Известия вузов. Математика
2024, № 9, с. 92–99

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Ф.Г. АВХАДИЕВ

АНАЛОГ МЕТРИКИ ПУАНКАРЕ И ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Аннотация. Для плоской области мы определяем новую метрику, близкую к метрике Пуанкаре с гауссовой кривизной $k = -4$. Для этой квазигиперболической метрики изучаются неравенства изопериметрического типа.

Доказано, что константа в линейном квазигиперболическом изопериметрическом неравенстве для допустимых подобластей заданной области является конечной тогда и только тогда, когда область не содержит бесконечно удаленной точки и имеет равномерно совершенную границу. Даны также оценки этих констант с использованием известных числовых характеристик областей.

Ключевые слова: метрика Пуанкаре, гиперболический радиус, изопериметрическое неравенство, равномерно совершенное множество.

УДК: 517.54: 517.9

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-92-99

Введение

Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, имеющая не менее трех граничных точек. Тогда в этой области определена метрика Пуанкаре $ds = \lambda_\Omega(z)|dz|$ с гауссовой кривизной $\kappa = -4$. Гиперболический радиус $R(z,\Omega) := 1/\lambda_\Omega(z)$ удовлетворяет следующему уравнению Лиувилля:

$$R^2(z,\Omega)\,\Delta \ln R(z,\Omega) \equiv -4, \quad z = x + iy \in \Omega, \tag{1}$$

где $\Delta = 4\partial^2/(\partial z \partial \overline{z})$ — лапласиан. Имеет место неравенство

$$R(z,\Omega) \geqslant \rho(z,\partial\Omega) := \min_{w\in\partial\Omega} |z-w| > 0 \quad \forall z \in \Omega \tag{2}$$

(см. [1]–[5]). Известно, что расстояние от точки $z \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет условию Липшица $|\rho(z,\partial\Omega) - \rho(w,\partial\Omega)| \leqslant |z-w|$ ($\forall z, w \in \Omega$), и поэтому является дифференцируемой почти всюду в области Ω (см., например, [6]–[8]).

Очевидно, что функция $\rho(.,\partial\Omega) : \Omega \to (0,\infty)$ корректно определена для любой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$, имеющей не менее одной граничной точки $w \neq \infty$. Следовательно, в такой области

Поступила в редакцию 19.05.2024, после доработки 10.06.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение 075-02-2024-1438).

Ω можно рассматривать новую метрику

$$d\sigma = \frac{|dz|}{\rho(z,\partial\Omega)}, \quad z \in \Omega, \quad |dz| = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}. \tag{3}$$

Конечносвязную область $G \subset \Omega$ назовем *допустимой подобластью, если ее граница ∂G состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых и $\partial G \subset \Omega$.* Для площади $A(G)$ и периметра $L(\partial G)$ области G по метрике (3) имеем

$$A(G) = \iint_G \frac{dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)}, \qquad L(\partial G) = \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\rho(z,\partial\Omega)} \quad (z = x+iy).$$

Определение 1. Пусть область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ обладает свойством $\mathbb{C} \cap (\partial\Omega) \neq \emptyset$. Определим

$$q(\Omega) = \sup_G \iint_G \frac{dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)} \Big/ \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\rho(z,\partial\Omega)} ,$$

где точная верхняя граница берется по множеству всех допустимых конечносвязных подобластей G, удовлетворяющих условию $\overline{G} \subset \Omega$. Постоянную $q(\Omega)$ будем называть изопериметрической константой для метрики $|dz|/\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$.

Очевидно, величина $q(\Omega)$ является наилучшей постоянной в следующем линейном неравенстве изопериметрического типа:

$$A(G) \leqslant q(\Omega)\, L(\partial G), \quad \text{где} \quad q(\Omega) = \sup_G A(G)/L(\partial G). \tag{4}$$

Неравенства вида (4) для метрики Пуанкаре изучались ранее (см., например, [9], [10]). Речь идет о неравенствах вида

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant h(\Omega) \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)} \qquad \left(h(\Omega) = \sup_G \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \Big/ \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z,\Omega)} \right). \tag{5}$$

Для оценки сверху константы $q(\Omega)$ нам потребуется известная числовая характеристика области, а именно, евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$.

