

Ю.Э. ФАЙЗИЕВ, Ш.Т. ПИРМАТОВ, Х.Т. ДЕХКОНОВ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЕННИ–ЛЮКА

Аннотация. В статье рассматриваются прямые и обратные задачи для дробных дифференциальных уравнений типа Бенни–Люка. Выведены условия существования и единственности решений задачи Коши для уравнения типа Бенни–Люка дробного порядка. Кроме того, исследуется обратная задача по нахождению правой части уравнения.

Ключевые слова: уравнение Бенни–Люка, производная дробного порядка, прямая и обратная задачи.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-82-91

ВВЕДЕНИЕ

Многие физические, механические и биологические процессы связаны с краевыми задачами и сводятся к решению обыкновенных и дробных дифференциальных уравнений. В то же время, многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек сводятся к решению дифференциальных уравнений высших порядков [1], [2].

Уравнение Бенни–Люка описывает движение волн в несжимаемой жидкости со свободной поверхностью под действием силы тяжести [3]. Это классическая задача о волнах на воде, которая обсуждалась во многих источниках [3], [4]. Уравнение Бенни–Люка было получено Д.Дж. Бенни и Дж.С. Люком как изотропная модель для трехмерной волны на воде [5]. Дифференциальные уравнения высших порядков типа Бенни–Люка на одномерном пространстве были изучены многими математиками [6]–[9]. Кратко остановимся на некоторых из них.

В работе [6] изучается краевая задача, в которой начальные условия для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Бенни–Люка четвертого порядка с выделенным ядром определяются интегральными условиями. В этой статье решаются обратные задачи восстановления источника и начальной функции. В работе [7] исследуется решение нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения Бенни–Люка четного порядка с нелинейными интегральными условиями и положительным спектральным параметром в классе регулярных функций. В работе [8] в прямоугольной области для уравнения типа Бенни–Люка с несимметричными граничными условиями и дополнительными интегральными условиями решается обратная краевая задача на нахождение неизвестного зависящего от времени коэффициента. Напомним, что во всех вышеупомянутых работах исследуется решение уравнения Бенни–Люка с одной переменной.

В работе М. Киране [9] с использованием метода Фурье решаются смешанные задачи для линейных дифференциальных уравнений дробного порядка в смысле Капуто по времени и четвертого порядка по двум пространственным переменным. Показано, что спектральная задача, соответствующая рассматриваемой задаче, имеет полную ортонормальную систему собственных функций, и также доказано, что решение рассматриваемой задачи существует и единственно.

Исследование уравнений Бенни–Люка имеет важное значение, поскольку они описывают множество физических, механических и других процессов. Дробные уравнения типа Бенни–Люка также задают ряд важных волновых процессов. Поэтому в статье изучаем дробные дифференциальные уравнения в частных производных типа Бенни–Люка. При изучении естественных процессов исследование обратных задач имеет большое практическое значение, и поэтому в статье также исследуем обратные задачи по поиску правой части уравнения. Отметим, что, в отличие от работ, представленных выше, в данной статье мы изучаем прямые и обратные задачи для дробных уравнений типа Бенни–Люка с несколькими переменными.

Пусть $A : H \rightarrow H$ — произвольный самосопряженный, положительный, неограниченный оператор, определенный в сепарабельном гильбертовом пространстве H , с областью определения $D(A)$. Предположим, что оператор A имеет полную ортонормированную систему собственных функций $\{v_k\}$ в H и соответствующее им множество положительных собственных значений $\{\lambda_k\}$. Перенумеровав собственные значения, можем записать их в неубывающем порядке как $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow +\infty$. Заметим, что оператор A является абстрактным. Например, можем взять оператор Лапласа $-\Delta = -\sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ с условием Дирихле. Тогда, как известно из работы [10], оператор A обладает указанными выше свойствами.

