

П. ДАНЧЕВ, А. ДЖАВАН, А. МУССАВИ

О НЕКОТОРЫХ РАСШИРЕНИЯХ π -РЕГУЛЯРНЫХ КОЛЕЦ

Аннотация. Некоторые вариации π -регулярных и нильчистых колец были недавно введены в работах первого из авторов: “*A generalization of π -regular rings*, Turkish J. Math. **43** (2), 702–711 (2019)”, “*A symmetrization in π -regular rings*, Trans. A. Razmadze Math. Inst. **174** (3), 271–275 (2020)”, “*A symmetric generalization of π -regular rings*, Ric. Mat. **73** (1), 179–190 (2024)”. Мы исследуем структуру этих классов колец и взаимосвязи между ними. В частности, мы доказываем, что (m, n) -регулярно нильчистые кольца обладают лево-правой симметрией, а также показываем, что выполняются включения $(D\text{-регулярно нильчистые}) \subseteq (\text{регулярно нильчистые}) \subseteq ((m, n)\text{-регулярно нильчистые})$, и отвечаем на вопросы 1, 2 и 3, поставленные в третьей из перечисленных выше работ. Более того, нами рассматриваются и другие аналогичные вопросы, касающиеся симметричных свойств некоторых классов колец, например, доказываем, что центрально утумиевые кольца всегда являются сильно π -регулярными.

Ключевые слова: сильно π -регулярное кольцо, D -регулярно нильчистое кольцо, (m, n) -регулярно нильчистое кольцо.

УДК: 512

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-22-33

ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данной статье все кольца предполагаются ассоциативными и обладающими единичным элементом. Наша стандартная терминология и обозначения в основном соответствуют тем, что используются в работах [1], [2]. Например, символы $U(R)$, $J(R)$, $Id(R)$, $Nil(R)$ и $C(R)$ обозначают соответственно множество обратимых элементов, радикал Якобсона, множество идемпотентов, множество нильпотентов и центр кольца R . Мы также используем обозначения $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{N}$ для множества целых чисел, целых чисел по модулю n и множества положительных целых чисел соответственно.

Как обычно, элемент r в кольце R называется *регулярным*, если существует такой элемент $x \in R$, что $rxr = r$, или, что эквивалентно, если главный левый идеал Rr является прямым слагаемым в R . Элемент r называется *обратимо регулярным*, если $rxr = r$, где $x \in U(R)$, или, что эквивалентно, если $r = xe$, где $x \in U(R)$ и $e \in Id(R)$. Таким образом, кольцо называется *(обратимо) регулярным*, если каждый элемент кольца является *(обратимо) регулярным*. Если, однако, $r = r^2x$ и $rx = xr$, то такие кольца известны в литературе как *сильно регулярные* кольца. Хорошими источниками для обзора этих трех классов колец являются работы [3] и [4], а также [5]–[7].

В этом контексте, как значимые обобщения вышеупомянутых концепций, стоит отметить, что кольцо R называется *π -регулярным*, если для каждого элемента $r \in R$ существует положительное целое число n такое, что $r^n \in r^n R r^n$. Кроме того, кольцо R называется *сильно*

π -регулярным, если для каждого элемента $r \in R$ существует положительное целое число n такое, что $r^n \in r^{n+1}R \cap Rr^{n+1}$. Понятие сильно π -регулярных колец было впервые введено И. Капланским в работе [8], а позже эти кольца изучались Г. Азумаей в [9], где он называл их *правыми π -регулярными* кольцами. Более того, Ф. Дишингер установил в [10], что лево-правая симметрия этого понятия действительно имеет место. Следовательно, каждое сильно π -регулярное кольцо также является π -регулярным, и эти два понятия совпадают в случае коммутативных колец или, более общо, в случае абелевых колец (т.е. когда все идемпотенты в кольце являются центральными, т.е. находятся в центре данного кольца). Стоит отметить, что π -регулярность была расширена четырьмя различными и нетривиальными способами в работах [11]–[14].

С другой стороны, элемент r в кольце R называется *чистым* (см. [15]), если его можно представить в виде суммы идемпотента и обратимого элемента, т.е. $r = e + u$, и кольцо R называется *чистым*, если каждый его элемент является чистым. Если, кроме того, $ue = eu$, то кольцо R называется *сильно чистым* (см. [16]).

Аналогично, напомним, что кольцо R называется *обменным кольцом*, если для каждого элемента $a \in R$ существует идемпотент $e \in Ra$ такой, что $1 - e \in R(1 - a)$ (см., например, [15]). Было доказано В. Николсоном в ([15], теорема 2.1), что кольцо является обменным тогда и только тогда, когда все идемпотенты поднимаются по модулю любого левого идеала кольца, и он также установил лево-правую симметрию этого понятия. Более того, он также показал, что каждое чистое кольцо является обменным кольцом. Для более подробной информации об обменных и чистых кольцах мы рекомендуем источники [17] и [16] соответственно.

В этом же духе, элемент r в кольце R называется *нильчистым*, если его можно представить в виде суммы идемпотента и нильпотентного элемента, т.е. $r = e + q$, и кольцо R называется *нильчистым*, если каждый его элемент является нильчистым. Если, кроме того, $qe = eq$, то кольцо R называется *сильно нильчистым* (см. [18]). Легко проверить, что нильчистые кольца всегда являются чистыми, хотя обратное утверждение в общем случае неверно. Это понятие было далее расширено в [14] до концепции слабо нильчистых колец, которые представляют собой такие кольца R , что для каждого элемента $a \in R$ существуют $e \in Id(R)$ и $q \in Nil(R)$ такие, что $a - q - e \in eRa$.

