

П. БУРАГОХАЙН, Н. САЙКЪЯ

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ КОНГРУЭНЦИИ ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННО s -РЕГУЛЯРНОЙ И t -РАЗЛИЧНОЙ ФУНКЦИИ РАЗБИЕНИЯ

Аннотация. Разбиение положительного целого числа n называется одновременно s -регулярным и t -различным, если ни одна из частей не делится на s , и части появляются менее чем t раз. Представлены новые конгруэнции для функции разбиения, являющейся одновременно s -регулярной и t -различной и обозначаемой как $M_{s,t}^d(n)$, где $(s, t) \in \{(2, 5), (3, 4), (4, 9), (5\alpha, 5\beta), (7\alpha, 7\beta), (p, p)\}$, α и β — любые положительные числа, а p — любое простое число.

Ключевые слова: s -регулярное и t -различное разбиение, конгруэнция, тождества q -ряда.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-18-21

ВВЕДЕНИЕ

Для любых комплексных чисел β и q введем стандартное обозначение:

$$(\beta; q)_{\infty} := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - \beta q^{j-1}).$$

Для краткости будем писать $\prod_{i=1}^k (\beta_i; q)_{\infty} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k; q)_{\infty}$ и $g_k := (q^k; q^k)_{\infty}$, где k — положительное целое число.

Разбиение положительного целого числа n — это невозрастающая последовательность положительных целых чисел, сумма которых равна n . Разбиение положительного целого числа n называется одновременно s -регулярным и t -различным, если ни одна из частей не делится на s , и части появляются менее чем t раз. Если через $M_{s,t}^d(n)$ обозначить число одновременно s -регулярных и t -различных разбиений n , то порождающая функция для $M_{s,t}^d(n)$ [1] задается формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{s,t}^d(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{sk})(1 - q^{tk})}{(1 - q^k)(1 - q^{stk})} = \frac{g_s g_t}{g_1 g_{st}}. \quad (1)$$

Например, $M_{2,4}^d(5) = 2$, где разбиениями являются 5 и $3 + 1 + 1$.

Рёдсет [2] доказал конгруэнцию по модулю 5 для $M_{2,2}^d(n)$. В. Кейт [3] доказал конгруэнции по модулю 2 для $M_{2,5}^d(n)$ и $M_{3,3}^d(n)$; например, он установил, что

$$M_{2,5}^d(4n + 3) \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{и} \quad M_{3,3}^d(4n + 2) \equiv 0 \pmod{2}.$$

В нашей статье мы предлагаем некоторые новые конгруэнции для $M_{s,t}^d(n)$, где $(s, t) \in \{(2, 5), (3, 4), (4, 9), (5\alpha, 5\beta), (7\alpha, 7\beta), (p, p)\}$, α и β — любые положительные числа, p — любое простое число.

1. КОНГРУЭНЦИИ ДЛЯ $M_{s,t}^d(n)$

Теорема 1. Пусть $p \geq 5$ — любое простое число. Тогда для любых целых чисел $n \geq 0$, $\alpha \geq 0$ и $1 \leq j \leq p-1$ имеем

$$M_{2,5}^d \left(4 \cdot 5^{2\alpha+3}n + \frac{5^{2\alpha+3} + 1}{6} \right) \equiv M_{2,5}^d(20n + 1) \pmod{2}, \quad (2)$$

$$M_{2,5}^d \left(20 \cdot 7^{2\alpha+2}n + \frac{5 \cdot 7^{2\alpha+2} + 1}{6} \right) \equiv M_{2,5}^d(20n + 1) \pmod{2}, \quad (3)$$

$$M_{2,5}^d \left(20 \cdot p^{2\alpha+2}n + 20 \cdot p^{2\alpha+1}j + \frac{5p^{2\alpha+2} + 1}{6} \right) \equiv 0 \pmod{2}. \quad (4)$$

