сингулярного значения вещественнозначной матрицы относительно чисто мнимых блочно диагональных матриц рассмотрено в [10], где показано, что вычисление μ -значения эквивалентно его выпуклой верхней границе.

В работе [11] для аппроксимации нижних границ структурированных сингулярных значений представлен итерационный метод, основанный на обыкновенных дифференциальных уравнениях малого ранга. В нем используется двухуровневый алгоритм. Во внутренней части алгоритма подсчитываются подходящие локальные экстремумы множества структурированных спектральных значений, в то время как уровень возмущения подгоняется во внешней его части. В настоящей статье предложены и проанализированы новые результаты, касающиеся вычисления структурированных сингулярных значений. Мы применяем инструментарий линейной алгебры и матричного анализа для того, чтобы показать, что задача о μ -значении эквивалентна вычислению неотрицательного спектрального радиуса матрицы $(M\Delta)$ при некотором подходящем возмущении Δ . Кроме того, решены следующие задачи.

Задача 1. Нахождение форм эквивалентности μ -значений для данной $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ и неотрицательного спектрального радиуса $(M\Delta)$, а также детерминанта главной подматрицы, полученной удалением строк и столбцов из $(M\Delta)$.

Задача 2. μ -значение эквивалентно единичному спектральному радиусу $(M\Delta)$, когда Δ является чисто мнимой неопределенностью.

Задача 3. Нахождение μ -значение для данной $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ равно вычислению μ -значения (D^*MD) , если такая неотрицательная диагональная матрица D существует.

Задача 4. Для множества чисто мнимых неопределенностей нахождение μ -значения в точности совпадает с вычислением наибольшего сингулярного значения, т. е. $\sigma(M\Delta)$.

Задача 5. Точное вычисление μ -значения для данной $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ при чисто мнимых неопределенностях эквивалентно вычислению единичного наибольшего сингулярного значения (M^*M) , т. е. $\sigma(M^*M) = 1$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Множества всех комплексных чисел, комплексных векторов длины n и комплексных матриц размера $n \times n$ обозначаются через $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n \times n}$ соответственно. Для вектора $v \in \mathbb{C}^{n,1}$ обозначим через v^* комплексно сопряженный и транспонированный вектор. Норма v вводится через равенство $\|v\|_2 = \sqrt{v^*v}$. Для матрицы $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ обозначим через M^* комплексно сопряженную и транспонированную матрицу. Матрица, полностью состоящая из 1, обозначается через N . Через $\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ обозначим множество блочно-диагональных матриц $A_i \forall i = 1 : n$, расположенных на главной диагонали. Символ $\det(A)$ обозначает детерминант A ; символ $\rho(A)$ — спектральный радиус A . Через $\sigma_{\max}(A)$ обозначим наибольшее сингулярное значение A ; через $\mu_{\Delta}(A)$ — структурированное сингулярное значение матрицы A относительно блочно-диагональной матрицы Δ . Для данной матрицы $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ и множества чисто мнимых возмущений $\mathbb{B}_2^*$, где $\mathbb{B}_2^* = \{\text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_F); \Delta_i \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i} \forall i = 1 : F\}$, μ -значение или структурированное сингулярное значение, обозначаемое через $\mu_{\mathbb{B}_2^*}(M)$, задается следующим образом:

$$\mu_{\mathbb{B}_2^*}(M) := \begin{cases} 0, & \text{если } \rho(M\Delta) \neq 1, \Delta \in \mathbb{B}_2^*; \\ \frac{1}{\min \{\|\Delta\|_2 : \Delta \in \mathbb{B}_2^*, \rho(M\Delta) = 1\}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Структурированное сингулярное значение для данной матрицы $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ относительно множества блочно-диагональных матриц $\mathbb{B}_1^*$, где $\mathbb{B}_1^* := \{\text{diag}(\delta_1 I_1, \delta_2 I_2, \dots, \delta_s I_s) : S_i \in \mathbb{C}^{m_i \times 1} \forall i = 1 : s\}$, задается следующим образом: $\mu_{\mathbb{B}_1^*}(M) = 0$, если $\rho(M\Delta) \neq 1$ для $\Delta \in \mathbb{B}_1^*$. В противном случае $\mu_{\mathbb{B}_1^*}(M) = (\min \{\|\Delta\|_2 : \Delta \in \mathbb{B}_1^*, \rho(M\Delta) = 1\})^{-1}$.