С другой стороны, элемент r в кольце R называется *утумиевым*, если существует $x \in R$ такой, что $r - r^2x \in Nil(R)$, и кольцо R называется *кольцом Утуми (утумиевым)*, если каждый элемент в нем является утумиевым. Если, кроме того, $rx = xr$, то кольцо R называется *сильно утумиевым*. Если же $r - r^2x \in Nil(R) \cap C(R)$, то кольцо R называется *центрально утумиевым*. В работе ([11], теорема 2.13) было установлено, что кольца Утуми обязательно обладают лево-правой симметрией.

Нам понадобятся следующие дополнительные понятия.

Определение. Пусть R — произвольное кольцо.

- 1) ([11], определение 1.1) — Кольцо R называется *регулярно нильчистым*, если для любого $a \in R$ существует $e \in Id(R) \cap Ra$ такой, что $a(1 - e) = a - ae \in Nil(R)$ (откуда $(1 - e)a \in Nil(R)$).
- 2) ([13], определение 1.1) — Кольцо R называется *дважды регулярно нильчистым* или просто *D-регулярно нильчистым* (для краткости), если для любого $a \in R$ существует $e \in Id(R) \cap aRa$ такой, что $a(1 - e) = a - ae \in Nil(R)$ (откуда $(1 - e)a \in Nil(R)$).

- 3) ([12], определение 1.1) – Кольцо R называется (m, n) -регулярно нильчистым для двух неотрицательных целых чисел m, n , если для любого $a \in R$ существует $e \in Id(R) \cap a^m R a^n$ такой, что $a^m(1 - e)a^n \in Nil(R)$ (откуда $a^n(1 - e)a^m \in Nil(R)$).

В этом контексте в работе ([12], проблема 2.10) автор задал вопрос о взаимосвязи между D -регулярно нильчистыми кольцами и (m, n) -регулярно нильчистыми кольцами. Там был поставлен вопрос, являются ли эти понятия независимыми друг от друга или *нет*.

В следующем разделе мы покажем, что для любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняются следующие импликации:

$$D\text{-регулярно нильчистое} \implies \text{регулярно нильчистое} \implies (m, n)\text{-регулярно нильчистое}.$$

Однако, когда кольцо является либо абелевым, либо NI-кольцом (в последнем случае $Nil(R)$ образует идеал кольца R), для любых $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется следующее:

$$D\text{-регулярно нильчистое} \iff \text{регулярно нильчистое} \iff (m, n)\text{-регулярно нильчистое}.$$

Систематизация нашей дальнейшей работы следующая: в разделе 1 мы рассмотрим взаимосвязь между так называемыми регулярно нильчистыми и (m, n) -регулярно нильчистыми кольцами для некоторых неотрицательных целых чисел m и n . Основные результаты здесь представлены в теоремах 1 и 2. В разделе 2 мы сосредоточимся на связи между так называемыми регулярно нильчистыми и D -регулярно нильчистыми кольцами, где нам удалось установить два основных результата, которые соответственно представлены в теоремах 3 и 4.

1. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕГУЛЯРНО НИЛЬЧИСТЫМИ И (m, n) -РЕГУЛЯРНО НИЛЬЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ

Начнем нашу работу со следующего технического момента.

Предложение 1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда (m, n) -регулярно нильчистые кольца R являются лево-право симметричными в том смысле, что для любого элемента $a \in R$ существует $f \in Id(R) \cap a^n R a^m$ такой, что $a^n(1 - f)a^m \in Nil(R)$.

Доказательство. В соответствии с определением существует $e \in a^m R a^n$ такой, что $a^n(1 - e)a^m \in Nil(R)$. Без потери общности можно предполагать, что $m < n$. Запишем $e = a^m r a^n$ и обозначим $f := (a^n r a^m)^2$. Тогда

$$\begin{aligned} f^2 &= (a^n r a^m)(a^n r a^m)(a^n r a^m)(a^n r a^m) = a^{n-m}(a^m r a^n)(a^m r a^n)(a^m r a^n)(a^m r a^m) = \\ &= a^{n-m}(a^m r a^n)(a^m r a^m) = (a^n r a^m)(a^n r a^m) = f, \end{aligned}$$

а также

$$f a^n = (a^n r a^m)(a^n r a^m) a^n = a^{n-m}(a^m r a^n)(a^m r a^n) a^m = a^{n-m} e a^m.$$

Отсюда можно вывести, что

$$a^m(1 - f)a^n = a^m(a^n - f a^n) = a^m(a^n - a^{n-m} e a^m) = a^n a^m - a^n e a^m = a^n(1 - e)a^m \in Nil(R).$$

Откуда сразу следует соотношение $a^n(1 - f)a^m \in Nil(R)$. $\square$

Докажем

Предложение 2. Регулярно нильчистые кольца являются (m, n) -регулярно нильчистыми для любых $m, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть R — регулярно нильчистое кольцо и пусть $a \in R$ — произвольный его элемент, положим $k := n + m$, тогда $a^k \in R$. По определению существует $e \in a^k R$ такой, что $(1 - e)a^k \in \text{Nil}(R)$. Запишем $e = a^k r$ для некоторого $r \in R$ и положим $r' := re$ и $f := a^m r' a^n$. Тогда $e = a^k r'$, $r' = r'e$ и

$$f^2 = a^m r' a^k r' a^n = a^m r' e a^n = a^m r' a^n = f.$$

Также имеем

$$a^n f = a^n a^m r' a^n = a^k r' a^n = e a^n.$$

Тогда получаем

$$a^n(1 - f)a^m = (a^n - a^n f)a^m = (a^n - e a^n)a^m = (1 - e)a^k \in \text{Nil}(R).$$

Таким образом, $a^m(1 - f)a^n \in \text{Nil}(R)$, откуда вытекает требуемое. $\square$

Теперь мы готовы доказать следующие утверждения.

