Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 9, с. 100–105 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное С.М. Скрябиным

А.В. КОНДРАТЬЕВА, М.И. КУЗНЕЦОВ

ФИЛЬТРОВАННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ГРАДУИРОВАННЫХ НЕАЛЬТЕРНИРУЮЩИХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ АЛГЕБР ЛИ

Аннотация. Приведено описание фильтрованных алгебр Ли над совершенным полем характеристики 2, с которыми ассоциированы градуированные неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли. Найдены дифференцирования и автоморфизмы фильтрованных алгебр Ли.

Ключевые слова: поле характеристики 2, градуированная неальтернирующая гамильтонова алгебра Ли, фильтрованная алгебра Ли.

УДК: 512.554

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-100-105

Введение

Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus\limits_{i \geqslant -q} \mathfrak{g}_i$ — градуированная алгебра Ли. Фильтрованная алгебра Ли

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-q} \supset \ldots \supset \mathscr{L}_{-1} \supset \mathscr{L}_0 \supset \mathscr{L}_1 \supset \ldots$$

такая, что ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr}\mathscr{L}$ изоморфна $\mathfrak{g}$, называется фильтрованной деформацией алгебры $\mathfrak{g}$. Исследованию фильтрованных деформаций конечномерных алгебр Ли картановского типа над полем характеристики $p > 0$ посвящено множество работ [1]–[10]. Наиболее полное решение этой задачи получил С.М. Скрябин на основе развитой им теории модулярных пар Ли–Картана [8], [9]. Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли рассматривались в работах [11]–[16].

В данной статье излагаются результаты, позволяющие использовать в случае неальтернирующих алгебр Ли теорему о минимальном вложении ([3], теорема 3.2; [4]) и технику, применяемую в [8], [9] для описания фильтрованных деформаций градуированных альтернирующих гамильтоновых алгебр Ли. К таким результатам относятся инвариантность стандартной максимальной подалгебры $\mathscr{L}_0$, кратность вхождения L_0-модуля L_{-1} в композиционный ряд модуля $L_{(1)}/[L_{(1)}, L_{(1)}]$, тривиальность групп когомологий $H^1(L_0, L_{-1})$ и $H^0(L_0, S^3(V)^*)$.

Всюду в дальнейшем K — совершенное поле характеристики $p = 2$. Пусть E — векторное пространство над K, $\dim E = n$, $\mathscr{F}\colon E = E_0 \supseteq E_1 \supseteq \ldots \supseteq E_r \supset E_{r+1} = 0$ — флаг E. В

Поступила в редакцию 28.04.2024, после доработки 28.04.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект FSWR-2023-0034.

работе используются стандартные обозначения для алгебр $O(\mathscr{F})$, $O(n,\overline{m})$, $W(\mathscr{F})$, $W(n,\overline{m})$ (см. [10], [16], [17]), $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $O(\mathscr{F})$.

1. Неальтернирующие гамильтоновы алгебры Ли

Напомним основные определения [13], [14]. Пусть Пусть $R = O(\mathscr{F})$, $W = W(\mathscr{F})$, $S(W)$ — симметрическая биалгебра R-модуля W с копроизведением $\Delta(D) = D\otimes 1 + 1\otimes D$ для $D\in W$. Двойственная градуированная алгебра $S\Omega = \bigoplus\limits_{i\geqslant 0} S\Omega^i$, $S\Omega^i = \operatorname{Hom}_R(S^i(W), R)$, с умножением $\omega_r\omega_s = (\omega_r\otimes\omega_s)\circ\Delta$, $\omega_r\in S\Omega^r$, $\omega_s\in S\Omega^s$, является алгеброй симметрических дифференциальных форм над R. На $S\Omega$ имеется естественная структура алгебры разделенных степеней. Если $\omega\in S\Omega^1$, то $\omega^{(k)}\in S\Omega^k$, $\omega^{(k)}(D_1,\dots,D_k) = \omega(D_1)\cdot\ldots\cdot\omega(D_k)$. Внешний дифференциал $d\colon S\Omega^r\to S\Omega^{r+1}$ задается также, как и для альтернирующих форм. Форма $\omega\in S\Omega^2$ называется неальтернирующей, если $\omega(D,D)\neq 0$ для некоторого $D\in W$.

