Известия вузов. Математика
2024, №10, с. 3–17

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р.К. БЕРА, Б.Л. ГОДАДРА

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Аннотация. Обсуждается скорость сходимости рационального ряда Фурье и сопряженного рационального ряда Фурье для функций обобщенной ограниченной вариации. В частности, общеизвестные теоремы Винера и Сиддики для функций p-ограниченной вариации доказаны в более общей полной рациональной ортогональной системе, а также получены результаты для более широкого класса, чем класс функций ограниченной вариации и $\{n^\alpha\}$-ограниченной вариации.

Ключевые слова: ряд Фурье, рациональный ряд Фурье, поточечная сходимость, скорость сходимости, p-Λ-ограниченная вариация.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-10-3-17

Введение

Изучение сходимости и скорости сходимости рядов Фурье периодических функций является центральной задачей в анализе Фурье, который широко применяется в обработке сигналов, сжатии изображений, сжатии данных, системах управления и многих других областях. Сходимость определяет, насколько точно аппроксимация представляет исходную функцию.

Теорема Дирихле–Жордана (см. [1] или [2], с. 57) утверждает, что ряд Фурье 2π-периодической функции f с ограниченной вариацией на интервале $[-\pi, \pi]$ сходится в каждой точке, а сходимость является равномерной на замкнутых интервалах непрерывности функции f. Позднее аналогичная теорема для сопряженного ряда Фурье была доказана в [3]. Также для рационального ряда Фурье и сопряженного рационального ряда Фурье аналогичные результаты были доказаны в [4]. Многие авторы работ ([4]–[8]) уточнили эти результаты, оценив скорость сходимости рядов Фурье, сопряженных рядов Фурье, рациональных рядов Фурье и сопряженных рациональных рядов Фурье для функций с ограниченной вариацией, а также для некоторых классов функций с обобщенной ограниченной вариацией. Для класса функций с p-ограниченной вариацией Н. Винер [9] обобщил теорему Дирихле–Жордана, а Р. Сиддики [10] обобщил теорему Янга. Мы обобщим эти результаты, найдя скорость сходимости рационального ряда Фурье и сопряженного рационального ряда Фурье для функций с p-$\{n^\alpha\}$-ограниченной вариацией.

Поступила в редакцию 29.11.2023, после доработки 29.11.2023. Принята к печати 20.03.2024.

Благодарности. Работа финансируется Советом по научным и промышленным исследованиям (CSIR), который оказал финансовую поддержку через SRF (номер файла 09/114(0233)/2019-EMR-I).

1. Предварительные сведения

Рациональная ортогональная система определяется как

$$\phi_0(e^{ix}) = 1, \quad \phi_n(e^{ix}) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}e^{ix}}{1-\bar{\alpha_n}e^{ix}} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{ix}-\alpha_k}{1-\bar{\alpha_k}e^{ix}} \tag{1}$$

и $\phi_{-n}(e^{ix}) = \overline{\phi_n(e^{ix})}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Здесь $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — комплексная последовательность такая, что α_n содержатся в открытом единичном диске $\mathbb{D}$. В дальнейшем будем предполагать выполнимость следующего условия (со значением r, указанным ниже):

$$\sup |\alpha_n| = r < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-|\alpha_n|) = \infty$, система в (1) является полной в $L^2[-\pi,\pi]$ ([11], [12]).

Замечание 1. Если $\alpha_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\{\phi_n(e^{ix})\}$ упрощается до тригонометрической системы $\{e^{inx}\}$.

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ — функция, являющаяся 2π-периодической и интегрируемой на $\mathbb{T} := [-\pi,\pi)$. Рациональный ряд Фурье функции f и сопряженный рациональный ряд Фурье функции f задаются, соответственно, формулами

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\phi_n(e^{ix}) \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)\mathrm{sgn}(n)c_n\phi_n(e^{ix}),$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\overline{\phi_n(e^{iu})}du, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

n-я симметричная частичная сумма рационального ряда Фурье и сопряженного рационального ряда Фурье функции f обозначаются, соответственно, через $S_n^r(f,x)$ и $\tilde{S}_n^r(f,x)$ и задаются формулами

$$S_n^r(f,x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j\phi_j(e^{ix}) \;\text{ и }\; \tilde{S}_n^r(f,x) = \sum_{j=-n}^{n} (-i)\mathrm{sgn}(j)c_j\phi_j(e^{ix}), \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{4}$$

В частности, для случая $r = 0$ имеем $S_n^0(f,x) := S_n(f,x)$ и $\tilde{S}_n^0(f,x) := \tilde{S}_n(f,x)$.

Определение 2. Даны функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ неубывающих положительных чисел такая, что $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ расходится, и вещественное число p, $1 \le p < \infty$. Мы говорим, что $f \in \Lambda\,\mathrm{BV}^p[a,b]$ (т. е. f имеет p-Λ-ограниченную вариацию на $[a,b]$), если

$$V_{p\Lambda}(f,[a,b]) = \sup\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(a_k)-f(b_k)|^p}{\lambda_k}\right)^{1/p}\right\} < \infty,$$

где супремум берется по всем последовательностям $\{I_k\}$ непересекающихся интервалов $I_k = [a_k,b_k] \subset [a,b]$, $k = 1,\ldots,n$.