Определение 2. Пусть $A(a,w,b) = \{z \in \mathbb{C} : a < |z-w| < b\}$, где $w \in \mathbb{C}$, $0 < a < b < \infty$, и пусть область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеет не менее двух граничных точек. Евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega)$ этой области определим равенством $M_0(\Omega) = \sup_{A(a,z_0,b)} (2\pi)^{-1}\ln(b/a)$, где точная верхняя граница берется по множеству колец $A(a,w,b) \subset \Omega$ таких, что $w \in \partial\Omega$ и $A(a,w,b)$ разделяет границу Ω. Если таких колец нет, то полагаем $M_0(\Omega) = 0$.

Если $M_0(\Omega) < \infty$, то говорят, что граница области Ω является равномерно совершенным множеством [4], [11], [12].

1. Основные результаты

Следующее утверждение играет ключевую роль при оценках констант $q(\Omega)$ и $h(\Omega)$ с использованием известных числовых характеристик области.

Предложение 1. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, имеющая не менее трех граничных точек. Тогда для любой конечносвязной подобласти $G \subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial G \subset \Omega$ имеет место неравенство*

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} \leqslant \frac{1}{4} \int_{\partial G} \frac{|\nabla R(z,\Omega)|}{R(z,\Omega)} |dz|. \tag{6}$$

Доказательство. Полагаем $u(z) \equiv 1$ и $v(z) = \ln R(z,\Omega)$ в первой формуле Грина

$$\iint_\Omega (u(z)\Delta v(z) + (\nabla u(z), \nabla v(z)))\, dxdy = \int_L u(z)\frac{\partial v(z)}{\partial n}\,|dz|, \ \ (z = x+iy),$$

где n — внешняя нормаль. Прямыми вычислениями с учетом уравнения (1) получаем

$$-4\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z,\Omega)} = \int_{\partial G} \frac{\partial \ln R(z,\Omega)}{\partial n}|dz|.$$

Отсюда и вытекает неравенство (6), так как

$$-\frac{\partial \ln R(z,\Omega)}{\partial n} \leqslant \left|\frac{\partial \ln R(z,\Omega)}{\partial n}\right| \leqslant \frac{|\nabla R(z,\Omega)|}{R(z,\Omega)}.$$

□

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область такая, что $\Omega \neq \mathbb{C}$ и $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством. Тогда изопериметрическая константа $q(\Omega)$ для метрики $|dz|/\mathrm{dist}(z,\partial\Omega)$ удовлетворяет неравенству*

$$q(\Omega) \leqslant 2\left(\pi M_0(\Omega) + \frac{(\Gamma(1/4))^4}{4\pi^2}\right)^2, \tag{7}$$

где Γ — гамма функция Эйлера, $(\Gamma(1/4))^4/(4\pi^2) \approx 4.38$.

Доказательство. Пусть $\alpha(\Omega) = \inf_{z\in\Omega} \rho(z,\partial\Omega)/R(z,\Omega)$. В силу оценки (2) имеем $\alpha(\Omega) \leqslant 1$. Так как $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, и $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством, то евклидов максимальный модуль $M_0(\Omega) < \infty$ и $\alpha(\Omega) \in (0,1]$ (см., например, [4]). Пользуясь величиной $\alpha(\Omega)$ и оценкой $|\nabla R(z,\Omega)|/R(z,\Omega) \leqslant 2/\rho(z,\partial\Omega)$ (см. Б. Осгуд [13]), преобразуем неравенство (6). Как следствие (6) получаем, что для любой конечносвязной подобласти $G \subset \Omega$ с кусочно-гладкой границей $\partial G \subset \Omega$ имеет место неравенство

$$\iint_G \frac{dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)} \leqslant \frac{1}{2\alpha^2(\Omega)}\int_{\partial G} \frac{|dz|}{\rho(z,\partial\Omega)}|dz|.$$