Спектральный радиус для данной матрицы $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ определяется как $\rho(M) := \max_i |\lambda_i|$, где $\lambda_i \forall i$ являются собственными значениями M .

2. НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ, $\rho(A)$ и $\sigma_{\max}(A)$

В этом разделе приводятся некоторые основные результаты, касающиеся вычисления спектрального радиуса неотрицательных матриц. Следующая лемма 1 показывает, что спектральный радиус для данной неотрицательной матрицы N ограничен снизу минимумом $\frac{(Nx)_i}{x_i} \forall i$, где x — собственный вектор N .

Лемма 1 ([12]). Пусть N — n -мерная неотрицательная матрица, тогда $\min \frac{(Nx)_i}{x_i} \leq \rho(N)$.

Если неотрицательная матрица N неприводима, то спектральный радиус в точности равен минимуму $\frac{(Nx)_i}{x_i} \forall i$.

Лемма 2. Для данной неотрицательной матрицы N имеем $\min \frac{(Nx)_i}{x_i} = \rho(N)$, если N неприводима и x — собственный вектор N .

Теорема 1 описывает связь между спектральным радиусом и неотрицательной матрицей, у которой суммы элементов по строкам положительны.

Теорема 1 ([13]). Пусть $N = (n_{ij})$ является неотрицательной матрицей размера $n \times n$, у которой суммы строк $p_1, p_2, \dots, p_n$ положительны, тогда

$$\rho(N) \geq \min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n n_{ij} p_j \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. Пусть A — неотрицательная неприводимая матрица, тогда

$$\rho(N) = \min_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n n_{ij} p_j \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В работе [14] И. Шур привел оценку наибольшего сингулярного значения $\sigma_{\max}(A)$ для данной матрицы $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Его результат следующий: $\sigma_{\max}(A) \leq \sqrt{\max_i r_i c_j}$, где $r_i = \sum_{k \in [n]} |a_{ik}|$ и $c_j = \sum_{k \in [m]} |a_{kj}|$. Нижняя граница для $\sigma_{\max}(A)$ получена в [15] при условии, что $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ не является нулевой. Нижняя граница для $\sigma_{\max}(A)$ задается выражением

$$\sigma_{\max}(A) \leq \sqrt{\max_{i \in [m]} \sum_{j \in [n]} |a_{ij}| c_j} \leq \sqrt{\max_{a_{ij} \neq 0} r_i c_j}.$$

Более общая форма для $\sigma_{\max}(A)$ получена в теореме 3.

Теорема 3. Пусть $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ — ненулевая матрица и $s \geq 0$, $t \geq 1$, тогда

$$\sigma_{\max}^{2t}(A) \leq \max_{k \in [m], w_{|A|}^s(k) \neq 0} \left(\frac{w_{|A|}^{s+t}(k)}{w_{|A|}^s(k)} \right),$$

где $|A| = (|a_{ij}|)$.

3. НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О СТРУКТУРИРОВАННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

В этом разделе статьи мы предлагаем и анализируем новые результаты о структурированных сингулярных значениях для заданной квадратной неотрицательной комплекснозначной матрицы. В основном мы отвечаем на вопросы, упомянутые во введении к данной статье. При этом нами используются такие инструменты линейной алгебры как спектральный радиус, сингулярное разложение и детерминант квадратной комплекснозначной матрицы, для того, чтобы получить отношение эквивалентности для структурированных сингулярных значений. Следующая лемма 3 описывает вычисление структурированного сингулярного значения для данной неотрицательной матрицы относительно множества чисто мнимых возмущений через эквивалентное вычисление спектрального радиуса возмущенной матрицы $M\Delta$, где Δ — допустимое возмущение.