Если $\Lambda = \{n^\alpha\}$, $0 \le \alpha < 1$, то этот класс обозначается как $(n^\alpha)\mathrm{BV}^p$, а вариация для любой функции f в этом классе обозначается как $V_{pn^\alpha}(f,[a,b])$. Если $\Lambda = \{n^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, и $p = 1$, то этот класс обозначается как $(n^\alpha)\mathrm{BV}$, а вариация для любой функции f в этом классе обозначается как $V_{n^\alpha}(f,[a,b])$. Если $\Lambda = \{1\}$ и $p = 1$, то этот класс называется классом функций ограниченной вариации (BV), и вариация любой функции $f \in \mathrm{BV}$ обозначается как $V(f,[a,b])$. Если $\Lambda = \{1\}$, то этот класс называется классом функций с p-ограниченной вариацией (BV^p), и вариация любой функции $f \in \mathrm{BV}^p$ обозначается как $V_p(f,[a,b])$.

Отметим, что если функция f принадлежит классу p-Λ-ограниченной вариации, то $f(x+0)$ и $f(x-0)$ существуют в каждой точке x на отрезке $[a,b]$ (см. [13], теорема 2). Также напомним следующую лемму (см. [14], лемма 2.2).

Лемма. *Если функция f принадлежит классу p-Λ-ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, то*

a) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} V_{p\Lambda}(f,[a,a+\delta]) = |f(a)-f(a+0)|/\lambda_1^{1/p}$,

b) $\lim\limits_{\delta\to 0^+} V_{p\Lambda}(f,[b-\delta,b]) = |f(b)-f(b-0)|/\lambda_1^{1/p}$.

Мы будем использовать следующие обозначения:

$$s(f,x) = \frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} \ \text{ для } \ x \in \bar{\mathbb{T}}, \tag{5}$$

$$\phi_x(t) = \begin{cases} f(x+t)+f(x-t)-2s(f,x), & t \in (0,\pi]; \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

$$\varphi_x(t) = f(x+t)-f(x-t) \ \text{ для } \ x,t \in \bar{\mathbb{T}},$$

$$\phi'_x(t) = \begin{cases} f(x-t)-s(f,x), & \text{если } \ t \in \mathbb{T}\setminus\{0\}; \\ 0, & \text{если } \ t = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$\varphi'_x(t) = \begin{cases} f(x-t), & \text{если } \ t \in \mathbb{T}\setminus\{0\}; \\ f(x), & \text{если } \ t = 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$V_{n^\alpha}(f,a) := V_{n^\alpha}(f,[a,0]),\, V_{n^\alpha}(f,b) := V_{n^\alpha}(f,[0,b]) \ \text{ для } \ a<0<b,$$

$$V_{pn^\alpha}(f,a) := V_{pn^\alpha}(f,[a,0]), V_{pn^\alpha}(f,b) := V_{pn^\alpha}(f,[0,b]) \ \text{ для } \ a<0<b,$$

$$I_{j,n} = [\eta_{j,n}, \eta_{j+1,n}]\,, \ \ \eta_{j,n} = \frac{j\pi}{n+1}, \ \ j = 0,1,2\dots n; \ \ n = 0,1,2,\dots,$$

$$\operatorname{osc}(f,[a,b]) = \sup\{|f(t)-f(t')| : t,t' \in [a,b]\}.$$

К. Жордан [1] доказал следующую теорему, касающуюся поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 1. *Если f является 2π-периодической функцией и имеет ограниченную вариацию на $\bar{\mathbb{T}}$, то ее ряд Фурье сходится к $s(f,x)$ в каждой точке x.*

Р. Боянич [5] уточнил теорему 1, оценив скорость сходимости ряда Фурье. Им доказана следующая

Теорема 2. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, то для всех x и n выполняется*

$$|S_n(f,x)-s(f,x)| \le \frac{3}{n}\sum_{j=1}^{n} V\left(\phi_x, \left[0,\frac{\pi}{j}\right]\right).$$

Аналогичные результаты доказаны для сопряженных тригонометрических рядов Фурье. Для этого напомним следующую теорему ([2], теорема (3.1), IV).

Теорема 3. *Если $f \in L^1(\bar{\mathbb{T}})$, то*

$$\tilde{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi_x(t)}{2\tan(t/2)}dt = -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^\pi \frac{\varphi_x(t)}{2\tan(t/2)}dt$$

существует почти для всех x.

Для сопряженных рядов Фурье В. Янгом [3] доказана

Теорема 4. *Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 1, то ее сопряженный ряд Фурье сходится к $\tilde{f}(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{T}$, в которой $\tilde{f}(x)$ существует.*

С. Мазхар и А. Аль-Будайви [8] конкретизировали теорему 4, оценив скорость сходимости сопряженного ряда Фурье функции с ограниченной вариацией.

Теорема 5. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 1, то для всех x и n имеем*

$$\left|\tilde{S}_n(f,x) - \tilde{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{3.3}{n}\sum_{j=1}^{n} V\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{j}\right]\right),$$

где

$$\tilde{f}(x,\epsilon) = -\frac{1}{\pi}\int_\epsilon^\pi \frac{\varphi_x(t)}{2\tan(t/2)}dt. \tag{8}$$

Л. Тан и Т. Цянь [4] доказали, что теоремы 1 и 4 верны для рациональных рядов Фурье и сопряженных рациональных рядов Фурье соответственно. Они также оценили скорость сходимости рациональных рядов Фурье и сопряженных рациональных рядов Фурье, доказав следующую теорему.