Последнее неравенство влечет оценку

$$q(\Omega) \leqslant \frac{1}{2\alpha^2(\Omega)}, \tag{8}$$

так как изопериметрическая константа $q(\Omega)$ для метрики (3) определена как точная постоянная в неравенстве (4). Далее применяем следующее усиленное неравенство Бирдона и Поммеренке, обоснованное в монографии автора и К.-Й. Виртса [4]:

$$\frac{1}{\alpha(\Omega)} \leqslant 2\pi M_0(\Omega) + \frac{(\Gamma(1/4))^4}{2\pi^2}. \tag{9}$$

Очевидно, что неравенство (7) является простым следствием (8) и (9).

□

Выделим в виде леммы один из этапов доказательства последующей теоремы 2.

Лемма. *Пусть $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ — область, имеющая не менее двух граничных точек. Если*

$$M_0(\Omega) = \infty,$$

то $q(\Omega) = \infty$.

Доказательство. Если $M_0(\Omega)=\infty$, то по определению евклидова максимального модуля существует последовательность круговых концентрических колец $A(a_n,w_n,b_n)\subset\Omega$ таких, что $w_n\in\partial\Omega$, $0<a_n<b_n<\infty$, $A(a_n,w_n,b_n)=\{z\in\mathbb{C}: a_n<|z-w_n|<b_n\}$ разделяет границу Ω и $M_0(\Omega)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}\ln(b_n/a_n)=\infty$. Рассмотрим кольца $G_n\subset A(a_n,w_n,b_n)\subset\Omega$, определенные формулой

$$G_n=\{z\in\mathbb{C}:\sqrt{a_nb_n}<|z-w_n|<(a_n+b_n)/2\}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{mod}(G_n)=\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-1}\ln\frac{a_n+b_n}{2\sqrt{a_nb_n}}=\frac{1}{4\pi}\lim_{n\to\infty}\ln(b_n/a_n)=\infty.$$

Поскольку $w_n\in\partial\Omega$, то для любой точки $z\in\overline{G}_n$

$$\sqrt{a_nb_n}-a_n\leqslant|z-w_n|-a_n\leqslant\rho(z,\partial\Omega)\leqslant|z-w_n|\leqslant(a_n+b_n)/2. \tag{10}$$

В вычислениях будем пользоваться полярными координатами, полагая $z-w_n=re^{i\theta}$, где $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, $r=|z-w_n|\in\left[\sqrt{a_nb_n},(a_n+b_n)/2\right]$. С учетом оценок сверху для $\rho(z,\partial\Omega)$ в неравенствах (10) получаем

$$A(G_n)=\iint_{G_n}\frac{dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)}\geqslant\iint_{G_n}\frac{dxdy}{|z-w_n|^2}=2\pi\int_{\sqrt{a_nb_n}}^{(a_n+b_n)/2}\frac{dr}{r}=2\pi\ln\frac{a_n+b_n}{2\sqrt{a_nb_n}}.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}A(G_n)=\infty$. С другой стороны, учитывая оценки снизу для $\rho(z,\partial\Omega)$ в неравенствах (10), будем иметь

$$L(\partial G_n)=\int_{\partial G_n}\frac{|dz|}{\rho(z,\partial\Omega)}\leqslant\int_{\partial G_n}\frac{|dz|}{|z-w_n|-a_n}=\frac{2\pi\sqrt{a_nb_n}}{\sqrt{a_nb_n}-a_n}+\frac{2\pi(a_n+b_n)/2}{(a_n+b_n)/2-a_n}=:L_n.$$