Лемма 3. Для $M \in \mathbb{C}^{n,n}$, $\Delta \in \mathbb{B}_2^*$ имеем

$$\mu_{\mathbb{B}_2^*}(M) = \max_{\Delta \in \mathbb{B}_2^*} \rho(M\Delta).$$

За доказательством мы отсылаем заинтересованного читателя к работе [1]. $\square$

Далее покажем, что для данной квадратной положительно полуопределенной матрицы M точное вычисление структурированных сингулярных значений эквивалентно точному вычислению наибольших по модулю собственных значений возмущенной матрицы $M\Delta$, где Δ принадлежит $\mathbb{B}_2^*$.

Теорема 4. Для данной неотрицательной положительно полуопределенной матрицы M имеем

$$\mu_{\mathbb{B}_2^*}(M) = \rho(M\Delta), \quad \Delta \in \mathbb{B}_2^*.$$

Доказательство. Пусть $N = \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$ — матрица, вся состоящая из 1, и $M_s :=$

$M + \frac{1}{s}N > 0$ — последовательность положительно полуопределенных матриц. Пусть $\gamma_s > 0$, $\hat{\gamma}_s > 0$ — собственные значения и векторы M_s соответственно. Последовательность $\{\gamma_s\}_{s=1}^\infty$ представляет собой ограниченное множество вещественных чисел, поскольку является единичной 1-сферой. Поэтому $\{\gamma_s\}_{s=1}^\infty \rightarrow v$, где $v \geq 0$. Более того, $v \neq 0$. Поэтому $\gamma_{s_i} > 0$ и $\|\gamma_{s_i}\|_2 = 1$. Из формулы $M_s = M + \frac{1}{s}N > 0$ очевидно, $M_1 > M_2 > \dots > M$. Таким образом, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma$. В предельном случае $\lim_{s \rightarrow \infty} \gamma_s = \hat{\gamma}^*$ существует и $\hat{\gamma}^* \geq \gamma$. С другой стороны, $\lim_{s \rightarrow \infty} (M_s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(M + \frac{1}{s}N\right) = M$. Наконец,

$$Mv = \lim_{k \rightarrow \infty} M_{s_k} \hat{\gamma}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_{s_k} \gamma_{s_k} = \hat{\gamma}^* v.$$

Следовательно, $\hat{\gamma}^* \leq \gamma$. Отсюда уже получаем $\hat{\gamma}^* = \gamma$. $\square$

Наш следующий результат показывает, каким образом вычисление структурированного сингулярного значения эквивалентно вычислению неотрицательного спектрального радиуса и неотрицательного детерминанта возмущенных матриц.

Теорема 5. Для $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ и $\Delta \in \mathbb{B}_2^*$ имеем

$$\mu_{\mathbb{B}_2^*}(M) = \rho(M\Delta) \geq 0 \Leftrightarrow \det(\hat{M}\hat{\Delta}) \geq 0,$$

где $(\hat{M}\hat{\Delta})$ — главная подматрица, полученная удалением определенных строк и столбцов из матрицы $(M\Delta)$.

Доказательство. $\Rightarrow$. Достаточно показать, что если $(M\Delta)$ является неотрицательной как положительно полуопределенная матрица, то имеем $\det(\hat{M}\hat{\Delta}) \geq 0$ для главной подматрицы $(\hat{M}\hat{\Delta})$. Рассмотрим перестановку строк и столбцов, которая помещает $(\hat{M}\hat{\Delta})$ в верхнюю левую часть матрицы $(M\Delta)$. Другими словами, существует матрица перестановки P такая, что $(\hat{M}\hat{\Delta})$ является (1,1)-блоком, соответствующим матрице $P^*(M\Delta)P$. Поскольку $(M\Delta)$ является неотрицательной, то для любого допустимого $v \in \mathbb{C}^{n,1}$

$$v^*(\hat{M}\hat{\Delta})v = w^*(\hat{M}\hat{\Delta})w \geq 0,$$

где $w = P \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,1}$. Таким образом, $(\hat{M}\hat{\Delta}) \geq 0$, отсюда $\det(\hat{M}\hat{\Delta}) \geq 0$.