Предложение 3. Пусть R — кольцо и $m, n, p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, где $m + n = p + q$. Тогда R является (m, n) -регулярно нильчистым тогда и только тогда, когда R является (p, q) -регулярно нильчистым.

Доказательство. Предположим, что $e \in a^m R a^n$ такой, что $(1 - e)a^{m+n} \in \text{Nil}(R)$. Без потери общности можем предполагать, что $m > p$. Запишем $e = a^m r a^n$ и определим $f := a^p r a^{p+q} r a^q \in a^p R a^q$. Тогда

$$\begin{aligned} f^2 &= (a^p r a^{p+q} r a^q)(a^p r a^{p+q} r a^q) = (a^p r a^{m+n} r a^q)(a^p r a^{m+n} r a^q) = \\ &= a^p r a^n (a^m r a^n)(a^m r a^n) a^{q-n} = a^p r a^n (a^m r a^n) a^{q-n} = a^p r a^{n+m} r a^q = a^p r a^{p+q} r a^q = f. \end{aligned}$$

Однако мы можем видеть, что $a^{m-p} f = e a^{q-n}$. Также

$$\begin{aligned} a^{m-p}(1 - f)a^{n+p} &= (a^{m-p} - a^{m-p} f)a^{n+p} = (a^{m-p} - e a^{q-n})a^{n+p} = \\ &= a^{m+n} - e a^{p+q} = a^{m+n} - e a^{m+n} = (1 - e)a^{m+n} \in \text{Nil}(R). \end{aligned}$$

Итак,

$$a^{m-p}(1 - f)a^{n+p} \in \text{Nil}(R),$$

однако

$$a^p(1 - f)a^q \in \text{Nil}(R)$$

тогда и только тогда, когда

$$a^{p+q}(1 - f) \in \text{Nil}(R)$$

тогда и только тогда, когда

$$a^{m+n}(1 - f) \in \text{Nil}(R)$$

тогда и только тогда, когда

$$a^{m+n+p-p}(1 - f) \in \text{Nil}(R)$$

тогда и только тогда, когда

$$a^{m-p}(1 - f)a^{n+p} \in \text{Nil}(R).$$

Значит, R является (p, q) -регулярно нильчистым кольцом, что и требовалось доказать. $\square$

Следствие 1. Пусть R — кольцо и $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда эквивалентны условия:

1. R является (m, n) -регулярно нильчистым кольцом;
2. для любого $a \in R$ существует $e = e^2 \in a^{n+m} R$ такой, что $a^{n+m}(1 - e) \in \text{Nil}(R)$;
3. для любого $a \in R$ существует $e = e^2 \in R a^{n+m}$ такой, что $a^{n+m}(1 - e) \in \text{Nil}(R)$;
4. для любого $a \in R$ элемент a^{n+m} является регулярно нильчистым.

Полезным является следующее техническое утверждение. Напомним, что кольцо R называется *редуцированным*, если $\text{Nil}(R) = \{0\}$, и *абелевым*, если $\text{Id}(R) \subseteq C(R)$. Заметим, что редуцированные кольца всегда являются абелевыми, но это утверждение, в общем случае, необратимо.

Лемма 1. *Пусть R — редуцированное (m, n) -регулярно нильчистое кольцо такое, что $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда R является регулярным кольцом.*

Доказательство. Предположим, что $a \in R$ и $m \geq n$ (следовательно, $m > 0$). Таким образом, существует элемент $e \in a^n R a^m \subseteq R a$ такой, что $a^{n+m}(1-e) \in \text{Nil}(R) = \{0\}$. Так как R является абелевым, то можно заключить, что $(a(1-e))^{n+m} = 0$, значит, $a(1-e) = 0$. Поэтому $a = ara$ для некоторого $r \in R$, как и утверждалось. $\square$

Теперь мы можем перейти к следующему основному утверждению, которое сосредоточено на некоторых общих расширениях коммутативных колец. В этом контексте при определении 2-первичного кольца (2-primal) обычно подразумевается кольцо R такое, что множество нильпотентных элементов $\text{Nil}(R)$ совпадает с простым радикалом (т. е. с пересечением простых идеалов). В этом контексте символ $\text{Nil}_*(R)$ обозначает *нижний* нильрадикал такого кольца R .