Пусть $\{x_1,\dots,x_n\}$ — базис E, $\omega\in S\Omega^2$,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n}\omega_{ii}dx_i^{(2)} + \sum_{i<j}\omega_{ij}dx_idx_j.$$

Здесь $dx_i^{(2)} = (dx_i)^{(2)}$. Положим $\omega_{ji} = \omega_{ij}$, $M = (\omega_{ij})$ — матрица формы ω. Форма называется *невырожденной*, если $\det M$ — обратимый элемент в R. Замкнутая невырожденная неальтернирующая форма $\omega\in S\Omega^2$ называется *неальтернирующей гамильтоновой* формой над R. Через $\omega(0)$ обозначим редукцию формы ω по модулю $\mathfrak{m}$, $\omega\equiv\omega(0)\bmod \mathfrak{m}S\Omega^2$, $a_{ij} = \omega_{ij}(0)\in K$,

$$\omega(0) = \sum_{i=1}^{n}a_{ii}dx_i^{(2)} + \sum_{i<j}a_{ij}dx_idx_j.$$

Для неальтернирующей гамильтоновой формы ω форма $\omega(0)$ является невырожденной симметрической неальтернирующей билинейной формой на пространстве

$$V = \langle\partial_1,\dots,\partial_n\rangle\cong E^*.$$

Обозначим $M^{-1} = (\overline{\omega}_{ij})$, $M^{-1}(0) = (\overline{a}_{ij})$. Матрица $M^{-1}(0)$ является матрицей двойственной формы $\overline{\omega(0)}$ на пространстве E в базисе $\{x_1,\dots,x_n\}$. Обозначим через E^0 подпространство всех изотропных векторов E.

Пусть ω — неальтернирующая гамильтонова дифференциальная форма над R,

$$\widetilde{P}(\mathscr{F},\omega) = \{D\in W(\mathscr{F})\mid D\omega = 0\}.$$

Векторное поле $D\in\widetilde{P}(\mathscr{F},\omega)$ однозначно определяется элементом $f\in\widetilde{O}(\mathscr{F})/K$, где $\widetilde{O}(\mathscr{F}) = O(\mathscr{F}) + \langle x_1^{(2^{m_1})},\dots,x_n^{(2^{m_n})}\rangle$, $D = D_f = \sum\limits_{i,j}\overline{\omega}_{ij}\partial_if\partial_j$. Здесь мы предполагаем, что базис $\{x_1,\dots,x_n\}$ согласован с флагом $\mathscr{F}$, $(m_1,\dots,m_n) = \overline{m}$ — набор высот неизвестных $x_1,\dots,x_n$.

Соответствие $f\mapsto D_f$ является изоморфизмом алгебры Ли $\widetilde{P}(\mathscr{F},\omega)$ и алгебры Ли $\widetilde{O}(\mathscr{F})/K$ со скобкой Пуассона $\{f,g\} = \sum\limits_{i,j}\overline{\omega}_{ij}\partial_if\partial_jg$. Положим

$$P(\mathscr{F},\omega) = \{D_f,\ f\in O(\mathscr{F})/K\},$$

$P(\mathscr{F},\omega)^{(1)}$ — коммутант алгебры Ли $P(\mathscr{F},\omega)$. Алгебра Ли $\mathscr{L}$ такая, что $P(\mathscr{F},\omega)^{(1)} \subseteq \mathscr{L} \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F},\omega)$, называется неальтернирующей гамильтоновой алгеброй Ли. Алгебра $\mathscr{L}$ имеет стандартную фильтрацию, индуцированную стандартной фильтрацией алгебры Ли W. Ассоциированная градуированная алгебра Ли $\operatorname{gr}\mathscr{L}$ изоморфна градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $P(\mathscr{F},\omega_0)^{(1)} \subseteq \mathfrak{g} \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F},\omega_0)$.

Изоморфизм алгебр $\sigma\colon O(\mathscr{F}) \to O(\mathscr{F}')$ называется *допустимым*, если он перестановочен с разделенными степенями [7]. В этом случае σ индуцирует допустимые изоморфизмы $W(\mathscr{F})$ и $W(\mathscr{F}')$. Две формы ω и ω' над $O(\mathscr{F})$ и $O(\mathscr{F}')$ соответственно называются *эквивалентными*, если $\sigma\omega = \omega'$ для некоторого допустимого изоморфизма σ.