Теорема 2. Пусть p — любое нечетное простое число. Тогда для любых целых чисел $n \geq 0$, $\alpha \geq 0$ и $1 \leq j \leq p-1$ имеем

$$M_{3,4}^d \left(6 \cdot p^{2\alpha+2}n + 6 \cdot p^{2\alpha+1}j + \frac{3p^{2\alpha+2} + 1}{4} \right) \equiv 0 \pmod{2}, \quad (5)$$

$$M_{3,4}^d \left(2 \cdot 3^{2\alpha+3}n + \frac{3^{2\alpha+3} + 1}{4} \right) \equiv M_{3,4}^d(6n + 1) \pmod{6}, \quad (6)$$

$$M_{3,4}^d(9n + 4) \equiv 0 \pmod{3}, \quad (7)$$

$$M_{3,4}^d(27n + 25) \equiv 0 \pmod{3}, \quad (8)$$

$$M_{3,4}^d(6n + 5) \equiv 0 \pmod{4}. \quad (9)$$

Теорема 3. Для любых целых чисел $n \geq 0$, $\alpha \geq 0$ и $j = 1, 2, 3$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{4,9}^d(3 \cdot 2^{2\alpha+1}n + 2^{2\alpha+1} + 1) q^n \equiv 3 \frac{g_3^3}{g_1} \pmod{9},$$

$$M_{4,9}^d(3 \cdot 2^{2\alpha+3}n + 5 \cdot 2^{2\alpha+2} + 1) \equiv 0 \pmod{9},$$

$$M_{4,9}^d(3 \cdot 2^{2\alpha+4}n + 5 \cdot 2^{2\alpha+3} + 1) \equiv 0 \pmod{36},$$

$$M_{4,9}^d(3 \cdot 2^{2\alpha+4}n + 7 \cdot 2^{2\alpha+2} + 1) \equiv 0 \pmod{12},$$

$$M_{4,9}^d(3 \cdot 2^{2\alpha+5}n + 3 \cdot 2^{2\alpha+3}j + 2^{2\alpha+2} + 1) \equiv 0 \pmod{12},$$

$$M_{4,9}^d(6n + 3) \equiv 0 \pmod{3},$$

$$M_{4,9}^d(6n + 5) \equiv 0 \pmod{6},$$

$$M_{4,9}^d(12n + 11) \equiv 0 \pmod{36}.$$

Теорема 4. Предположим, что $p \geq 5$ является простым числом, причем $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$. Тогда для любых целых чисел $n \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $1 \leq j \leq p-1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{4,9}^d(3 \cdot 2^{2\alpha+2}p^{2\beta}n + 2^{2\alpha+1}p^{2\beta} + 1) q^n \equiv 3g_1g_3 \pmod{9},$$

$$M_{4,9}^d \left(3 \cdot 2^{2\alpha+2} p^{2\beta+2} n + 3 \cdot 2^{2\alpha+2} p^{2\beta+1} j + 2^{2\alpha+1} p^{2\beta+2} + 1 \right) \equiv 0 \pmod{9},$$

$$M_{4,9}^d \left(3 \cdot 2^{2\alpha+3} p^{2\beta+2} n + 3 \cdot 2^{2\alpha+3} p^{2\beta+1} j + 2^{2\alpha+2} p^{2\beta+2} + 1 \right) \equiv 0 \pmod{36}.$$

Теорема 5. Для любых целых чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и простого числа p имеем

$$M_{5\alpha,5\beta}^d (5n + 4) \equiv 0 \pmod{5},$$

$$M_{7\alpha,7\beta}^d (7n + 5) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$M_{p,p}^d (n) \equiv \delta_{(p-1)^2}(n) \pmod{p},$$

где $\delta_m(n)$ означает число разбиений положительного целого числа n , в которых каждая часть имеет m различных цветов.

Доказательства конгруэнций аналогичны доказательствам многих конгруэнций в литературе и используют метод тождеств q -ряда. Как обычно, полезно отметить, что

$$g_{pm}^{p^{k-1}} \equiv g_m^{p^k} \pmod{p^k}, \quad (10)$$

где k, m — положительные целые числа и p — простое число.