Теорема 1. *Пусть R — 2-первичное (m, n) -регулярно нильчистое кольцо для некоторых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причем $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда $M_k(R)$ является (p, q) -регулярно нильчистым кольцом для любых $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Известно (см. подробности в [1], [2]), что

$$M_k(R)/J(M_k(R)) \cong M_k(R/J(R)) = M_k(R/\text{Nil}_*(R)).$$

Так как факторкольцо $\bar{R} = R/\text{Nil}_*(R)$ одновременно является редуцированным и (m, n) -регулярно нильчистым, то лемма 1 гарантирует, что $\bar{R}$ является регулярным. Следовательно, согласно работе [1] $M_k(\bar{R})$ является регулярным. Более того, комбинируя ([11], предложение 2.1) и предложение 2, можно заключить, что $M_k(\bar{R})$ является (p, q) -регулярно нильчистым кольцом.

С другой стороны, поскольку $J(R)$ является нильидеалом и R является 2-первичным кольцом, можно убедиться, что

$$J(M_k(R)) = M_k(J(R)) = M_k(\text{Nil}_*(R)) = \text{Nil}_*(M_k(R))$$

является нильпотентным идеалом. Таким образом, согласно утверждению ([12], лемма 2.1) $M_k(R)$ является (p, q) -регулярно нильчистым кольцом, что и требовалось доказать. $\square$

Нам будут полезны также следующие два технических утверждения.

Лемма 2. *Пусть R — абелево (m, n) -регулярно нильчистое кольцо для некоторых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда R является (p, q) -регулярно нильчистым для любых $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Доказательство. Если предположить, что $m + n \leq p + q$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такой, что $p + q \leq k(m + n)$. Для каждого элемента $a \in R$ существует $e \in (a^k)^{n+m} R \subseteq a^{p+q} R$ такой, что $a^{k(n+m)}(1-e) \in \text{Nil}(R)$. Значит, можно вывести, что

$$(a^{p+q}(1-e))^{k(n+m)} = ((a(1-e))^{p+q})^{k(m+n)} = ((a(1-e))^{k(m+n)})^{p+q} = (a^{k(n+m)}(1-e))^{p+q} \in \text{Nil}(R).$$

Таким образом, $a^{p+q}(1-e) \in \text{Nil}(R)$, как и требовалось.

Если же $p + q \leq m + n$, то для каждого элемента $a \in R$ существует $e \in a^{n+m}R \subseteq a^{p+q}R$ такой, что $a^{n+m}(1 - e) \in \text{Nil}(R)$. Следовательно,

$$(a^{p+q}(1 - e))^{n+m} = ((a(1 - e))^{p+q})^{n+m} = ((a(1 - e))^{n+m})^{p+q} = (a^{n+m}(1 - e))^{p+q} \in \text{Nil}(R).$$

Отсюда $a^{p+q}(1 - e) \in \text{Nil}(R)$, и требуемое утверждение выполнено. $\square$

Напомним еще раз для удобства читателей, что кольцо R называется NI -кольцом (NI Ideal), если множество $\text{Nil}(R)$ образует идеал в R .

Следующее техническое утверждение значительно расширяет лемму 1.

Лемма 3. Пусть R — NI -кольцо, являющееся (m, n) -регулярно нильчистым для некоторых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда R является (p, q) -регулярно нильчистым для любых $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Во-первых, если $m + n \leq p + q$, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $p + q \leq k(n + m)$. Можно заметить, что для каждого $a \in R$ существует

$$e = e^2 \in (a^k)^{n+m}R \subseteq a^{p+q}R \text{ такой, что } (a^k)^{n+m}(1 - e) \in \text{Nil}(R).$$

Пусть x — это остаток от деления $k(n + m)$ на $p + q$ (т. е. $0 \leq x < p + q$), тогда существует $k' \in \mathbb{N}$ такое, что

$$a^{k'(p+q)}a^x(1 - e) \in \text{Nil}(R).$$

Следовательно,

$$a^{k'(p+q)}(1 - e)a^x \in \text{Nil}(R).$$

Поскольку R является NI -кольцом, мы получаем

$$a^{k'(p+q)}(1 - e)a^{p+q} \in \text{Nil}(R).$$

Более того, используя ту же самую характеристику R , а именно, что $\text{Nil}(R)$ является идеалом R , впоследствии имеем

$$\begin{aligned} a^{k'(p+q)}(1 - e)a^{p+q} \in \text{Nil}(R) &\Rightarrow a^{k'(p+q)}(1 - e)a^{p+q}(1 - e) \in \text{Nil}(R) \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^{(k'-1)(p+q)}a^{p+q}(1 - e)a^{p+q}(1 - e) \in \text{Nil}(R) \Rightarrow a^{(k'-1)(p+q)}[a^{p+q}(1 - e)]^2 \in \text{Nil}(R) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dots \Rightarrow [a^{p+q}(1 - e)]^{k'+1} \in \text{Nil}(R) \Rightarrow a^{p+q}(1 - e) \in \text{Nil}(R). \end{aligned}$$

На самом деле, критическим шагом является то, что

$$a^{(k'-1)(p+q)}[a^{p+q}(1 - e)]^2 \in \text{Nil}(R) = a^{p+q}a^{(k'-2)(p+q)}[a^{p+q}(1 - e)]^2 \in \text{Nil}(R),$$

откуда $a^{(k'-2)(p+q)}[a^{p+q}(1 - e)]^2a^{p+q} \in \text{Nil}(R)$. Таким образом, как было показано выше, умножив обе стороны справа на $1 - e$ и уменьшив значение k' , мы можем получить требуемый результат.

Таким образом, можно также заключить, что, как и ожидалось, $(1 - e)a^{p+q} \in \text{Nil}(R)$.