2. Ортогональные алгебры Ли

Пусть $\langle u, v\rangle$ — невырожденная симметрическая неальтернирующая билинейная форма на пространстве V, $\mathfrak{o}(V)$ — соответствующая ортогональная алгебра Ли, состоящая из линейных операторов A таких, что $\langle Au, v\rangle + \langle u, Av\rangle = 0$. Очевидно, $A \in \mathfrak{o}(V)$ тогда и только тогда, когда в ортонормированном базисе A имеет симметрическую матрицу. Следовательно, $\dim \mathfrak{o}(V) = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Также, как и симплектическая алгебра Ли $\operatorname{sp}(V)$, $\mathfrak{o}(V)$ является линейной оболочкой операторов T_u, $T_u(v) = \langle u, v\rangle u$. Коммутант $\mathfrak{o}(V)^{(1)}$ совпадает с линейной оболочкой операторов $T_{u,v}$, $T_{u,v}(w) = \langle u, w\rangle v + \langle v, w\rangle u$, $w \in W$ (см. [9]).

Положим $\operatorname{so}(V) = \mathfrak{o}(V) \cap \operatorname{sl}(V)$. Очевидно, $\operatorname{tr} T_u = \langle u, u\rangle$.

Теорема 1. *Пусть G — подалгебра в $\mathfrak{o}(V)$ такая, что $\mathfrak{o}(V)^{(1)} \subseteq G$, $\overline{G}$ — p-замыкание G в $\operatorname{gl}(V)$, $\dim V = n$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — ортонормированный базис V. Справедливы следующие утверждения:*

1) $T = \langle T_{v_1}, \ldots, T_{v_n}\rangle$ — *n-мерный тор в* $\operatorname{gl}(V)$, $\mathfrak{o}(V) = \mathfrak{o}(V)^{(1)} + T$;

2) $\operatorname{so}(V) = \mathfrak{o}(V)^{(1)} + T_1$, *где* $T_1 = \langle T_{v_1} + T_{v_2}, \ldots, T_{v_{n-1}} + T_{v_n}\rangle$ — *$(n-1)$-мерный тор*, $T_1 \subset T$;

3) *если G содержит оператор T_u такой, что $\langle u, u\rangle \neq 0$, то $\overline{G} = \mathfrak{o}(V)$ и V — абсолютно неприводимый G-модуль*;

4) *если $n \neq 2$, то V — абсолютно неприводимый $\mathfrak{o}(V)^{(1)}$-модуль*;

5) *если $n \neq 2, 4$, то $\mathfrak{o}(V)^{(1)}$ — простая алгебра Ли*;

6) *если $n \neq 2$ или $n = 2$, G удовлетворяет условию п. 3), то $N_{gl(V)}(G) = \mathfrak{o}(V)$.*

Теорему 1 можно применить для вычисления когомологий.

Предложение 1. *Пусть G — подалгебра в $\mathfrak{o}(V)$, $\mathfrak{o}(V)^{(1)} \subseteq G$. Если $n \neq 3$ или $n = 3$, $G \not\subseteq \operatorname{so}(V)$, то $H^1(G, V) = 0$, $H^0(G, S^3(V)^*) = 0$. Если $n = 3$, $G \subseteq \operatorname{so}(V)$, то $\dim H^1(G, V) = 2$.*

Пусть $L_{(1)}$ — первый член стандартной фильтрации градуированной алгебры Ли L.

Предложение 2. *Кратность L_0-модуля L_{-1} в L_0-модуле $L_{(1)}\big/[L_{(1)}, L_{(1)}]$ не превосходит $m(\mathscr{F}) - n$, где $m(\mathscr{F}) = m_1 + \ldots + m_n$, при условии $n \neq 4$ или $n = 4$, $E_1 \not\subset E^0$.*

3. Инвариантность стандартной максимальной подалгебры

Пусть $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{-1} \supset \mathscr{L}_0 \supset \mathscr{L}_1 \supset \ldots$ — фильтрованная деформация градуированной неальтернирующей гамильтоновой алгебры Ли $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ со стандартной градуировкой. Максимальная подалгебра $\mathscr{L}_0$ в $\mathscr{L}$ называется стандартной. Так же, как в [9], определим множество

$$\mathfrak{N}(\mathscr{L}) = \{D \in \mathscr{L} \mid (\operatorname{ad} D)(\operatorname{ad} D') \text{ нильпотентен для любого } D' \in \mathscr{L}\}.$$

Инвариантность $\mathscr{L}_0$ доказывается так же, как для альтернирующих гамильтоновых алгебр Ли, но требует рассмотрения большего количества исключительных случаев.