Определим произвольную степень τ оператора A следующим образом:

$$A^\tau h = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\tau h_k v_k,$$

где h_k — это коэффициенты Фурье функции $h \in H$: $h_k = (h, v_k)$. Очевидно, область определения этого оператора имеет вид

$$D(A^\tau) = \left\{ h \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |h_k|^2 < \infty \right\}.$$

Предположим, что функция $h(t)$ определена на интервале $[0, \infty)$. Если значение интеграла в правой части равенства ([11], с. 181)

$$I_t^\beta h(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \xi)^{\beta-1} h(\xi) d\xi$$

существует, то этот интеграл называется β -дробным интегралом Римана–Лиувилля функции $h(t)$, где $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера.

Пусть функция $h(t)$ определена на интервале $[0, +\infty)$ со значениями в H . Дробная производная Капуто порядка $0 < \rho < 1$ определяется как (см., например, [12], [13])

$$D_t^\rho h(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \rho)} \int_0^t \frac{h'(\xi)}{(t - \xi)^\rho} d\xi, \quad t > 0.$$

Пусть $0 < \rho < 1$ и $C((a, b); H)$ обозначает множество непрерывных функций $u(t)$ от $t \in (a, b)$ со значениями в H . Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения

$$D_t^\rho u(t) + A(D_t^\rho u(t)) + A^2(D_t^\rho u(t)) + Au(t) = f, \quad 0 < t < T, \quad (1)$$

удовлетворяющего условию

$$u(+0) = \varphi, \quad (2)$$

где $\varphi, f \in H$.

Уравнение (1) называется дробным уравнением в частных производных типа Бенни–Люка. Задача (1)–(2) называются задачей Коши для дробного уравнения типа Бенни–Люка.

Задача нахождения решения задачи (1)–(2) называется прямой задачей.

Определение 1. Если $u(t) \in C((0, T]; H)$ — функция, обладающая свойствами $D_t^\rho u(t)$, $A(D_t^\rho u(t))$, $A^2(D_t^\rho u(t))$, $Au(t) \in C((0, T); H)$ и удовлетворяющая всем условиям задачи (1)–(2), то $u(t)$ называется решением задачи Коши (1)–(2).

Для нахождения решения прямой задачи (1)–(2) доказываемся

Теорема 1. Пусть $\varphi \in D(A)$, $f \in H$. Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)–(2), которое имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right] v_k, \quad (3)$$

где f_k , φ_k — коэффициенты Фурье функций f и φ соответственно, $E_{\rho,\beta}$ — функция Миттаг-Леффлера, $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2}$.

В статье также исследуем обратную задачу нахождения правой части уравнения, т. е. когда функция f в задаче (1)–(2) неизвестна. При изучении обратной задачи предполагается, что функция f не зависит от t . Для изучения обратной задачи необходимо дополнительное условие. В качестве дополнительного условия используем

$$u(\tau) = \Psi, \quad 0 < \tau \leq T, \quad (4)$$

где τ — фиксированная точка.

Определение 2. Если функции $u(t) \in C((0, T]; H)$ и $f \in H$ обладают свойствами $D_t^\rho u(t)$, $A(D_t^\rho u(t))$, $A^2(D_t^\rho u(t))$, $Au(t) \in C((0, T); H)$ и удовлетворяют всем условиям задачи (1)–(2), (4), то пара функций $\{u(t), f\}$ называется решением обратной задачи (1)–(2), (4).

При решении обратной задачи доказываем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\varphi, \Psi \in D(A^2)$. Тогда существует единственное решение $\{u(t), f\}$ обратной задачи (1)–(2), (4), и оно выглядит так:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right] v_k, \quad (5)$$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\psi_k}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} - \frac{\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho)}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right) (1 + \lambda_k + \lambda_k^2) \right] v_k, \quad (6)$$

где

$$f_k = \left(\frac{\psi_k}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} - \frac{\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho)}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right) (1 + \lambda_k + \lambda_k^2).$$