Обратно, если $p + q \leq n + m$, то, воспользовавшись аналогичными методами, можно получить $a^{p+q}(1 - e) \in \text{Nil}(R)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1. С учетом предложения 2 концептуально достаточно было бы в предыдущих двух леммах доказать только то, что R является регулярно нильчистым кольцом. Тем не менее, мы привели более прямые доказательства.

Следствие 2. Пусть R — 2-первичное (m, n) -регулярно нильчистое кольцо для некоторых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ кольцо $M_k(R)$ является регулярно нильчистым кольцом.

Следствие 3. Пусть R — абелево (m, n) -регулярно нильчистое кольцо для некоторых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда R является регулярно нильчистым кольцом.

Следствие 4. Пусть R — (m, n) -регулярно нильчистое NI-кольцо для некоторых $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $(m, n) \neq (0, 0)$. Тогда R является регулярно нильчистым кольцом.

Продолжим работу в другом направлении. Действительно, в [11] был задан вопрос о том, обладают ли кольца Утуми свойством лево-правой симметрии. В ([13], теорема 2.13) было показано, что ответ на этот вопрос положительный. Тем не менее, в следующем техническом утверждении мы покажем другим и более прозрачным способом, что это действительно так.

Лемма 4. Для любого кольца R следующие утверждения эквивалентны:

1. R — утумиевое кольцо;
2. для любого $x \in R$ существует $y \in R$ такой, что $x - x^2y \in \text{Nil}(R)$;
3. для любого $x \in R$ существует $y \in R$ такой, что $x - xux \in \text{Nil}(R)$;
4. для любого $x \in R$ существует $y \in R$ такой, что $x - yx^2 \in \text{Nil}(R)$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (2) очевидно из определения. Теперь достаточно показать, что импликации (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2) верны. Для достижения этой цели заметим, что для любых двух элементов x и y кольца R верно, что $xy \in \text{Nil}(R)$ тогда и только тогда, когда $yx \in \text{Nil}(R)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x - x^2y \in \text{Nil}(R) &\Leftrightarrow x(1 - xy) \in \text{Nil}(R) \Leftrightarrow (1 - xy)x \in \text{Nil}(R) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - xux \in \text{Nil}(R) \Leftrightarrow x(1 - yx) \in \text{Nil}(R) \Leftrightarrow (1 - yx)x \in \text{Nil}(R) \Leftrightarrow x - yx^2 \in \text{Nil}(R). \end{aligned}$$

Это автоматически завершает доказательство. $\square$

Кроме того, в ([11], задача 3.3) ставился вопрос, являются ли центрально утумиевые кольца обменными. Мы сосредоточимся на этом и докажем даже большее, а именно, что каждое центрально утумиевое кольцо является сильно π -регулярным. Поскольку в ([19], пример 23) было показано, что сильно π -регулярные кольца являются обменными, этим мы завершим доказательство.

Теорема 2. Любое центрально утумиевое кольцо является сильно π -регулярным кольцом.

Доказательство. Пусть R — центрально утумиевое кольцо, и пусть $x \in R$ — произвольный элемент. Тогда существует $y \in R$ такой, что $x - x^2y \in \text{Nil}(R) \cap C(R)$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ мы получаем

$$\begin{aligned} (x - x^2y)^n &= (x - x^2y)^{n-1}(x - x^2y) = (x - x^2y)^{n-1}x(1 - xy) = \\ &= x(x - x^2y)^{n-1}(1 - xy) = x(x - x^2y)^{n-2}(x - x^2y)(1 - xy) = \\ &= x(x - x^2y)^{n-2}x(1 - xy)^2 = x^2(x - x^2y)^{n-2}(1 - xy)^2 = \dots = x^n(1 - xy)^n. \end{aligned}$$

С другой стороны, существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $(x - x^2y)^m = 0$. Таким образом, $x^m(1 - xy)^m = 0$. Раскрывая это выражение с помощью классической биномиальной формулы Ньютона, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= x^m(1 - xy)^m = x^m \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} (xy)^i = \\ &= x^m \left(1 + \sum_{i=1}^m (-1)^i \binom{m}{i} x(yx)^{i-1}y \right) = x^m + \sum_{i=1}^m (-1)^i \binom{m}{i} x^{m+1}(yx)^{i-1}y, \end{aligned}$$

отсюда

$$x^m = k_1 x^{m+1}y + \dots + k_m x^{m+1}(yx)^{m-1}y,$$

где мы обозначили $k_i = (-1)^{i+1} \binom{m}{i} \in \mathbb{N}$ для $i = 1, \dots, m$. Наконец, можно вывести, что $x^m = x^{m+1}r$, где $r \in R$. Это показывает, что кольцо R является сильно π -регулярным, что и требовалось доказать. $\square$

Сейчас, чтобы показать, что обратное утверждение неверно, легко заметить, что кольцо $\mathbb{Z}_{(2)}$, состоящее из всех рациональных чисел с нечетными знаменателями, является коммутативным (локальным) обменным кольцом, которое явно не является центрально утумиевым.

Следующая конструкция заслуживает подробного описания.