Теорема 6. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 1, то для всех x и n имеем*

$$|S_n^r(f,x) - s(f,x)| \leq \frac{3(1+r)}{n(1-r)}\sum_{j=1}^{n} V\left(\phi'_x, \left[-\frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{j}\right]\right)$$

и

$$\left|\tilde{S}_n^r(f,x) - \tilde{f}\left(x, \frac{\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{2(1+r)}{n(1-r)}\sum_{j=1}^{n} V\left(\varphi'_x, \left[-\frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{j}\right]\right),$$

где $s(f,x)$, $\phi'_x(t)$ и $\tilde{f}(x,\epsilon)$ такие же, как и в (5), (6) и (8) соответственно.

Н. Винер [9] доказал, что теорема 1 верна, а также Р. Сиддики [10] доказал, что теорема 4 верна, если условие «f имеет ограниченную вариацию» заменить на условие «f имеет p-ограниченную вариацию» для любого $1 \leq p < \infty$.

Кроме того, Р. Божанич и Д. Уотерман [6] обобщили теоремы 1 и 2 на функции определенных классов обобщенной ограниченной вариации ((n^α)BV). Их результат (включая леммы 1 и 2) выглядит следующим образом.

Теорема 7. *Если функция f является 2π-периодической и принадлежит классу $(n^\alpha)\mathrm{BV}(\bar{\mathbb{T}})$, где $0 < \alpha < 1$, то для всех x и n выполняется*

$$|S_n(f,x) - s(f,x)| \leq \frac{2(2-\alpha)}{(n+1)^{1-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^\alpha}V_{n^\alpha}\left(\phi_x, \frac{\pi}{j}\right).$$

Недавно Х. Хачар и Р. Вьяс [7] доказали следующий результат (включая теорему 1, теорему 2, следствие 2 и следствие 4):

Теорема 8. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 7, то*

$$|S_n^r(f,x)-s(f,x)|\le\frac{2(2-\alpha)}{(n+1)^{1-\alpha}}\frac{(1+r)}{(1-r)}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{\alpha}}\left[V_{n^\alpha}\left(\phi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)+V_{n^\alpha}\left(\phi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right]$$

и

$$\left|\tilde{S_n^r}(f,x)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n+1}\right)\right|\le\frac{2(2-\alpha)}{(n+1)^{1-\alpha}}\frac{1+r}{1-r}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{\alpha}}\left[V_{n^\alpha}\left(\varphi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)+V_{n^\alpha}\left(\varphi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right],$$

где $s(f,x)$, $\phi'_x(t)$, $\varphi'_x(t)$ и $\tilde{f}(x,\epsilon)$ такие же, как и в (5)–(8) соответственно.

2. Основные результаты

В этой статье мы доказали следующие теоремы для рациональных рядов Фурье и сопряженных рациональных рядов Фурье.

Теорема 9. *Если f — 2π-периодическая функция и f принадлежит классу $(n^\alpha)\mathrm{BV}^p(\bar{\mathbb{T}})$, где $0\le\alpha<1$, $1\le p<\infty$, $1-\alpha p\ge 0$, то для всех x и n имеет место*

$$|S_n^r(f,x)-s(f,x)|\le C_{p,r}\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\right)^{1/p}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V_{pn^\alpha}^{p}\left(\phi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V_{pn^\alpha}^{p}\left(\phi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\right\},\tag{9}$$

где $C_{p,r}=\left(\frac{2^{1/p}}{\pi}+\frac{2(1+r)}{1-r}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}$.

Теорема 10. *Если f удовлетворяет условиям теоремы 9, то для всех x и n имеем*

$$\left|\tilde{S_n^r}(f,x)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n+1}\right)\right|\le C_{p,r}\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\right)^{1/p}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V_{pn^\alpha}^{p}\left(\varphi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V_{pn^\alpha}^{p}\left(\varphi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\right\},\tag{10}$$

где $C_{p,r}=\left(\frac{2^{1/p}}{\pi}+\frac{2(1+r)}{1-r}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}$.

Правая часть (9)–(10) стремится к нулю при $n\to\infty$, если функции $\phi'_x(t)$ и $\varphi'_x(t)$ непрерывны в точке $t=0$.

Замечание 2. Наши теоремы 9 и 10 являются аналогами теоремы 8, применимыми для более широкого класса функций $(n^\alpha)\mathrm{BV}^p$. В частном случае для $\alpha=0$ теоремы 9 и 10 являются аналогами теоремы 6, которые можно рассматривать как аналоги теорем Винера и Сиддики, соответственно, для рациональных рядов Фурье и количественных версий этих теорем.

В частности, для тригонометрического случая мы имеем

Следствие 1. Если f удовлетворяет условиям теоремы 9, то для всех x и n

$$|S_n(f,x)-s(f,x)| \le C_{p,0}\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\right)^{1/p}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\right\}, \tag{11}$$

и

$$\left|\tilde{S_n}(f,x)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n+1}\right)\right| \le C_{p,0}\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\right)^{1/p}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\right\}, \tag{12}$$

где $C_{p,0}=\left(\dfrac{2^{1/p}}{\pi}+2\right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}$.

Фактически, для случая тригонометрических рядов небольшое изменение доказательств теорем 9 и 10 дает утверждение, обеспечивающее более лучшие результаты по сравнению со следствием 1.

Следствие 2. Если f удовлетворяет условиям теоремы 9, то для всех x и n имеем

$$|S_n(f,x)-s(f,x)| \le C_p\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p} \tag{13}$$

и

$$\left|\tilde{S_n}(f,x)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n+1}\right)\right| \le C_p\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}, \tag{14}$$

где $C_p=\left(\dfrac{2^{1/p}+1+\pi}{\pi}\right)\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}$.