$\Leftarrow$. Проведем доказательство с помощью математической индукции. При $n = 1$ утверждение очевидно. Докажем шаг $n - 1 \rightarrow n$ от противного. Пусть $\lambda < 0$ — собственное значение $(M\Delta)$ и $x \in \mathbb{C}^{n,1}$, $\|x\|_2 = 1$, — собственное значение $(M\Delta)$. Оставшиеся собственные значения положительны, откуда $\det(M\Delta) < 0$, что является противоречием. Более того, пусть $\hat{\lambda} \leq 0$ — какое-либо другое собственное значение $(M\Delta)$ такое, что $\hat{\lambda} \neq \lambda$. Пусть $\hat{y}$ — соответствующий собственный вектор, причем $\|\hat{y}\|_2 = 1$. Наша цель — найти такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$s = x + \alpha \hat{y}$. Вектор s устроен так, что в нем есть хотя бы один элемент 0. Если элемент 0 стоит на i -м месте в s , то $s^*(M\Delta)s = (x + \alpha \hat{y})(M\Delta)(x + \alpha \hat{y}) = (\lambda + \alpha^2 \hat{\lambda}) < 0$. Наконец, учтем, что $(\hat{M}\hat{\Delta})$ получена из $(M\Delta)$ удалением i -й строки и i -го столбца. Также $\hat{s}$ получается из s удалением из него i -го элемента. Таким образом,

$$\hat{s}^*(\hat{M}\hat{\Delta})\hat{s} = s(M\Delta)s < 0,$$

отсюда следует, что главная подматрица $(\hat{M}\hat{\Delta})$ не является положительно полуопределенной, что позволяет применить индукционный переход. $\square$

Лемма 4. Пусть $S_{smooth} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n,n}$ — гладкое семейство матриц и $\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — собственное значение $S_{smooth}(t)$. Собственное значение $\lambda(t)$ сходится к простому собственному значению $\lambda(0)$ матрицы $S_{smooth}(0)$ при $t \rightarrow 0$. Тогда $\lambda(t)$ аналитична в окрестности $t = 0$ и

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)) = \frac{y^*(0)S_1x(0)}{y^*(0)x(0)},$$

где $S_1 = \frac{d}{dt}(S_{smooth}(0))$ и $y^*(0)(S_{smooth}(0) - \lambda(0)I) = 0$.

Вычисление точного структурированного сингулярного значения неотрицательной матрицы M относительно чисто мнимого возмущения вида $\delta_i I_i$ для всех i , где $\delta_i \in \mathbb{C}$, имеет большую физическую важность. Воспользуемся локальными экстремумами, полученными в теореме 6, чтобы показать, что точное вычисление структурированных сингулярных значений также эквивалентно точному вычислению единичного спектрального радиуса возмущенной матрицы $M\Delta$.

Теорема 6. Пусть $\mathbb{B}_1^* = \{\text{diag}(\delta_1 I_1, \delta_2 I_2, \dots, \delta_k I_k); s_i \in \mathbb{C}, i = 1 : k\}$, где $\|\delta_i I_i\|_2 = 1 \ \forall i = 1 : k$. Пусть также $\lambda(t) = |\lambda(t)|e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, — простое максимальное собственное значение $(M\delta_i I_i)$, $i = 1 : k$. Правый и левый собственные векторы x и y масштабированы так, что $a = e^{i\theta}y^*x > 0$. Предположим дополнительно, что $\delta_i I_i, i = 1 : k, z_k^* x_{\hat{k}} \neq 0 \ \forall \hat{k} = 1 : k$. Тогда $|\lambda_i| = 1 \ \forall i = 1 : k$.