Пример 1. Для любого кольца R и кольцо многочленов $R[x]$, и кольцо степенных рядов $R[[x]]$ не являются (m, n) -регулярно нильчистыми для любых $m, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Если предположить, для противоречия, что кольцо $R[[x]]$ является (m, n) -регулярно нильчистым, то согласно ([2], упражнение 5.6) мы знаем, что

$$J(R[[x]]) = \{a + xf(x) \mid a \in J(R) \text{ и } f(x) \in R[[x]]\}.$$

Значит, $x \in J(R[[x]])$. Поэтому $J(R[[x]])$ не является нильпотентным идеалом, но согласно ([12], лемма 2.1) $J(R[[x]])$ является нильпотентным. Получили противоречие, как и требовалось.

Теперь предположим для противоречия, что $R[x]$ является (m, n) -регулярно нильчистым. Тогда существует $e \in x^m R[x] x^n \cap Id(R[x])$ такой, что $x^{n+m}(1-e) \in Nil(R[x])$. Следовательно, существует $f \in R[x]$ такой, что $e = fx^{m+n}$. Простым расчетом можно убедиться, что $e = 0$. Однако можно увидеть, что

$$x^{n+m}(1-e) = x^{n+m} \notin Nil(R[x]),$$

и это противоречит нашему предположению.

2. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ РЕГУЛЯРНО НИЛЬЧИСТЫМИ И D-РЕГУЛЯРНО НИЛЬЧИСТЫМИ КОЛЬЦАМИ

Согласно приведенным выше определениям, каждое D-регулярно нильчистое кольцо является регулярно нильчистым кольцом. В этом разделе мы исследуем, при каких дополнительных условиях и обстоятельствах обратное также верно, т.е. когда D-регулярно нильчистые кольца и регулярно нильчистые кольца совпадают.

Однако прежде всего мы приведем несколько основных примеров.

Пример 2.

1. Каждый обратимый элемент в кольце является D-регулярно нильчистым. На самом деле, если a обратим в R , мы можем записать $e = 1 = aa^{-2}a \in aRa$. В частности, каждое тело является D-регулярно нильчистым.
2. Каждый идемпотентный элемент в кольце является D-регулярно нильчистым. Действительно, если a идемпотентен в R , мы можем записать $e = a = aa \in aRa$. В частности, любое булево кольцо является D-регулярно нильчистым.
3. Каждый нильпотентный элемент в кольце является D-регулярно нильчистым. Действительно, если a нильпотентен в R и $a^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, мы можем записать $e = 0 = aa^{n-2}a \in aRa$.
4. Все D-регулярно нильчистые кольца замкнуты относительно конечных прямых произведений.

В силу пп. 1 и 3 примера 2 можно заключить, что $\mathbb{Z}_{p^n}$ является D-регулярно нильчистым кольцом для любого простого числа p и положительного целого числа n . Также из п. 4 примера 2 следует, что $\mathbb{Z}_m$ является D-регулярно нильчистым кольцом для любого положительного целого числа m .

Кроме того, в ([13], задача 3.1) задавался вопрос, является ли бесконечное прямое произведение (сильно) π -регулярных колец D-регулярно нильчистым кольцом. Благодаря следующему результату мы отвечаем на этот вопрос отрицательно.

Пример 3. Бесконечное произведение (сильно) π -регулярных колец *не* является D-регулярно нильчистым кольцом. Более того, мы можем построить бесконечное прямое произведение D-регулярно нильчистых колец, которое само по себе *не* является D-регулярно нильчистым. Действительно, рассмотрим кольцо

$$R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8 \times \cdots.$$

Мы утверждаем, что элемент $a = (0, 2, 2, 2, \dots) \in J(R) \subseteq R$ *не* является D-регулярно нильчистым, поскольку в противном случае получим $e \in aRa \subseteq J(R)$. Таким образом, сразу вытекает $e = 0$. Но это заставляет нас заключить, что $a(1 - e) = a \notin \text{Nil}(R)$, что и требовалось.

Теперь у нас есть все необходимые компоненты для доказательства следующего утверждения.

Теорема 3. Пусть R — NI-кольцо. Тогда R является регулярно нильчистым кольцом тогда и только тогда, когда R является D-регулярно нильчистым.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать только, что каждое регулярно нильчистое кольцо является D-регулярно нильчистым. Обратимся к предложению 2, согласно которому каждое регулярно нильчистое кольцо является $(1, 1)$ -регулярно нильчистым. Пусть $a \in R$ — произвольный элемент, тогда существует $e = e^2 \in aRa$ такой, что $a(1 - e)a \in \text{Nil}(R)$. Поскольку R является NI-кольцом, легко увидеть, что $a(1 - e) \in \text{Nil}(R)$, что и требовалось. $\square$

Имея необходимые инструменты, мы теперь готовы доказать следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть R — абелево кольцо. Тогда R является регулярно нильчистым тогда и только тогда, когда R является D-регулярно нильчистым.

Доказательство. Как и ранее, достаточно показать, что каждое регулярно нильчистое кольцо является D-регулярно нильчистым. Используя предложение 2, каждое регулярно нильчистое кольцо является $(1, 1)$ -регулярно нильчистым. Следовательно, для каждого $a \in R$ существует $e = e^2 \in aRa$ такой, что $a(1 - e)a \in \text{Nil}(R)$. Поскольку R — абелево кольцо, мы имеем

$$\begin{aligned} a(1 - e)a \in \text{Nil}(R) &\Rightarrow a(1 - e)^2a \in \text{Nil}(R) \Rightarrow a(1 - e)a(1 - e) \in \text{Nil}(R) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a(1 - e))^2 \in \text{Nil}(R) \Rightarrow a(1 - e) \in \text{Nil}(R), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 5 ([20], лемма 1.5). Пусть R — область целостности и $A \in M_2(R)$. Тогда A является идемпотентом тогда и только тогда, когда либо $A = 0$, либо $A = I$, либо $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 - a \end{pmatrix}$, где $bc = a - a^2$ в R .