Теорема 2. *Пусть $n > 4$ или $n = 4$, $E_1 \not\subset E^0$, или $n = 3, 2$, $E = E_1$. Тогда $\mathscr{L}_0$ является единственной подалгеброй наименьшей коразмерности среди всех подалгебр алгебры Ли $\mathscr{L}$, содержащих $\mathfrak{N}(\mathscr{L})$, но не содержащих ненулевых идеалов алгебры $\mathscr{L}$. В частности, $\mathscr{L}_0$ — инвариантная подалгебра в $\mathscr{L}$.*

Оценка коразмерности максимальной подалгебры, содержащей $\mathfrak{N}(\mathscr{L})$, основана на следующей лемме, которая показывает отличие ортогонального случая от симплектического ([9], гл. III, лемма 1.3).

Лемма. *Пусть V — некоторое векторное пространство, U — его собственное ненулевое подпространство, G — алгебра Ли линейных преобразований пространства V и $N_G(U)$ — подалгебра тех линейных преобразований из G, относительно которых U устойчиво. Положим $l = \mathrm{codim}_V U$ и $t = \mathrm{codim}_G N_G(U)$.*

1) *Пусть $G = \mathfrak{o}(V)$ — ортогональная алгебра Ли, соответствующая невырожденной неальтернирующей симметрической билинейной форме b. Тогда $l + t \geqslant n$, и равенство достигается только при $l = 1$.*
2) *Пусть $G = \mathfrak{o}(V)^{(1)}$. Тогда $l + t > n$ за исключением следующих случаев:*
    a) *если $l = 1$ и $U \cap U^\perp = 0$, то $l + t = n$;*
    b) *если $l = 1$ и $\dim U \cap U^\perp = 1$, то $l + t = n - 1$;*
    c) *если $l = 2$, $n = 3$ и $\dim U \cap U^\perp = 1$, то $l + t = n$;*
    d) *если $l = 2$, $n = 5$ и $\dim U \cap U^\perp = 2$, то $l + t = n$;*
    e) *если $l = 2$, $n = 4$ и $U^\perp = U$, то $l + t = n - 1$;*
    f) *если $l = 3$, $n = 6$ и $U^\perp = U$, то $l + t = n$.*

4. Фильтрованные деформации

Основным результатом работы является

Теорема 3. *Пусть ω_0 — неальтернирующая гамильтонова форма с постоянными коэффициентами, $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \dots$ — градуированная алгебра Ли, $P(\mathscr{F}, \omega_0)^{(1)} \subseteq L \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega_0)$, $\mathscr{L}$ — фильтрованная деформация L. Предположим, что $n > 4$ или $n = 4$, $E_1 \not\subset E^0$, или $n = 2, 3$, $E = E_1$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *существует единственная с точностью до допустимого автоморфизма алгебры $W(\mathscr{F})$ неальтернирующая гамильтонова форма ω с коэффициентами из $O(\mathscr{F})$ такая, что $\omega(0) = \omega_0$ и $P(\mathscr{F}, \omega)^{(1)} \subseteq \mathscr{L} \subseteq \widetilde{P}(\mathscr{F}, \omega)$;*

2) $\mathrm{Der}\, \mathscr{L} \cong N_{\overline{W(\mathscr{F})}}(\mathscr{L})$, *где $\overline{W(\mathscr{F})}$ — p-замыкание алгебры Ли $W(\mathscr{F})$ в $\mathrm{Der}\, O(\mathscr{F})$;*

3) *группа автоморфизмов алгебры Ли $\mathscr{L}$ изоморфна группе допустимых автоморфизмов τ алгебры $O(\mathscr{F})$ таких, что $\tau(\omega) = \alpha\omega$, $\alpha \in K^*$* ([15]).