За доказательством мы отсылаем заинтересованного читателя к работе [8]. $\square$

Лемма 5. Для квадратной матрицы M имеем: если $\rho(M) < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\| = 0$, а если $\rho(M) > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\| = \infty$.

Теорема 7.

$$\mu_{\mathbb{B}_1^*}(M) = \rho(M\Delta)$$

для $\Delta \in \mathbb{B}_1^*$, где $\rho(M\Delta) = 1$.

Доказательство. Для $\mu_{\mathbb{B}_1^*}(M) = \rho(M\Delta)$ при $\Delta \in \mathbb{B}_1^*$ и $\rho(M\Delta) = 1$ рассмотрим $s \geq 1$ — целое число такое, что $(M\Delta)^s > 0$. Докажем наш результат от противного. Предположим, что для данной матрицы M выполняется

$$(M\Delta)v \neq \rho(M\Delta)v,$$

откуда выражение $(M\Delta)v - \rho(M\Delta)v$ представляет собой неотрицательную и ненулевую матрицу. Имеем $(M\Delta)^s((M\Delta)v - sv) > 0$. Поэтому $(M\Delta)^s > 0$. Следовательно, существует $m > 1$ такое, что $(M\Delta)^s((M\Delta)v - mv) > 0$, отсюда

$$[(M\Delta)^{s+1}v]_i \geq m[(M\Delta)^s v]_i \rightarrow 0 \ \forall i. \quad (1)$$

Поскольку известно, что $(M\Delta) \geq 0$, получаем

$$[(M\Delta)^{s+2}v]_i \geq m [(M\Delta)^{s+1}v]_i \rightarrow 0 \quad \forall i. \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) имеем

$$[(M\Delta)^{s+2}v]_i \geq m^2 [(M\Delta)^s v]_i \quad \forall i.$$

Отсюда

$$[(M\Delta)^{s+\hat{s}}v]_i \geq m [(M\Delta)^s v]_i \quad \forall \hat{s} \geq 0 \text{ и } \forall i.$$

Пусть β такое, что $1 < \beta < m$, и пусть $\hat{M} = \frac{(M\Delta)}{\beta}$, тогда

$$[(M\Delta)^{s+\hat{s}}v]_i \geq \left(\frac{m}{\beta}\right)^{\hat{s}} (\hat{M}^s v)_i \quad \forall \hat{s} \geq 0 \text{ и } \forall i,$$

откуда $\lim_{\hat{s} \rightarrow 0} \|\hat{M}\|_2 = \infty$. Однако мы знаем, что $\rho(\hat{M}) = \frac{1}{\beta} < 1$, и это противоречит лемме 3.

Итак, $(M\Delta)v = \rho(M\Delta)v$, где $\rho(M\Delta) = 1$. $\square$

Докажем теперь, что вычисление точного структурированного сингулярного значения для данной неотрицательной матрицы M относительно множества полностью комплексных блоков эквивалентно вычислению точного структурированного сингулярного значения для матрицы $D * MD$, где D — положительная диагональная матрица.

Теорема 8. Пусть $\Delta = \{\text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) : \Delta_i \in \mathbb{C}^{m_i, m_i} \quad \forall i = 1 : n\}$. Тогда $\mu_\Delta(M) = \mu_\Delta(D * MD)$, если существует $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $|d_i| \geq 0 \quad \forall i = 1 : n$.

Доказательство. Покажем существование матрицы $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $|d_i| \geq 0 \quad \forall i$. Предположим, что $A, B \geq 0$. Пусть $\text{rank}(A + B) = s$ и N — несингулярная матрица такая, что

$$N^*(A + B)N = N^*AN + N^*BN = \begin{pmatrix} I_\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица N^*BN разбивается на блоки:

$$N^*BN = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Если $A \geq B$, то $C^*AC \geq C^*BC$ для любой комплексной матрицы C .