Учитывая ([13], теорема 2.7 и [13], теорема 2.10), регулярные и π -регулярные кольца являются D-регулярно нильчистыми. Однако в ([13], проблема 3.3) задавался вопрос, существуют ли (π) -регулярный элемент, который *не* является D-регулярно нильчистым.

Следующий пример явно иллюстрирует, что ответ на этот вопрос однозначно положительный (для результатов подобного рода см. [21] и [22] соответственно).

Пример 4. Существует (π) -регулярный элемент, который *не* является D-нильчистым.

Доказательство. Пусть $R = M_2(\mathbb{Z})$, возьмем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in R \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R.$$

Не так сложно проверить, что $A = ABA$ и $A^n = (-2)^{n-1}A$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если, однако, мы предположим противоположное, что A является D-регулярно нильчистым элементом, то существует элемент $E \in ARA \cap Id(R)$ такой, что $A(I - E) \in Nil(R)$. Поскольку A не является нильпотентным, мы имеем $E \neq 0$ и запишем

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & -h \\ 3h & -3h \end{pmatrix},$$

где $h = (x - z) + 3(y - d) \in \mathbb{Z}$. В соответствии с леммой 5 мы делаем вывод, что E не является идемпотентом, и это очевидно противоречит нашему предположению, тем самым доказывая требуемое утверждение.

Учитывая приведенный выше пример, можно также сделать вывод, что регулярно нильчистый элемент *не* является D-регулярно нильчистым.

Резюмируя, получаем, что общая взаимосвязь между регулярными кольцами, D-регулярно нильчистыми кольцами, обменными кольцами и чистыми кольцами выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{чистые} \\ & & \Downarrow \\ \text{регулярные} & \implies & \text{D-регулярно нильчистые} \implies \text{обменные} \end{array}.$$

Эти импликации в общем случае не являются обратимыми. Например, кольцо $\mathbb{Z}_4$ является D-регулярно нильчистым, но явно не является регулярным кольцом. Более того, несложно убедиться, что кольцо $\mathbb{Z}_{(2)}$ является (чистым) обменным, но не является D-регулярно нильчистым кольцом, поскольку $J(R)$ определено не является нильпотентным (см. [13], лемма 2.1).

Аналогично, в ([13], проблема 3.2) был задан вопрос о том, существует ли D-регулярно нильчистое кольцо, которое *не* является сильно чистым (и даже *не* чистым). Следующее построение подтверждает это в утвердительном смысле.

Пример 5. Существует D-регулярно нильчистое кольцо, которое не является ни чистым, ни сильно чистым.

Доказательство. Зная пример, приписываемый Бергману, а именно ([23], пример 2), где приведено регулярное кольцо R , которое не порождено своими единицами, мы на основании ([13], теорема 2.7) можем утверждать, что такое R является D-регулярно нильчистым. Однако R определено не является чистым, как это следует из ([24], предложение 10); значит, оно также не является сильно чистым.

С другой стороны, в [25] был приведен пример регулярного в смысле вон Неймана кольца, которое *не* является сильно чистым. Поэтому в соответствии с ([13], теорема 2.7) это кольцо обязательно является D-регулярно нильчистым, но не обязательно сильно чистым, как и предполагалось.

Лемма 6. Пусть R — NI-кольцо и $a \in R$. Если $a = b + q$, где b — регулярно нильчистый элемент и $q \in \text{Nil}(R)$, то a является регулярно нильчистым элементом.

Доказательство. Выберем идемпотент $g \in bR$ такой, что $(1-g)b \in \text{Nil}(R)$. Запишем $g = br$ и положим $\bar{g} := br + \text{Nil}(R)$. Поскольку $a \equiv b$ по модулю $\text{Nil}(R)$, мы получаем $\bar{g} = ar + \text{Nil}(R) \in R/\text{Nil}(R)$. Теперь согласно ([1], теорема 21.28) существует идемпотент $e \in arR$ с $\bar{e} = \bar{g}$. Однако легко проверить, что $(1-e)a \equiv (1-g)b = 0$ по модулю $\text{Nil}(R)$, как и ожидалось. $\square$

Мы завершаем нашу работу следующим сложным вопросом.