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Теперь обратим внимание на некоторые свойства функции Миттаг–Леффлера. Пусть $\rho > 0$ и μ — произвольное комплексное число. Обозначим двухпараметрическую функцию Миттаг–Леффлера через

$$E_{\rho,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\rho n + \mu)}.$$

Если $\mu = 1$, то получим однопараметрическую функцию Миттаг–Леффлера

$$E_{\rho,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + 1)} = E_{\rho}(z).$$

Лемма 1. Если $0 < \rho < 1$, то выполняется следующее равенство:

$$D_t^{\rho} [t^{\rho} E_{\rho,\rho+1}(-\lambda t^{\rho})] = E_{\rho,1}(-\lambda t^{\rho}). \quad (7)$$

Доказательство леммы 1 можно найти в [14].

Лемма 2. Если $0 < \rho < 1$, то справедливо равенство

$$D_t^{\rho} [E_{\rho,1}(-\lambda t^{\rho})] = -\lambda E_{\rho,1}(-\lambda t^{\rho}). \quad (8)$$

Доказательство леммы 2 можно найти в [14].

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

В этом разделе мы займемся решением прямой задачи (1)–(2).

Доказательство теоремы 1. Существование решения.

Решим задачу методом Фурье. Будем искать решение уравнения в виде

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k.$$

Подставив это в уравнение (1), разложив f в ряд Фурье по системе $\{v_k\}$ и учитывая полноту системы $\{v_k\}$, получим

$$(1 + \lambda_k + \lambda_k^2) D_t^{\rho} T_k(t) + \lambda_k T_k(t) = f_k.$$

Откуда

$$D_t^{\rho} T_k(t) + \mu_k T_k(t) = \frac{1}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} f_k,$$

где $\mu_k = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2}$.

Используя условие (2), имеем следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} D_t^{\rho} T_k(t) + \mu_k T_k(t) &= \frac{1}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} f_k, \\ T_k(+0) &= \varphi_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Получаем следующее решение задачи (9) (см. [12]):

$$T_k(t) = \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^{\rho}) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \int_0^t \eta^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\mu_k \eta^{\rho}) d\eta.$$

Учитывая равенство

$$\int_0^t \eta^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-\mu_k \eta^\rho) d\eta = t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho),$$

получаем формальное решение (3).

Чтобы показать, что функция $u(t)$, определенная рядом (3), является решением, необходимо доказать, что эта функция удовлетворяет всем условиям определения 1.

Сначала покажем, что ряд (3) равномерно сходится. Для этого через

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^n \left[\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right] v_k$$

обозначим частичную сумму ряда (3). Действие оператора A на эту частичную сумму запишется в виде $AS_n(t)$. Теперь оценим $\|AS_n(t)\|$. По определению оператора A имеем

$$\|AS_n(t)\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \left[\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right] \lambda_k v_k \right\|^2.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned} \|AS_n(t)\|^2 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2 \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 + C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2 = AS_n^1 + AS_n^2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} AS_n^1 &= C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2, \\ AS_n^2 &= C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2. \end{aligned}$$

Теперь, используя оценку $0 < E_{\rho,\mu}(-z) < 1$, $0 < \rho < 1$, μ — комплексное число (см. [11], с. 36; [16]), получим

$$\begin{aligned} AS_n^1 &\leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k|^2, \\ AS_n^2 &= C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \right|^2 \leq C \sum_{k=1}^n |f_k|^2. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что если $\varphi \in D(A)$, $f \in H$, то $Au(t) \in C([0, T]; H)$. Также если $\varphi, f \in H$, то $u(t) \in C([0, T], H)$.

Теперь оценим $A(D_t^\rho u(t))$. Учитывая (7), (8), имеем

$$\|A(D_t^\rho S_n(t))\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \left[-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) \right] \lambda_k v_k \right\|^2.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем оценку

$$\|A(D_t^\rho S_n(t))\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| -\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 + C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2 \leq \\
&\leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |-\mu_k \varphi_k|^2 + C \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \right|^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 + C_2 \sum_{k=1}^n |f_k|^2,
\end{aligned}$$

где C_1, C_2 — постоянные положительные числа. Отсюда видно, что $\varphi \in D(A)$, $f \in H$, то $A(D_t^\rho u(t)) \in C([0, T]; H)$. Аналогично, если $\varphi, f \in H$, то $D_t^\rho u(t) \in C([0, T]; H)$.