Таким образом, $N^*(A+B)N \geq N^*BN$. В свою очередь, из этого следует, что B_{12}, B_{21}, B_{22} становятся нулевыми. Поскольку B_{11} — ненулевая и неотрицательная матрица, то существует матрица $\mathbb{R}^{\lambda \times \lambda}$ такая, что

$$R^*B_{11}R = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица. Построим матрицу P следующим образом:

$$P = N \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n-\lambda} \end{pmatrix}.$$

Тогда P^*BP и $P^*AP = P^*(A+B)P - P^*BP$ — диагональные матрицы. Наконец, для построения матрицы D предположим, что A обратима, и возьмем $A = E^*E$ для некоторого E . Таким образом, $(E^{-1})^*BE^{-1} = UDU^*$, где $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $|d_i| \geq 0 \quad \forall i = 1 : n$. $\square$

Лемма 6. Для $P = E^{-1}U$ имеем $P^*AP = I$ и $P^*BP = D$.

Пусть $\mathbb{B}^* = \{\text{diag}(\delta_i^\eta I_i, O_j); i = 1 : s, j = 1 : F\}$, где $\delta_i^\eta = \eta^*(U_i^* U_i - V_i^* V_i) \eta \quad \forall i = 1 : s$, $\eta \in \mathbb{C}^{n,1}$, $\|\eta\|_2 = 1$ и $O_j \in \mathbb{C}^{m_j, m_j}$, $j = 1 : F$, такие, что $O = \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$.

В теореме 9 показывается, каким образом точное вычисление структурированного сингулярного значения для разбитой на блоки неотрицательной матрицы M эквивалентно вычислению наибольшего сингулярного значения $M\Delta$, где Δ принадлежит либо множеству полностью нулевых матриц, либо $\Delta = \delta_i^\eta I_i$ для всех i . Чисто мнимые скаляры δ_i получаются с помощью сингулярного разложения.

Теорема 9. Для данной матрицы $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ и $\Delta \in \mathbb{B}^*$ имеем $\mu_{\mathbb{B}^*}(M) = \sigma_{\max}(M\Delta)$ при $\Delta = O \in \mathbb{B}^*$ или $\Delta = \delta_i^\eta I_i$, где $\delta_i^\eta = \eta^*(U_i^* U_i - V_i^* V_i) \eta$, $\eta \in \mathbb{C}^{n,1}$, $\|\eta\|_2 = 1$. Матрицы U_i, V_i извлечены из сингулярного разложения M и ортогональны, т. е. $U_i^* U_i = U_i U_i^* = I_i$ и $V_i^* V_i = V_i V_i^* = I_i$.

Доказательство. Для полностью скалярных блоков рассмотрим $\Delta = O \in \mathbb{B}^*$ — полные блоки, являющиеся нулевыми матрицами. Сингулярное разложение

$$M\Delta = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}$$

дает $\sigma_i = 0 \quad \forall i$. Очевидно, что $\sigma_{\max}(M\Delta) = 0$, поэтому и $\mu_{\mathbb{B}^*}(M) = 0$.

Для скалярных блоков рассмотрим

$$\Delta = \delta_i^\eta = \eta^*(U_i^* U_i - V_i^* V_i) \eta,$$

тогда

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_2 &= \|\delta_i^\eta\|_2 = \|\eta^*(U_i^* U_i - V_i^* V_i) \eta\|_2 = \\ &= \|\eta^*(U_i^* U_i) \eta - \eta^*(V_i^* V_i) \eta\|_2 = \|\eta^* I \eta\|_2 - \|\eta^* I \eta\|_2 = \|\eta^* \eta\|_2 - \|\eta^* \eta\|_2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\sigma_{\max}(\Delta) = 0$ для $\Delta = \delta_i^\eta = \eta^*(U_i^* U_i - V_i^* V_i)$, отсюда $\mu_{\mathbb{B}^*} = \sigma_{\max}(M\Delta)$. $\square$

Предположение 1. Пусть $u, v \in \mathbb{C}^{n,1}$, где $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

Наконец, покажем, что вычисление структурированного сингулярного значения для данной матрицы $M^* M$, где $*$ обозначает комплексное сопряжение и транспонирование, в точности эквивалентно вычислению единичного наибольшего сингулярного значения $M^* M$.