Правая часть (13) сходится к нулю при $n\to\infty$, поскольку непрерывность $\phi_x(t)$ в $t=0$ влечет за собой, что $V_{pn^\alpha}(f,[0,a])$ стремится к нулю при $a\to 0^+$ (см. лемму 1). Правая часть (14) сходится к нулю при $n\to\infty$, если $\varphi_x(t)$ непрерывна в $t=0$.

Замечание 3. Наше следствие 2 является аналогом теоремы 7 для функций из класса $(n^\alpha)\mathrm{BV}^p$. В частности, при $\alpha=0$ следствие 2 является аналогом с p-ограниченной вариацией для теорем 2 и 5, что может быть осмысленно как количественная версия теорем Винера и Сиддики.

Замечание 4. Заметим, что для сходимости правой части выражения (11) нам необходимо предположить непрерывность $\phi'_x(t)$ в точке $t=0$. Таким образом, по определению $\phi'_x(t)$ мы должны предположить, что $f(x+0)=f(x-0)$. Однако, так как $\phi_x(t)$ автоматически непрерывна в точке $t=0$, правая часть выражения (13) сходится к нулю. Также известно, что

$$V^p_{pn^\alpha}\left(\phi_x, \left[0, \frac{\pi}{j}\right]\right) \leq V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x, \left[-\frac{\pi}{j}, 0\right]\right) + V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x, \left[0, \frac{\pi}{j}\right]\right).$$

Используя указанное неравенство и тот факт, что $(a+b)^q \leq a^q+b^q$ для любых $a,b\in\mathbb{R}^+$ и $0\leq q<1$ (см. [15], с. 16), в правой части неравенства (13) получаем

$$C_p\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}} V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi_x, \left[0, \frac{\pi}{j}\right]\right)\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C_p\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\right)^{1/p}\left\{\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}} V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x, \left[-\frac{\pi}{j}, 0\right]\right)\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}} V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x, \left[0, \frac{\pi}{j}\right]\right)\right)^{1/p}\right\}.$$

Далее, по определению C_p и $C_{p,0}$ имеем $C_p \leq C_{p,0}$. Таким образом, наше оценочное выражение (13) в следствии 2 является более точным, чем оценка (11) в следствии 1. Аналогично можно утверждать, что оценка (14) в следствии 2 является более точной, чем оценка (12) в следствии 1.

3. Доказательства

Доказательство теоремы 9. Используя (3), для фиксированных $n\in\mathbb{N}$ и $x\in\bar{\mathbb{T}}$ частичная сумма рационального ряда Фурье, как в (4), может быть записана в интегральной форме следующим образом:

$$S^r_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(x-t,x)dt,$$

где $D_n(t,x)$ — это рациональное ядро Дирихле, которое определяется как

$$D_n(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \overline{\phi_k(e^{it})}\phi_k(e^{ix}). \tag{15}$$

Также, поскольку система $\{\phi_k(e^{ix})\}_{k=1}^\infty$ является ортогональной на $\bar{\mathbb{T}}$, имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t,x)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\phi_k(e^{i(x-t)})}dt\right]\phi_k(e^{ix}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\phi_k(e^{it})}dt\right]\phi_k(e^{ix}) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}\overline{\phi_0(e^{it})}dt\right]\phi_0(e^{ix}) = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.$$

Теперь

$$S^r_n(f,x) - s(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)-s(f,x))D_n(x-t,x)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x-t)-s(f,x))D_n(x-t,x)dt=\frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\right)\phi_x'(t)D_n(x-t,x)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(x-t)-s(f,x))D_n(x-t,x)dt=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3. \qquad (16)$$

По определению $\phi_k(e^{ix})$ можем записать

$$|\phi_k(e^{ix})|=\left|\frac{\sqrt{1-|\alpha_k|^2}e^{ix}}{1-\bar{\alpha_k}e^{ix}}\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{ix}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{ix}}\right|=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha_k}e^{ix}|^2}\prod_{j=1}^{k}\left|\frac{e^{ix}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{ix}}\right|^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha_k}e^{ix})(1-\alpha_k e^{-ix})}\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{ix}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{ix}}\frac{e^{-ix}-\bar{\alpha_j}}{1-\alpha_j e^{-ix}}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{(1-\bar{\alpha_k}e^{ix}-\alpha_k e^{-ix}+|\alpha_k|^2)}\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{ix}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{ix}}\frac{e^{-ix}}{e^{-ix}}\frac{e^{ix}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{ix}}\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha_k}e^{ix}-\alpha_k e^{-ix}+|\alpha_k|^2}\right)^{1/2}. \qquad (17)$$

Используя (2), для $\alpha_k=|\alpha_k|e^{ia_k}$, $k\in\mathbb{N}$, получаем $1-|\alpha_k|^2\le 1-r^2$ и

$$1-\bar{\alpha_k}e^{ix}-\alpha_k e^{-ix}+|\alpha_k|^2=1-|\alpha_k|e^{i(x-a_k)}-|\alpha_k|e^{-i(x-a_k)}+|\alpha_k|^2=$$

$$=1-2|\alpha_k|\cos(x-a_k)+|\alpha_k|^2\ge 1-2|\alpha_k|+|\alpha_k|^2=(1-|\alpha_k|)^2\ge(1-r)^2. \qquad (18)$$