Легко видеть, что $\lim_{n\to\infty}L_n=4\pi$. Поскольку $\overline{G}_n\subset\Omega$ и неравенство (4) должно выполняться для любой допустимой подобласти Ω, то $q(\Omega)\geqslant A(G_n)/L_n$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно,

$$q(\Omega)\geqslant\sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{2\pi}{L_n}\ln\frac{a_n+b_n}{2\sqrt{a_nb_n}}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{L_n}\ln\frac{a_n+b_n}{2\sqrt{a_nb_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{a_n+b_n}{2\sqrt{a_nb_n}}=\infty.$$

□

Теорема 2. *Пусть $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ — область такая, что $\mathbb{C}\cap(\partial\Omega)\neq\emptyset$. Изопериметрическая константа $q(\Omega)$ для метрики $|dz|/\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ является конечной тогда и только тогда, когда область $\Omega\subset\mathbb{C}$, $\Omega\neq\mathbb{C}$, и ее граница $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством.*

Доказательство. Если область $\Omega\subset\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\cap(\partial\Omega)\neq\emptyset$, и ее граница $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством, то $M_0(\Omega)<\infty$, следовательно, $q(\Omega)<\infty$ в силу теоремы 1.

Докажем обратное. Точнее, предположим, что область $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ обладает свойством $\mathbb{C}\cap(\partial\Omega)\neq\emptyset$ и $q(\Omega)<\infty$. Докажем, что при этих предположениях область $\Omega\subset\mathbb{C}$ и ее граница $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $\infty\in\Omega$, $w\in\partial\Omega$. Тогда $r_0(\Omega)=\max_{z\in\partial\Omega}|z-w|<\infty$, односвязная область $G_{r_0}=\{z\in\overline{C}:|z-w|>2r_0(\Omega)\}$ компактно вложена в область Ω и

$$A(G_{r_0})=\iint_{G_{r_0}}\frac{dxdy}{\rho^2(z,\partial\Omega)}\geqslant\iint_{G_n}\frac{dxdy}{|z-w|^2}=2\pi\int_{2r_0(\Omega)}^{\infty}\frac{dr}{r}=\infty.$$

С другой стороны,

$$L(\partial G_{r_0}=\int_{\partial G_{r_0}}\frac{|dz|}{\rho(z,\partial\Omega)}\leqslant\int_{\partial G_{r_0}}\frac{|dz|}{r_0(\Omega)}=4\pi.$$

Получаем, что изопериметрическая константа $q(\Omega) = \infty$, что противоречит нашему предположению $q(\Omega) < \infty$. Следовательно, если $q(\Omega) < \infty$, то $\infty \notin \Omega$.

Остается рассмотреть случай, когда $\infty \notin \Omega$ и $q(\Omega) < \infty$.

Случай 2. Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ обладает свойством $\Omega \neq \mathbb{C}$ и $q(\Omega) < \infty$. Необходимо доказать, что граница $\partial\Omega$ области Ω является равномерно совершенным множеством, т. е. $M_0(\Omega) < \infty$. Предположим обратное: $M_0(\Omega) = \infty$. Но тогда $q(\Omega) = \infty$ согласно лемме 1, что противоречит предположению $q(\Omega) < \infty$. Таким образом, если область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ обладает свойством $\mathbb{C} \cap (\partial\Omega) \neq \emptyset$ и $q(\Omega) < \infty$, то область $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$, и ее граница $\partial\Omega$ является равномерно совершенным множеством. $\square$

Неравенства для интегралов от степеней $\rho(z, \partial\Omega)$ и $R(z, \Omega)$ имеют ряд интересных применений в прикладных задачах [14]–[18].

Ниже в теореме 3 описана связь константы $q(\Omega)$ с неравенствами типа Харди.