Теорема 10. Пусть $M \in \mathbb{C}^{n,n}$. Тогда $\mu_{\mathbb{B}^*}(M^* M) = \sigma_{\max}(M^* M) = 1$ при $\Delta \in \mathbb{B}^*$.

Доказательство. Пусть $u \neq 0$, $v \neq 0$ и $a = \frac{u}{\|u\|_2}$, $b = \frac{v}{\|v\|_2}$, $c = \|u\|v$. Кроме того, пусть $M = I + uv^*$, $u, v \in \mathbb{C}^{n,1}$. Матрица $(M^* M)$ принимает следующий вид:

$$M^* M = (I + ac^*)(I + ac^*) = I + ac^* + ca^* + cc^*. \quad (3)$$

Из уравнения (3) можно получить уравнение

$$M^* M - I = (a + c)(a + c)^* - aa^*. \quad (4)$$

Из уравнения (4) понятно, что любой вектор, ортогональный к $a = \frac{u}{\|u\|_2}$, является собственным вектором $(M^* M)$. Соответствующее собственное значение равно 1. Поэтому, выбирая $c = sa$, получим $\lambda(M^* M) = (1+s)^2 = (1+a^*c)^2$. Также имеем $s^2\lambda = (\lambda-1-s)^2 = (\lambda-1-a^*c)^2$ и

$$|s|^2 = \left(\sqrt{\lambda} - \frac{1+a^*c}{\sqrt{\lambda}} \right)^2. \quad (5)$$

В уравнении (5) выражение $\sqrt{\lambda}$ равно либо $\sigma_{\max}(M^*M)$, либо $\sigma_{\min}(M^*M)$. Наконец, полагая $\sigma_{\min} = 0$, получаем $\sigma_{\max}(M^*M) = |s| = \|u\|\|v\|$, а предположение 1 влечет равенство $\sigma_{\max}(M^*M) = 1$. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены новые результаты, касающиеся анализа μ -значений — хорошо известного инструмента в теории управления. Главным вкладом статьи являются предложенные результаты об эквивалентности μ -значений и спектрального радиуса, детерминанта и наибольшего сингулярного значения неотрицательных матриц. По большей части мы ответили на следующие вопросы, касающиеся μ -значений неотрицательных матриц, подверженных чисто мнимым возмущениям.

1. Для данной неотрицательной матрицы $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ показать, что вычисление μ -значения в точности эквивалентно вычислению спектрального радиуса и детерминанта возмущенной матрицы $(M\Delta)$.

2. μ -значение в точности равно единичному спектральному радиусу матрицы $(M\Delta)$ с чисто мнимыми возмущениями Δ .

3. Для диагональной матрицы $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, где $|d_i| \geq 0 \ \forall i$, показано, что μ -значения M в точности равны μ -значениям (D^*MD) .

4. Для данной неотрицательной матрицы $M \in \mathbb{C}^{n,n}$ показано, что вычисление μ -значения в точности эквивалентно вычислению наибольшего сингулярного значения $(M\Delta)$, где Δ — допустимое чисто мнимое возмущение.

В ближайшее время мы планируем разработать метод, позволяющий решить следующие задачи.

Задача I. Точное вычисление μ -значения эквивалентно вычислению спектрального радиуса, детерминанта и наибольшего сингулярного значения для положительных и отрицательных матриц.