Поэтому в силу (17) и (18)

$$|D_n(x-t,x)|\le\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}|\overline{\phi_k(e^{i(x-t)})}||\phi_k(e^{ix})|\le\frac{1+r}{1-r}\left(n+\frac{1}{2}\right). \qquad (19)$$

Ввиду неравенства (19) становится очевидно, что

$$|\mathrm{I}_1|\le\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}|\phi_x'(t)||D_n(x-t,x)|dt\le\frac{1}{\pi}\frac{1+r}{1-r}\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{0}^{\frac{\pi}{n+1}}|\phi_x'(t)-\phi_x'(0)|dt\le$$

$$\le\frac{1+r}{1-r}V_{pn^{\alpha}}\left(\phi_x',\frac{\pi}{n+1}\right). \qquad (20)$$

Теперь для $\alpha_j=|\alpha_j|e^{ia_j}$, $j\in\mathbb{N}$, $|\alpha_j|<1$, существует монотонная возрастающая и дифференцируемая функция ([16], раздел 3)

$$\theta_j(t)=\int_{0}^{t}\frac{1-|\alpha_j|^2}{1-2|\alpha_j|\cos(x-a_j)+|\alpha_j|^2}dx$$

такая, что

$$\frac{e^{it}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{it}}=e^{i\theta_j(t)}.$$

Также имеем

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{it}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{it}}\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{-ix}-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j e^{-ix}}=\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{it}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{it}}\frac{e^{-ix}-\overline{\alpha_j}}{1-\alpha_j e^{-ix}}=$$

$$= \prod_{j=1}^{n} e^{i\theta_j(t)} e^{-i\theta_j(x)} = e^{-i\left[\sum\limits_{j=1}^{n}(\theta_j(x)-\theta_j(t))\right]}.$$

Тогда по принципу математической индукции, обозначив $B_n(e^{it}) = \prod\limits_{j=1}^{n} \dfrac{e^{it}-\alpha_j}{1-\bar{\alpha_j}e^{it}}$ (см. [4], лемма 2.1), мы легко можем доказать, что

$$D_n(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \overline{\phi_k(e^{it})}\phi_k(e^{ix}) = \frac{1}{2}\frac{B_n(e^{it})\overline{B_n(e^{ix})} - e^{i(x-t)}\overline{B_n(e^{it})}B_n(e^{ix})}{1-e^{i(x-t)}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-e^{i(x-t)})}\left(e^{-i\left[\sum\limits_{j=1}^{n}(\theta_j(x)-\theta_j(t))\right]} - e^{i(x-t)}e^{i\left[\sum\limits_{j=1}^{n}(\theta_j(x)-\theta_j(t))\right]}\right) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{x-t}{2}+\theta_n(t,x)\right)}{\sin\frac{x-t}{2}}, \tag{21}$$

где

$$\theta_n(t,x) = \sum_{j=1}^{n}(\theta_j(x)-\theta_j(t)) = \sum_{j=1}^{n}\int_t^x \frac{1-|\alpha_j|^2}{1-2|\alpha_j|\cos(y-a_j)+|\alpha_j|^2}dy.$$

Следовательно,

$$|D_n(x-t,x)| \le \frac{|\sin((t/2)+\theta_n(x-t,x))|}{2|\sin(t/2)|} \le \frac{1}{t} \quad \text{для } 0<t<\pi. \tag{22}$$

Поскольку $\eta_{j,n} = \dfrac{j\pi}{n+1}$, мы можем разложить I_2 на две части следующим образом:

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{I_{j,n}}(\phi'_x(t)-\phi'_x(\eta_{j,n}))D_n(x-t,x)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\int_{I_{j,n}}\phi'_x(\eta_{j,n})D_n(x-t,x)dt = \frac{1}{\pi}(\mathrm{I}_{21}+\mathrm{I}_{22}). \tag{23}$$

Используя неравенство (22), получаем $\displaystyle\int_{I_{j,n}}|D_n(x-t,x)|dt \le \frac{1}{j}$ для $j=1,2,\ldots,n$ и неравенство Гёльдера. Имеем

$$|\mathrm{I}_{21}| \le \sum_{j=1}^{n}\mathrm{osc}(\phi'_x, I_{j,n})\int_{I_{j,n}}|D_n(x-t,x)|dt \le \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2}}\mathrm{osc}(\phi'_x, I_{j,n}) \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^{1/p^2}}\mathrm{osc}(\phi'_x, I_{j,n})\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^{1-1/p^2}}\right)^{\frac{1}{1-1/p}}\right)^{1-1/p} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1/p}}\left(\mathrm{osc}(\phi'_x, I_{j,n})\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \tag{24}$$

В силу формулы для частичных сумм

$$\mathrm{I}_{22} = \sum_{j=1}^{n}\phi'_x(\eta_{j,n})\int_{I_{j,n}}D_n(x-t,x)dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(\phi'_x(\eta_{j,n}) - \phi'_x(\eta_{j-1,n}))\left(\sum_{k=j}^{n}\int_{I_{k,n}} D_n(x-t)dt\right) + \phi'_x(\eta_{0,n})\left(\sum_{k=1}^{n}\int_{I_{k,n}} D_n(x-t,x)dt\right) -$$

$$-\phi'_x(\eta_{0,n})\left(\int_{\eta_{n+1,n}}^{\pi} D_n(x-t,x)dt\right) = \sum_{j=1}^{n}(\phi'_x(\eta_{j,n}) - \phi'_x(\eta_{j-1,n}))\left(\int_{\eta_{j,n}}^{\pi} D_n(x-t,x)dt\right), \quad (25)$$

так как $\phi_x(\eta_{0,n}) = \phi_x(0) = 0$ и $\displaystyle\int_{\eta_{n+1,n}}^{\pi} D_n(t)dt = 0$.