Проблема. Привести явный пример, показывающий, что классы (p, q) -регулярно нильчистых колец и (m, n) -регулярно нильчистых колец различны при условии, что $m + n \neq p + q$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lam T.Y. *A First Course in Noncommutative Rings*, V. 131, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics (Springer-Verlag, New York, 2001).
- [2] Lam T.Y. *Exercises in Classical Ring Theory*, 2nd edition, Problem Books in Mathematics (Springer-Verlag, New York, 2003).
- [3] Goodearl K.R. *Von Neumann Regular Rings*, Monographs and Studies in Mathematics (Pitman, Boston, Massachusetts, 1979).
- [4] Tuganbaev A.A. *Rings Close to Regular*, V. 545, Mathematics and Its Applications (Springer Netherlands, Amsterdam, 2013).
- [5] Danchev P.V. *Generalizing nil clean rings*, Bull. Belg. Math. Soc. (Simon Stevin) **25** (1), 13–29 (2018).
- [6] Hartwig R., Luh J. *A note on the group structure of unit regular ring elements*, Pac. J. Math. **71** (2), 449–461 (1977).
- [7] Lam T.Y., Murray W. *Unit regular elements in corner rings*, Bull. Hong Kong Math. Soc. **1** (1), 61–65 (1997).
- [8] Kaplansky I. *Topological representation of algebras II*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1), 62–75 (1950).
- [9] Azumaya G. *Strongly π -regular rings*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I **13** (1), 034–039 (1954).
- [10] Dischinger F. *Sur les anneaux fortement π -réguliers*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. A–B **283** (8), 571–573 (1976).
- [11] Danchev P.V. *A generalization of π -regular rings*, Turkish J. Math. **43** (2), 702–711 (2019).
- [12] Danchev P.V. *A symmetrization in π -regular rings*, Trans. A. Razmadze Math. Inst. **174** (3), 271–275 (2020).
- [13] Danchev P.V. *A symmetric generalization of π -regular rings*, Ric. Mat. **73** (1), 179–190 (2024).
- [14] Danchev P.V., Šter J. *Generalizing π -regular rings*, Taiwanese J. Math. **19** (6), 1577–1592 (2015).
- [15] Nicholson W.K. *Lifting Idempotents and Exchange Rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **229**, 269–278 (1977).
- [16] Nicholson W.K. *Strongly clean rings and fitting's lemma*, Commun. Algebra **27** (8), 3583–3592 (1999).
- [17] Khurana D., Lam T.Y., Nielsen P.P. *Two-Sided Properties of Elements in Exchange Rings*, Algebras Represent. Theory **18**, 931–940 (2015).
- [18] Diesl A.J. *Nil clean rings*, J. Algebra **383**, 197–211 (2013).
- [19] Stock J. *On rings whose projective modules have the exchange property*, J. Algebra **103** (2), 437–453 (1986).
- [20] Chen J., Yang X., Zhou Y. *On Strongly Clean Matrix and Triangular Matrix Rings*, Commun. Algebra **34** (10), 3659–3674 (2006).
- [21] Hegde S. *On uniquely clean elements*, Commun. Algebra **51** (5), 1835–1839 (2023).
- [22] Khurana D., Lam T.Y., Nielsen P.P., Zhou Y. *Uniquely clean elements in rings*, Commun. Algebra **43** (5), 1742–1751 (2015).
- [23] Handelman D. *Perspectivity and cancellation in regular rings*, J. Algebra **48** (1), 1–16 (1977).
- [24] Camillo V.P., Yu H.-P. *Exchange rings, units and idempotents*, Commun. Algebra **22** (12), 4737–4749 (1994).
- [25] Nielsen P.P., Šter J. *Connections between unit-regularity, regularity, cleanness, and strong cleanness of elements and rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (3), 1759–1782 (2018).

Петер Данчев

Болгарская академия наук,
1113 София, Болгария,

e-mail: danchev@math.bas.bg, pvdanchev@yahoo.com

Араш Джаван

Университет Тарбиат Модарес,
14115-111 Тегеран, Джалаль Але Ахмад, Наср, Иран,

e-mail: a.darajavan@modares.ac.ir, a.darajavan@gmail.com

Ахмад Муссави

Университет Тарбиат Модарес,
14115-111 Тегеран, Джалаль Але Ахмад, Наср, Иран,

e-mail: moussavi.a@modares.ac.ir, mpussavi.a@gmail.com

P. Danchev, A. Javan, and A. Moussavi

On some extensions of π -regular rings

Abstract. Some variations of π -regular and nil clean rings were recently introduced in the works of the first author: “A *generalization of π -regular rings*, Turkish J. Math. **43** (2), 702–711 (2019)”, “A *symmetrization in π -regular rings*, Trans. A. Razmadze Math. Inst. **174** (3), 271–275 (2020)”, “A *symmetric generalization of π -regular rings*, Ric. Mat. **73** (1), 179–190 (2024)”. In this paper, we examine the structure and relationships between these classes of rings. Specifically, we prove that (m, n) -regularly nil clean rings are left-right symmetric and also show that the inclusions $(D$ -regularly nil clean) $\subseteq$ (regularly nil clean) $\subseteq ((m, n)$ -regularly nil clean) hold, as well as we answer Questions 1, 2 and 3 posed in the third of the above-listed works. Moreover, we also consider other similar questions concerning the symmetric properties of certain classes of rings. For example, it is proven that centrally Utumi rings are always strongly π -regular.

Keywords: strongly π -regular rings, D -regularly nil clean rings, (m, n) -regularly nil clean rings.

Peter Danchev

Bulgarian Academy of Sciences,
1113 Sofia, Bulgari,

e-mail: danchev@math.bas.bg, pvdanchev@yahoo.com

Arash Javan

Tarbiat Modares University,
14115-111 Tehran Jalal AleAhmad Nasr, Iran,

e-mail: a.darajavan@modares.ac.ir, a.darajavan@gmail.com

Ahmad Moussavi

Tarbiat Modares University,
14115-111 Tehran Jalal AleAhmad Nasr, Iran,

e-mail: moussavi.a@modares.ac.ir, mpussavi.a@gmail.com