Задача II. Найти формы точной эквивалентности μ -значения, численного радиуса и числового диапазона для позиционных отрицательных матриц.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Doyle J. *Analysis of feedback systems with structured uncertainties*, IEE Proceedings on Control Theory and Applications, Inst. Electrical Engineers **129** (6), 242–250 (1982).
- [2] Braatz R.P., Young P.M., Doyle J.C., Morari M. *Computational complexity of μ -calculation*, IEEE Trans. Autom. Control **39** (5), 1000–1002 (1994).
- [3] Fan M., Tits A. *Characterization and efficient computation of the structured singular value*, IEEE Trans. Autom. Control **31** (8), 734–743 (1986).
- [4] Helton J.W. *A numerical method for computing the structured singular value*, Control Systems & control letters, Elsevier **10**, 21–26 (1988).
- [5] Young P.M., Newlin M.P., Doyle J.C. et al. *Practical computation of the mixed μ problem*, in: American Control Conference, IEEE, 2190–2194 (1992).
- [6] Young P.M. *The rank one mixed μ problem and Kharitonov-type analysis*, Automatica, Elsevier **30** (12), 1899–1911 (1994).
- [7] Rehman M., Alzabut J., Ateeq T., Kongson J., Sudsutad W. *The Dual Characterization of Structured and Skewed Structured Singular Values*, Math., MDPI **10** (12), 2050 (2022).
- [8] Guglielmi N., Rehman M., Kressner D. *A Novel Iterative Method to Approximate Structured Singular Values*, SIAM J. Matrix Anal. and Appl. **38** (2), 361–386 (2017).
- [9] Packard A., Doyle J. *The complex structured singular value*, Automatica **29** (1), 71–109 (1993).
- [10] Troeng O. *Five-Full-Block Structured Singular Values of Real Matrices Equal Their Upper Bounds*, IEEE Control Systems Letters, IEEE **5** (2), 583–586 (2020).
- [11] Rehman M., Tayyab M., Anwar M.F. *Computing μ -Values for Real and Mixed μ Problems*, Math., MDPI **7** (9), 821 (2019).

- [12] Berman A., Plemmons R.J. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences* (SIAM, Classics Appl. Math., 1994).
- [13] Bo Z. *Bounds for the spectral radius of nonnegative matrices*, Math. Slovaca **51** (2), 179–183 (2001).
- [14] Schur I. *Remarks on the theory of bounded bilinear forms with infinitely many variables* (Walter de Gruyter, New York, 1911).
- [15] Nikiforov V. *Revisiting Schur’s bound on the largest singular value*, arXiv preprint math/0702722 (2007).

Мутти-Ур Рехман

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: mutti.rehman@buxdu.uz

Тулкин Хусенович Расулов

Бухарский государственный университет,
ул. М. Икбол, д. 11, г. Бухара, 200118, Республика Узбекистан,

e-mail: t.h.rasulov@buxdu.uz

Бекзод Расулович Аминов

Университет Акфа,
ул. Миллий Бог, д. 264, г. Ташкент, 111221, Республика Узбекистан,

e-mail: b.aminov@akfauniversity.org

M. Rehman, T. Rasulov, and B. Aminov

Non-negative matrices and their structured singular values

Abstract. In this article, we present new results for the computation of structured singular values of non-negative matrices subject to pure complex perturbations. We prove the equivalence of structured singular values and spectral radius of perturbed matrix $(M\Delta)$. The presented new results on the equivalence of structured singular values, non-negative spectral radius and non-negative determinant of $(M\Delta)$ is presented and analyzed. Furthermore, it has been shown that for a unit spectral radius of $(M\Delta)$, both structured singular values and spectral radius are exactly equal. Finally, we present the exact equivalence between structured singular value and the largest singular value of $(M\Delta)$.

Keywords: μ -values, singular values, eigen values, structured matrices.

Mutti-Ur Rehman

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: mutti.rehman@buxdu.uz

Tulkin Husenovich Rasulov

Bukhara State University,
11 M. Ikbol str., Bukhara, 200118 Republic of Uzbekistan,

e-mail: t.h.rasulov@buxdu.uz

Bekzod Rasulovich Aminov

Akfa University,
264 Milliy Bog str., Tashkent, 111221 Republic of Uzbekistan,

e-mail: b.aminov@akfauniversity.org