Для доказательства теоремы 1 используем (1) и тождество для g_1/g_5 из [4]. Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{2,5}^d (20n + 1) q^n \equiv g_1 \pmod{2}. \quad (11)$$

Применяя ([5], (8.1.1)) в (11), получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{2,5}^d (20n + 1) q^n \equiv g_{25} (R^{-1}(q^5) - q - q^2 R(q^5)) \pmod{2}, \quad (12)$$

где $R(q) := (q, q^4; q^5)_{\infty} / (q^2, q^3; q^5)_{\infty}$. Удалив из (12) члены, включающие q^{25n+1} , разделив на q и заменив q^{25} на q , имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{2,5}^d (500n + 21) q^n \equiv g_1 \pmod{2}. \quad (13)$$

Из (11) и (13) легко получить

$$M_{2,5}^d (500n + 21) \equiv M_{2,5}^d (20n + 1) \pmod{2}. \quad (14)$$

Итерируя (14), заменяя при этом n на $25n + 1$, мы получаем (2). Аналогично конгруэнция (3) может быть доказана применением ([6], с. 303, п. 17 (v)). А конгруэнция (4) — с использованием (11) и ([7], теорема 2.2).

Доказательство (5) идентично доказательству теоремы 1 и может быть проведено согласно ([7], теорема 2.1). Конгруэнции (6)–(9) могут быть доказаны в силу тождеств (14.3.2), (14.3.3), (22.1.14) и (33.2.1) из [5] и (10).

Доказательства теорем 3–5 также являются рутинными и используют только манипуляции с подходящими тождествами q -ряда.

Авторы благодарны рецензенту, прочитавшему статью с большой внимательностью и внесшему полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Keith W.J. *A bijection for partitions simultaneously s -regular and t -distinct*, Integers **23** (#A9) (2023).
- [2] Rødseth Ø. *Dissections of the generating functions of $q(n)$ and $q_0(n)$* , Arbok Univ. Bergen Mat. Nat. (12), 3–12 (1970) (MR0434959 (55:7922)).
- [3] Keith W.J. *Partitions into Parts Simultaneously Regular, Distinct, And/or Flat*, Combinatorial and Additive Number Theory II: CANT, New York, NY, USA, 2015 and 2016. Springer Proc. Math. & Statistics, **220**.
- [4] Hirschhorn M.D., Sellers J.A. *Elementary proofs of parity results for 5-regular partitions*, Bull. Aust. Math. Soc. **81** (1), 58–63 (2010).
- [5] Hirschhorn M.D. *The Power of q , A Personal Journey*, Vol. 49, Developments in Mathematics (Springer, Cham, 2017).
- [6] Berndt B.C. *Ramanujan's Notebooks*, Part III (Springer-Verlag, New York, 1991).
- [7] Cui S.P., Gu N.S.S. *Arithmetic properties of ℓ -regular partitions*, Adv. Appl. Math. **51**, 507–523 (2013).

Пуджашри Бурагохайн

Университет Раджива Ганди,
Рано Хиллс, Доймух, Аруначал Прадеж, 791112, Индия,
e-mail: pujashree.buragohain@rgu.ac.in

Нипен Сайкья

Университет Раджива Ганди,
Рано Хиллс, Доймух, Аруначал Прадеж, 791112, Индия,
e-mail: nipennak@yahoo.com

P. Buragohain and N. Saikia

Some new congruences for simultaneously s -regular and t -distinct partition function

Abstract. A partition of a positive integer n is said to be simultaneously s -regular and t -distinct partition if none of the parts is divisible by s and parts appear fewer than t times. In this paper, we present some new congruences for simultaneously s -regular and t -distinct partition function denoted by $M_{s,t}^d(n)$ with $(s, t) \in \{(2, 5), (3, 4), (4, 9), (5\alpha, 5\beta), (7\alpha, 7\beta), (p, p)\}$, where α and β are any positive integers and p is any prime.

Keywords: s -regular and t -distinct partition, congruence, q -series identities.

Pujashree Buragohain

Rajiv Gandhi University,
Rono Hills, Doimukh, Arunachal Pradesh, 791112 India,
e-mail: pujashree.buragohain@rgu.ac.in

Nipen Saikia

Rajiv Gandhi University,
Rono Hills, Doimukh, Arunachal Pradesh, 791112 India,
e-mail: nipennak@yahoo.com