Пусть область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ обладает свойством $\mathbb{C} \cap (\partial\Omega) \neq \emptyset$, и пусть $p \in [1, \infty)$. Символом $C_0^1(\Omega)$ обозначим семейство непрерывно дифференцируемых финитных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Рассмотрим следующее вариационное неравенство типа Харди [5], [6], [8]:

$$\iint_\Omega \frac{|\nabla u(z)|^p}{\rho^{2-p}(z, \partial\Omega)} dxdy \geqslant c_p(\Omega) \iint_\Omega \frac{|u(z)|^p}{\rho^2(z, \partial\Omega)} dxdy \quad \forall u \in C_0^1(\Omega),$$

где $\nabla u = 2\partial u/\partial \overline{z}$ — градиент функции u, $|\nabla u(z)| = \sqrt{(\partial u(z)/\partial x)^2 + (\partial u(z)/\partial y)^2}$, константа $c_p(\Omega) \in [0, \infty)$ определена однозначно, как наилучшая постоянная (т. е. как максимальная из возможных постоянных на этом месте). Очевидно, если $c_p(\Omega) = 0$, то вариационное неравенство теряет смысл. Поэтому желателен критерий положительности этой константы.

Справедлива

Теорема 3. *Пусть область $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ обладает свойством $\mathbb{C} \cap (\partial\Omega) \neq \emptyset$. Тогда*

$$q(\Omega) < \infty \Longleftrightarrow c_p(\Omega) > 0 \text{ *для некоторого* } p \in [1, \infty) \Longleftrightarrow c_p(\Omega) > 0 \text{ *для любого* } p \in [1, \infty).$$

2. Некоторые дополнения и примеры

Константа $h(\Omega)$ является конформно инвариантной характеристикой области $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. В отличие от этого константы $\alpha(\Omega)$, $q(\Omega)$ и $M_0(\Omega)$ не являются конформно инвариантными, они инвариантны лишь по отношению к линейным конформным преобразованиям вида $w = az + b$ $(a \neq 0)$. Тем не менее указанные четыре константы взаимосвязаны, что подтверждается следующим утверждением.

Предложение 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область, имеющая не менее трех граничных точек, и пусть $\alpha(\Omega) = \inf_{z \in \Omega} \rho(z, \partial\Omega)/R(z, \Omega) > 0$. Тогда $\alpha(\Omega)\, h(\Omega) \leqslant q(\Omega) \leqslant h(\Omega)/\alpha^2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $G \subset \Omega$ — конечносвязная допустимая подобласть, граница которой состоит из кусочно-гладких кривых. Применяя неравенство (4) и оценки

$$\alpha(\Omega)\, R(z, \Omega) \leqslant \rho(z, \partial\Omega) \leqslant R(z, \Omega) \ \ \forall z \in \Omega,$$

получаем цепочку неравенств

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z, \Omega)} \leqslant \iint_G \frac{dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \leqslant q(\Omega) \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\rho(z, \partial\Omega)} \leqslant \frac{q(\Omega)}{\alpha(\Omega)} \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z, \Omega)}.$$

Следовательно, для любой допустимой конечносвязной подобласти $G \subset \Omega$ имеем оценку

$$\iint_G \frac{dxdy}{R^2(z, \Omega)} \leqslant \frac{q(\Omega)}{\alpha(\Omega)} \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z, \Omega)}.$$

Сравнение этой оценки с неравенством (5) влечет оценку $h(\Omega) \leqslant q(\Omega)/\alpha(\Omega)$.