Также для $0 < y \le \xi \le \pi$ согласно второй теореме о среднем имеем

$$\int_y^{\pi} D_n(x-t,x)dt = \int_y^{\pi} \frac{\sin((t/2) + \theta_n(x-t,x))}{2\sin(t/2)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_y^{\pi}\cos(\theta_n(x-t,x))dt + \int_y^{\pi}\frac{\sin(\theta_n(x-t,x))}{2\tan(t/2)}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_y^{\pi}\cos(\theta_n(x-t,x))dt + \frac{1}{2\tan(y/2)}\int_y^{\xi}\sin(\theta_n(x-t,x))dt. \quad (26)$$

Поскольку

$$\left|\int_y^{\pi} e^{\pm i\theta_n(x-t,x)}dt\right| \le \frac{(1+r)\pi}{(1-r)n}$$

для $0 < y < \pi$ (см. [4], лемма 2.2), получаем

$$\left|\int_y^{\pi} D_n(x-t,x)dt\right| \le \frac{(1+r)\pi}{(1-r)n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{y}\right) \le \frac{(1+r)\pi^2}{2(1-r)ny}. \quad (27)$$

Следовательно,

$$\left|\int_{\eta_{j,n}}^{\pi} D_n(x-t,x)dt\right| \le \frac{1+r}{1-r}\frac{\pi}{j}. \quad (28)$$

Итак, используя (25), (28) и применяя неравенство Гёльдера к сумме интегралов в I_{22}, мы можем получить

$$|\mathrm{I}_{22}| \le \pi\frac{1+r}{1-r}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p^2+1/p^2}}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j-1,n}) \le$$

$$\le \pi\frac{1+r}{1-r}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^{1/p^2}}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j-1,n})\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^{1-1/p^2}}\right)^{\frac{1}{1-1/p}}\right)^{1-1/p} =$$

$$= \pi\frac{1+r}{1-r}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^{1/p}}\left(\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \quad (29)$$

Следовательно, из (23), (24) и (29) имеем

$$\mathrm{I}_2 \le \left(\frac{2^{1/p}}{\pi} + \frac{1+r}{1-r}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1/p}}\left(\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})\right)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \quad (30)$$

Определим теперь

$$a_0 = 0 \ \text{ и } \ a_j = V^p_{pn^\alpha}(\phi'_x, \eta_{j,n}), \quad j = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Сначала заметим, что для $p \geq 1$, очевидно, выполняется

$$\frac{1}{(j+1)^\alpha}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})^p + \sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{(i+1)^\alpha}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})^p \leq a_{j+1} \implies$$

$$\implies \frac{1}{(j+1)^\alpha}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})^p + a_j \leq a_{j+1} \implies \frac{1}{(j+1)^\alpha}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})^p \leq a_{j+1} - a_j. \tag{31}$$

Так как $1 - \alpha p \geq 0 \implies \dfrac{1}{p} \geq \alpha$, то используя формулу для частичных сумм, получаем

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1/p-\alpha}}\frac{1}{(j+1)^\alpha}\operatorname{osc}(\phi'_x, I_{j,n})^p \leq \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{(j+1)^{1/p-\alpha}}(a_{j+1} - a_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(j+1)^{1/p-\alpha}} - \frac{1}{(j+2)^{1/p-\alpha}}\right)a_{j+1} + \frac{1}{(n+1)^{1/p-\alpha}}a_{n+1}.$$

Поскольку функция $V^p_{pn^\alpha}(\phi'_x, [0,t])$ является неубывающей при $t \in [0, \pi]$, имеем

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{(j+1)^{1/p-\alpha}} - \frac{1}{(j+2)^{1/p-\alpha}}\right)a_{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1}a_{j+1}(1/p-\alpha)\int_{j+1}^{j+2}\frac{1}{t^{1+1/p-\alpha}}dt \leq$$

$$\leq (1/p-\alpha)\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j+1}^{j+2}\frac{a_t}{t^{1+1/p-\alpha}}dt. \tag{32}$$

Заменяя теперь переменную t на $\dfrac{n+1}{s}$, получаем $t \to 1 \iff s \to n+1$, $t \to n+1 \iff s \to 1$ и $\dfrac{dt}{ds} = (-1)\dfrac{n+1}{s^2}$. Следовательно,

$$\int_1^{n+1}\frac{a_t}{t^{1+1/p-\alpha}}dt = \frac{1}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{j+1}^{j+2}a_{\frac{n+1}{s}}\left(\frac{1}{s^{1-1/p+\alpha}}\right)ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^{1-1/p+\alpha}}a_{\frac{n+1}{j+1}}\int_{j+1}^{j+2}ds =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x, \frac{\pi}{j+1}\right). \tag{33}$$

Также

$$\frac{1}{(n+1)^{1/p-\alpha}}a_{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{(j+1)^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x, \frac{\pi}{j+1}\right). \tag{34}$$

Отсюда и из (30)–(34) получаем

$$|I_2| \leq \left(\frac{2^{1/p}}{\pi} + \frac{1+r}{1-r}\right)\left(\frac{(1+1/p-\alpha)}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x, \frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}, \tag{35}$$