Теперь оценим $A^2(D_t^\rho u(t))$. Если учесть (7), (8), получим равенство

$$\|A^2(D_t^\rho S_n(t))\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n \left[-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) \right] \lambda_k^2 v_k \right\|^2.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем оценку

$$\begin{aligned}
\|A^2(D_t^\rho S_n(t))\|^2 &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^4 \left| -\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2 \leq \\
&\leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^4 |-\mu_k \varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho)|^2 + C \sum_{k=1}^n \lambda_k^4 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} E_{\rho,1}(-\mu_k t^\rho) \right|^2 \leq \\
&\leq C \sum_{k=1}^n \lambda_k^4 |-\mu_k \varphi_k|^2 + C \sum_{k=1}^n \lambda_k^4 \left| \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \right|^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 + C_2 \sum_{k=1}^n |f_k|^2.
\end{aligned}$$

Откуда

$$\|A^2(D_t^\rho S_n(t))\|^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 + C_2 \sum_{k=1}^n |f_k|^2,$$

где C_1, C_2 — постоянные положительные числа. При $\varphi \in D(A)$, $f \in H$ имеем $A^2(D_t^\rho u(t)) \in C([0, T]; H)$. $\square$

Единственность решения докажем стандартным методом. Для этого рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
D_t^\rho u(t) + A(D_t^\rho u(t)) + A^2(D_t^\rho u(t)) + Au(t) &= 0, \\
u(+0) &= 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Достаточно показать, что система имеет нулевое решение. Предположим, что $u(t)$ — произвольное решение, обозначим $u_k(t) = (u(t), v_k)$. Тогда $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k$, и для самосопряженного оператора A ввиду уравнений (10) имеем

$$\begin{aligned}
D_t^\rho u_k(t) &= (D_t^\rho u(t), v_k) = -(A(D_t^\rho u(t)) + A^2(D_t^\rho u(t)) + Au(t), v_k) = \\
&= -(D_t^\rho u(t) + A(D_t^\rho u(t)) + u(t), Av_k) = -\lambda_k (D_t^\rho u(t) + u(t), v_k) - \lambda_k (A(D_t^\rho u(t)), v_k) = \\
&= -\lambda_k D_t^\rho u_k(t) - \lambda_k^2 D_t^\rho u_k(t) - \lambda_k u_k(t).
\end{aligned}$$

Это уравнение вместе со вторым условием в (10) приводит к задаче Коши

$$\begin{aligned}
D_t^\rho u_k(t) + \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} u_k(t) &= 0, \\
u_k(0+) &= 0.
\end{aligned}$$

Решая эту задачу (см. [12]), получаем $u_k(t) = 0$ для всех $k, k \geq 1$. Из полноты собственных функций $\{v_k\}$ следует $u(t) \equiv 0$. Теорема 1 полностью доказана. $\square$

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

В этом разделе докажем теорему 2 об обратной задаче нахождения правой части дробного уравнения типа Бенни–Люка. Напомним, что при изучении обратной задачи нахождения правой части уравнения мы рассматриваем функцию источника, не зависящую от времени. Информацию об обратных задачах для уравнений в частных производных можно найти в [15]. Информацию о дробных уравнениях можно найти в [16]–[19]. Заметим, что обратные задачи определения порядка производной можно найти в работах [20]–[24].

Доказательство теоремы 2. Существование решения.