Применим теперь неравенство (5) и оценки $\alpha(\Omega) \leqslant \rho(z, \partial\Omega)/R(z, \Omega) \leqslant 1$ $\forall z \in \Omega$. Получаем цепочку неравенств

$$\alpha^2(\Omega) \iint_G \frac{dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \leqslant \iint_G \frac{dxdy}{R^2(z, \Omega)} \leqslant h(\Omega) \int_{\partial G} \frac{|dz|}{R(z, \Omega)} \leqslant h(\Omega) \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\rho(z, \partial\Omega)}.$$

Поэтому для любой допустимой конечносвязной подобласти $G \subset \Omega$ имеем

$$\alpha^2(\Omega) \iint_G \frac{dxdy}{\rho^2(z, \partial\Omega)} \leqslant h(\Omega) \int_{\partial G} \frac{|dz|}{\rho(z, \partial\Omega)}.$$

Эту оценку сравниваем с неравенством (4). Получаем $q(\Omega) \leqslant h(\Omega)/\alpha^2(\Omega)$. □

Для уточнения оценки (7) теоремы 1 можно использовать тот факт, что $M_0(\Omega) = 0$ для ряда многосвязных областей. Наиболее простая оценка получается для выпуклых областей.

Предложение 3. *Имеют место следующие утверждения*:
1) *если Ω — полуплоскость, то $q(\Omega) = 1$;*
2) *если $\Omega \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, то $q(\Omega) \leqslant 2$.*

Опишем свойства использованных констант для двух невыпуклых областей, получаемых удалением некоторого множества точек из круга $|z| < 3$.

Пример 1. Пусть $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 3\}$ — круг с выколотым центром. Тогда

$$h(\Omega_1) = 1/2, \quad q(\Omega_1) = M_0(\Omega_1) = \infty, \quad \alpha(\Omega_1) = 0.$$

Пример 2. Пусть $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\} \setminus \mathbb{K}$, где $\mathbb{K}$ — классическое канторово множество, лежащее на отрезке $[0, 1]$. Тогда $M_0(\Omega_2) = (2\pi)^{-1} \ln 3$, $q(\Omega_2) < \infty$, $h(\Omega_2) < \infty$, $\alpha(\Omega_2) > 0$.

Нетрудно распространить предложения 1 и 2 на случай n-мерных областей при $n \geqslant 3$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область гиперболического типа в смысле Лёвнера–Ниренберга [3], [19]. В такой области определен гиперболический радиус $R(., \Omega) : \Omega \to (0, \infty)$, удовлетворяющий уравнению Лиувилля $R(x, \Omega)\Delta R(x, \Omega) = (n/2)|\nabla R(x, \Omega)|^2 - 2n$ и граничному условию $R(x, \Omega)|_{\partial\Omega} = 0$. Если $\Omega = H$ — полупространство, то $R(x, H) = 2 \operatorname{dist}(x, \partial H)$.

В частности, полагая $u(x) \equiv 1$, $v(x) = R^{2-n}(x, \Omega)$ и следуя схеме доказательства предложения 1, получаем

Предложение 4. *Пусть $n \geqslant 3$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область гиперболического типа. Тогда для любой подобласти $G \subset \Omega$ с границей $\partial G \subset \Omega$, состоящей из конечного числа кусочно-гладких поверхностей размерности $n-1$, имеет место неравенство*

$$\int_G \frac{4n + (n-2)\, |\nabla R(x, \Omega)|^2}{R^n(x, \Omega)}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \leqslant 2 \int_{\partial G} \frac{|\nabla R(x, \Omega)|}{R^{n-1}(x, \Omega)} dS,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, dS — дифференциальный элемент $(n-1)$-мерной площади.

Если $\Omega = H$ — полупространство, то предложение 4 влечет известное изопериметрическое неравенство, принадлежащее Shing-Tung Yau (см. [10], [20]).

Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geqslant 3$ и $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, рассмотрим константу

$$q(\Omega) := \sup_G \int_G \mathrm{dist}^{-\mathrm{n}}(\mathrm{x}, \partial\Omega)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \Bigg/ \int_{\partial G} \mathrm{dist}^{-(\mathrm{n}-1)}(\mathrm{x}, \partial\Omega) dS\ ,$$

где точная верхняя граница берется по множеству всех подобластей $G \subset \Omega$ с границами $\partial G \subset \Omega$, состоящими из конечного числа кусочно-гладких поверхностей размерности $n-1$.