а также

$$V_{pn^\alpha}\left(\phi'_x,\frac{\pi}{n+1}\right)\le\frac{1+r}{1-r}\left(\frac{(1+1/p-\alpha)}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \tag{36}$$

Аналогично можно сделать следующую оценку:

$$I_3\le\left(\frac{2^{1/p}}{\pi}+2\frac{1+r}{1-r}\right)\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\phi'_x,-\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \tag{37}$$

Итак, из (16), (20) и (35)–(37) мы выводим (9). Доказательство теоремы 9 завершено. □

Доказательство теоремы 10. Для фиксированных $n\in\mathbb{N}$ и $x\in\bar{\mathbb{T}}$, используя (3), частичная сумма сопряженного рационального ряда Фурье в(4) может быть записана как

$$\tilde{S^r_n}(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\tilde{D_n}(x-t,x)dt,$$

где

$$\tilde{D_n}(t,x)=\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(-i)\mathrm{sgn}(k)\overline{\phi_k(e^{it})}\phi_k(e^{ix}), \tag{38}$$

а продолжая аналогично (21), можем получить

$$\tilde{D_n}(x-t,x)=\frac{\cos(t/2)-\cos[(t/2)+\theta_n(x-t,x)]}{2\sin(t/2)}. \tag{39}$$

Теперь

$$\begin{aligned}\tilde{S^r_n}(f,x)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n+1}\right)&=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_0^{\pi}f(x-t)\tilde{D_n}(x-t,x)dt+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}dt\right\}+\\&+\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}f(x-t)\tilde{D_n}(x-t,x)dt+\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{n+1}}\frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}dt\right\}=\\&=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}f(x-t)\tilde{D_n}(x-t,x)dt+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{f(x-t)\cos\left[(t/2)+\theta_n(x-t,x)\right]}{2\sin\left(t/2\right)}dt\right\}+\\&+\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}f(x-t)\tilde{D_n}(x-t,x)dt+\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{n+1}}\frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}dt\right\}=\mathrm{J}_1+\mathrm{J}_2.\end{aligned} \tag{40}$$

Используя неравенство

$$|\tilde{D_n}(x-t,x)|\le\frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{-1}|\overline{\phi_k(e^{i(x-t)})}||\phi_k(e^{ix})|+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|\overline{\phi_k(e^{it})}||\phi_k(e^{ix})|\le\frac{1+r}{1-r}n, \tag{41}$$

а также следующее из (39) неравенство

$$\left|\frac{\cos\left[(t/2)+\theta_n(x-t,x)\right]}{2\sin(t/2)}\right|\le\frac{1}{t}\ \text{ для }\ 0<t<\pi, \tag{42}$$

аналогично (26)–(28) получаем

$$\left|\int_{\eta_{j,n}}^{\pi}\frac{\cos\left[(t/2)+\theta_n(x-t,x)\right]}{2\sin\left(t/2\right)}dt\right|\le\frac{(1+r)\pi}{(1-r)j}. \tag{43}$$

Используя (41)–(43) вместо (19), (22) и (28) и рассуждая аналогично доказательству теоремы 9, имеем

$$\mathrm{J}_1 \le \left(\frac{2^{1/p}}{\pi} + 2\frac{1+r}{1-r}\right)\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x, \frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}$$

и

$$\mathrm{J}_2 \le \left(\frac{2^{1/p}}{\pi} + 2\frac{1+r}{1-r}\right)\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x, -\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}.$$

Следовательно,

$$|\mathrm{J}_1| + |\mathrm{J}_2| \le C_{p,r}\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\right)^{1/p}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x, -\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^p_{pn^\alpha}\left(\varphi'_x, \frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\right\}. \tag{44}$$

Из (40) и (44) выводим (10). Доказательство завершено. □

Доказательство следствия 2. В тригонометрическом случае $\alpha_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, и из (2) получаем $r = 0$, ядро Дирихле, определенное формулой (15) в доказательстве теоремы 9, имеет вид

$$D_n(x-t, x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}\overline{e^{ik(x-t)}}e^{ikx} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}e^{ikt}, \tag{45}$$

а сопряженное ядро Дирихле, определенное формулой (38) в доказательстве теоремы 10, имеет вид

$$\tilde{D_n}(x-t, x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(-i)\mathrm{sgn}(k)\overline{e^{ik(x-t)}}e^{ikx} = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n}(-i)\mathrm{sgn}(k)e^{ikt} = \frac{\cos(1/2)t - \cos(n+1/2)t}{2\sin(1/2)t} \tag{46}$$

для фиксированных n и $x, t \in \bar{\mathbb{T}}$.

Поскольку $D_n(x-t, x) = D_n(x+t, x)$ (см. (45)), ввиду (16) мы можем записать разность n-й симметричной частичной суммы ($S^0_n(f, x) := S_n(f, x)$) и $s(f, x)$ в интегральной форме:

$$S_n(f, x) - s(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi_x(t)D_n(x-t, x)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} + \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\right)\phi_x(t)D_n(x-t, x)dt =$$

$$= \mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2. \tag{47}$$

Рассуждая теперь аналогично рассмотрению величин I_1 и I_2 в доказательстве теоремы 9, мы можем получить следующее неравенство:

$$\mathrm{K}_1 + \mathrm{K}_2 \le V_{pn^\alpha}\left(\phi_x, \frac{\pi}{n+1}\right) +$$

$$+\left(\frac{2^{1/p}}{\pi}+1\right)\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^{p}_{pn^{\alpha}}\left(\phi_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \tag{48}$$

Из (47), (48) аналогично (36) получаем (13).