Ограничения в теореме 3 выбраны так, чтобы выполнялись условия теоремы 2 об инвариантности стандартной максимальной подалгебры $\mathscr{L}_0$, предложения 1 о тривиальности группы когомологий и предложения 2 о кратности L_0-модуля L_{-1} в L_0-модуле $L_{(1)}/[L_{(1)}, L_{(1)}]$. Отметим, что в предложении 1 необходимо положить $V = L_{-1}$, $\langle u, w \rangle = \omega_0(u, w)$, $u, w \in L_{-1}$. Далее применяется теорема о минимальном вложении транзитивной фильтрованной алгебры Ли $(\mathscr{L}, \mathscr{L}_0)$ в $(W(\mathscr{F}), W(\mathscr{F})_0)$ ([3], теорема 3.2; [4]). Для построения формы ω применяется техника, разработанная С.М. Скрябиным ([8], теорема 8.1; [9], теорема 7.1).

Литература

[1] Кац В.Г. *Описание фильтрованных алгебр Ли, с которыми ассоциированы градуированные алгебры Ли картановского типа*, Изв. АН СССР, Сер.Матем. **38** (4), 800–834 (1974).

[2] Wilson R.L. *A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic*, J. Algebra. **40**, 418–465 (1976).

[3] Кузнецов М.И. *Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p*, Изв. АН СССР. Сер.матем. **53** (3), 557–589 (1989).

[4] Кузнецов М.И. *Теорема вложения для транзитивных фильтрованных алгебр Ли характеристики p*, Изв. вузов. Матем. (10), 43–45 (1991).

[5] Kuznetsov M.I. *On Lie algebras of contact type*, Commun. Algebra **18** (9), 2943–3013 (1990).

[6] Скрябин С.М. *Канонический вид гамильтоновых и контактных форм над алгебрами разделенных степеней*, Деп. ВИНИТИ 8594-В86 (1986).

[7] Скрябин С.М. *Классификация гамильтоновых форм над алгебрами разделенных степеней*, Матем.сб. **181** (1), 114–133 (1990).

[8] Skryabin S.M. *Modular Lie algebras of Cartan type over algebraically non-closed fields.* I, Commun. Algebra. **19** (6), 1629–1741 (1991).

[9] Скрябин С.М. *Формы алгебр Ли картановского типа*, Lambert Acad. Publ. ISBN-13: 978-3-659-76486-8, ISBN-10: 3659764868. (2015).

[10] Strade H. *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic.* I: *Structure theory* (de Gruyter Exp. Math., Berlin, 2004).

[11] Lin Lei *Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n,m)$ of characteristic two*, Commun. Algebra **21** (2), 399–411 (1993).

[12] Bouarrodj S., Grozman P., Lebedev A., Leites D. *Divided power (co)homology. Presentation of simple finite dimensional modular superalgebras with Cartan matrix*, Homology Homotopy Appl. **12** (1), 237–278 (2010).

[13] Кузнецов М.И., Кондратьева А.В., Чебочко Н.Г. *О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики* 2, Матем. журнал. **16** (2), 54–65 (2016), URL : http://www.math.kz.

[14] Кондратьева А.В., Кузнецов М.И. *Неальтернирующие гамильтоновы формы над алгеброй разделенных степеней в характеристике* 2, Изв. вузов. Матем. (6), 95–100 (2023).

[15] Kondrateva A.V. *Non-alternating Hamiltonian Lie algebras of characteristic two in three variables*, Lobachevskii J. Math. **42** (12), 2841–2853 (2021).

[16] Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **33** (2), 251–322 (1969).

[17] Strade H., Farnsteiner R. *Modular Lie Algebras and Their Representations* (Marcel Dekker, New York and Basel, 1988).

Алиса Витальевна Кондратьева

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,

e-mail: alisakondr@mail.ru

Михаил Иванович Кузнецов

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603022, Россия,

e-mail: kuznets-1349@yandex.ru

A.V. Kondrateva and M.I. Kuznetsov

Filtered deformations of graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras

Abstract. We give the description of filtered Lie algebras over a perfect field of characteristic 2, to which graded non-alternating Hamiltonian Lie algebras are associated. Derivations and automorphisms of filtered Lie algebras are found.

Keywords: field of characteristic 2, graded nonalternating Hamiltonian Lie algebra, filtered Lie algebra.

Alisa Vitalevna Kondrateva

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022 Russia,

`e-mail:` alisakondr@mail.ru

Michael Ivanovich Kuznetsov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603022 Russia,

`e-mail:` kuznets-1349@yandex.ru