Гипотеза. *Предположим, что* $n \geqslant 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *— область,* $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. *Если* $q(\Omega) < \infty$, *то* Ω *— область гиперболического типа в смысле Лёвнера–Ниренберга.*

Литература

[1] Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного* (Наука, М., 1966).
[2] Ahlfors L.V. *Conformal invariants: Topics in Geometric Function Theory* (McGraw-Hill, New-York, 1973).
[3] Bandle C. and Flucher M. *Harmonic radius and concentration of energy: hyperbolic radius and Liouville's equations* $\Delta U = e^U$ *and* $\Delta U = U^{\frac{n+2}{n-2}}$, SIAM Review **38** (2), 191–238 (1996).
[4] Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick Type Inequalities* (Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009).
[5] Авхадиев Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства* (Казанский университет, Казань, 2020).
[6] Balinsky A.A., Evans W.D., Lewis R.T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality* (Springer, Heidelberg - New York - Dordrecht - London, 2015).
[7] Rademacher H. *Über partielle und totale Differenzierbarkeit* I, Math. Ann. **89**, 340–359 (1919).
[8] Avkhadiev F.G. *A Strong Form of Hardy Type Inequalities on Domains of the Euclidean Space*, Lobachevskii J. Math. **41** (11), 2120–2135 (2020).
[9] Osserman R. *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (6), 1182–1238 (1978).
[10] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. *Геометрические неравенства* (Наука, Ленинград, 1980).
[11] Pommerenke Ch. *Uniformly perfect sets and the Poincaré metric*, Arch. Math. **32** (2), 192–199 (1979).
[12] Avkhadiev F.G. *Euclidean maximum moduli of plane domains and their applications*, Complex Variables Elliptic Equat. **64** (11), 1869–1880 (2019).
[13] Osgood B. *Some properties of* f''/f' *and the Poincaré metric*, Indiana Univ. Math. J. **31** (2), 449–461 (1982).
[14] Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана*, Матем. сб. **189** (12), 3–12 (1998).
[15] Avkhadiev F.G., Kayumov I.R. *Comparison theorems of isoperimetric type for moments of compact sets*, Collectanea Math. **55** (1), 1–9 (2004).
[16] Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи,* 2-е издание, перераб. и доп. (Казанский университет, Казань, 2019).
[17] Авхадиев Ф.Г. *Теоремы вложения, связанные с жесткостью кручения и основной частотой*, Изв. РАН. Сер. матем. **86** (1), 3–35 (2022).
[18] Avkhadiev F.G., Kacimov A.R. *The Saint-Venant type isoperimetric inequalities for assessing saturated water storage in lacunary shallow perched aquifers*, ZAMM **103** (1), 1–22 (2022).
[19] Авхадиев Ф.Г. *Конформно инвариантные неравенства в областях евклидова пространства*, Изв. РАН. Сер. матем. **83** (5), 3–26 (2019).
[20] Schoen R., Yau S.-T. *Conformally flat manifold, Kleinian groups and scalar curvature*, Invent. math. **92**, 47–71 (1988).

Фарит Габидинович Авхадиев

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: avkhadiev47@mail.ru

F.G. Avkhadiev

An analog of the Poincaré metric and isoperimetric constants

Abstract. For plane domains we define a new metric close to the Poincaré metric with the Gaussian curvature $k = -4$. For this quasi-hyperbolic metric we study inequalities of isoperimetric type. It is proved that the constant of the linear quasi-hyperbolic isoperimetric inequality for admissible subdomains of a given domain is finite if and only if the domain does not contain the point at infinity and has a uniformly perfect boundary. Also, we give estimates of these constants using some known numerical characteristics of domains.

Keywords: Poincaré metric, hyperbolic radius, isoperimetric inequality, uniformly perfect set.

Farit Gabidinovich Avkhadiev

Kazan Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: avkhadiev47@mail.ru