Теперь для второй части следствия 2 ввиду равенства $\tilde{D}_n(x-t,x)=-\tilde{D}_n(x+t,x)$ (см. (46)) и представления (40) имеем

$$\tilde{S}_n(f,x)-\tilde{f}\left(x,\frac{\pi}{n+1}\right)=\frac{1}{\pi}\left\{-\int_0^{\pi}f(x-t)\tilde{D}_n(x-t,x)dt+\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}dt\right\}+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0}f(x-t)\tilde{D}_n(x-t,x)dt+\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{n+1}}\frac{f(x-t)}{2\tan(t/2)}dt\right\}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\frac{\varphi_x(t)}{2\sin t/2}(\cos t/2-\cos(n+1/2)t)dt-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi}\frac{\varphi_x(t)\cos(n+1/2)t}{2\sin t/2}\,dt=\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2. \tag{49}$$

Продолжая аналогично рассмотрению величины J_1 в доказательстве теоремы 10, получаем

$$\mathrm{L}_1+\mathrm{L}_2\le\left(\frac{2^{1/p}}{\pi}+2\right)\left(\frac{1+1/p-\alpha}{(n+1)^{1/p-\alpha}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1-1/p+\alpha}}V^{p}_{pn^{\alpha}}\left(\varphi_x,\frac{\pi}{j}\right)\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^{1+1/p}}\right)^{1-1/p}. \tag{50}$$

Из (49) и (50) имеем (14). Доказательство следствия 2 завершено. □

Литература

[1] Jordan C. *Sur la séries de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris. **92**, 228–230 (1881).

[2] Zygmund A. *Trigonometric series,* V. I (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959).

[3] Young W.H. *Konvergenzbedingungen für die verwandte Reihe einer Fourierschen Reihe*, Munch. Ber. (41), 361–371 (1911).

[4] Tan L., Qian T. *On convergence of rational Fourier series of functions of bounded variations*, Sci. Sin. Math. **43** (6), 541–550 (2013).

[5] Bojanić R. *An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **26** (40), 57–60 (1979).

[6] Bojanić R., Waterman D. *On the rate of convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Akad. Nauka Umjet. Bosne Hercegov. Rad. Odjelj. Prirod. Mat. Nauka. **22**, 5–11 (1983).

[7] Khachar H.J., Vyas R.G. *Rate of convergence for rational and conjugate rational Fourier series of functions of generalized bounded variation*, Acta Comm. Univ. Tartuensis Math. **26** (2), 233–241 (2022).

[8] Mazhar S.M., Al-Budaiwi A. *An estimate of the rate of convergence of the conjugate Fourier series of functions of bounded variation*, Acta Math. Hungarica **49**, 377–380 (1987).

[9] Wiener N. *The Quadratic Variation of a Function and its Fourier Coefficients*, Mass. J. Math. (3), 72–94 (1924).

[10] Siddiqi R.N. *On convergence of the conjugate Fourier series of a function of Wiener's class*, Bull. Australian Math. Soc. **39** (3), 335–338 (1989).

[11] Bultheel A., Gonzàlez-Vera P., Hendriksen E., Njastad O. *Orthogonal rational functions* (Cambridge Univ. Press, 1999).

[12] Ninness B., Gustafsson F. *A unifying construction of orthonormal bases for system identification*, IEEE Transactions on Automatic Control **42** (4), 515–521 (1997).

[13] Vyas R.G. *Properties of functions of generalized bounded variation*, Math. Anal., Approx. Theory and Their Appl., 715–741 (2016).

[14] Hormozi M., Ledari A., Prus-Wisniowski F. *On p-Λ-bounded variation*, Bull. Iran. Math. Soc. **37** (4), 35–49 (2011).

[15] Bari N.K. *A treatise on trigonometric series,* V. I (Newyork: Pergamon, 1964).
[16] Garnett J.B. *Bounded Analytic Functions* (Academic Press, 1981).

Рамешбхаи Каршанбхаи Бера

Университет Махараджи Саяджирао в Бароде,
Вадодара (Гуджарат), 390 002, Индия,

e-mail: rameshkbera8080@gmail.com

Бихха Лила Годадра

Университет Махараджи Саяджирао в Бароде,
Вадодара (Гуджарат), 390 002, Индия,

e-mail: bhikhu_ghodadra@yahoo.com

R.K. Bera and B.L. Ghodadra

Rate of convergence of certain Fourier series of functions of generalized bounded variation

Abstract. In this paper, we discuss the rate of convergence of the rational Fourier series and conjugate rational Fourier series of functions of generalized bounded variation. In particular, well-known Wiener's and Siddiqi's theorems for functions of p-bounded variation are proved in more general complete rational orthogonal system. Also some results are obtained for a class of functions wider than the class of functions of bounded variation and of $\{n^\alpha\}$-bounded variation.

Keywords: Fourier series, rational Fourier series, pointwise convergence, rate of convergence, p-Λ-bounded variation.

Rameshbhai Karshanbhai Bera

The Maharaja Sayajirao University of Baroda,
Vadodara (Gujarat), 390 002 India,

e-mail: rameshkbera8080@gmail.com

Bhikha Lila Ghodadra

The Maharaja Sayajirao University of Baroda,
Vadodara (Gujarat), 390 002 India,

e-mail: bhikhu_ghodadra@yahoo.com