Здесь предполагаем, что в задаче (1)–(2) функция f неизвестна. Как упоминали выше, для решения этой обратной задачи нам необходимо дополнительное условие. Примем в качестве такового условие (4). Предполагая, что f известна, при решении прямой задачи (1)–(2) получаем, что эта задача имеет решение вида (5). Теперь, используя условие (4), получаем

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho) \right) v_k = \psi.$$

Разложив функцию ψ в ряд по полной ортонормированной системе $\{v_k\}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho) \right) v_k = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k v_k.$$

Из этого равенства получим

$$\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho) + \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho) = \psi_k.$$

Откуда

$$f_k = \left(\frac{\psi_k}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} - \frac{\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho)}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right) (1 + \lambda_k + \lambda_k^2).$$

Обозначим через

$$F_n = \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\psi_k}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} - \frac{\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho)}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right) (1 + \lambda_k + \lambda_k^2) \right] v_k$$

частичную сумму ряда (6). Оценивая эту сумму с использованием равенства Парсеваля, получаем новую оценку

$$\begin{aligned} \|F_n\|^2 &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{\psi_k}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} - \frac{\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho)}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right|^2 |1 + \lambda_k + \lambda_k^2|^2 \leq \\ &\leq C \sum_{k=1}^n \left| \frac{\psi_k}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right|^2 |1 + \lambda_k + \lambda_k^2|^2 + C \sum_{k=1}^n \left| \frac{\varphi_k E_{\rho,1}(-\mu_k \tau^\rho)}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-\mu_k \tau^\rho)} \right|^2 |1 + \lambda_k + \lambda_k^2|^2. \end{aligned}$$

Учитывая следующие оценки функции Миттаг–Леффлера и неравенства

$$0 < E_{\rho,\mu}(-T^\rho) \leq E_{\rho,\mu}(-\mu_k \tau^\rho) < 1, \quad 0 < \tau \leq T,$$

получаем оценку

$$\|F_n\|^2 \leq \frac{2}{\tau^\rho E_{\rho,\rho+1}(-T^\rho)} \sum_{k=1}^n |\psi_k|^2 \lambda_k^4 + \frac{C}{\tau^\rho} \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2 \lambda_k^4.$$

Тогда

$$\|F_n\|^2 \leq C_1 \sum_{k=1}^n |\psi_k \lambda_k^2|^2 + C_2 \sum_{k=1}^n |\varphi_k \lambda_k^2|^2,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — константы. Эта оценка показывает, что если $\varphi, \psi \in D(A^2)$, то ряд (6) равномерно сходится. Таким образом, мы доказали существование функции $f \in H$ и показали, что она определяется рядом (6). В предыдущем разделе мы определили, что если функция f известна, то функция $u(t)$ может быть найдена по формуле (5). Таким образом, вопрос о существовании решения задачи решен. $\square$

Единственность решения. Предположим обратное, т.е. пусть $\{u_1(t), f_1\}$ и $\{u_2(t), f_2\}$ — два различных решения задачи (1)–(2), (4). Обозначив $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ и $f = f_1 - f_2$, учитывая уравнение (1), начальные условия и линейность дополнительного условия (4), получаем задачу

$$D_t^\rho u(t) + A(D_t^\rho u(t)) + A^2(D_t^\rho u(t)) + Au(t) = f, \quad (11)$$

$$u(0+) = 0, \quad (12)$$

$$u(\tau) = 0. \quad (13)$$

Предположим, что функция $u(t)$ является произвольным решением задачи (11)–(13) и $u_k(t) = (u(t), v_k)$. Согласно уравнению (11), так как A — самосопряженный оператор, а $\{v_k\}$ — система собственных функций, получаем равенство

$$D_t^\rho u_k(t) + \lambda_k D_t^\rho u_k(t) + \lambda_k^2 D_t^\rho u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k.$$

Учитывая условие (12), получаем задачу Коши

$$D_t^\rho u_k(t) + \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} u_k(t) = \frac{1}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} f_k,$$

$$u_k(+0) = 0.$$

Эта задача имеет решение (см. [12])

$$u_k(t) = \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} t^\rho E_{\rho, \rho+1}(-\mu_k t^\rho).$$

Если использовать дополнительное условие (13), то получаем равенство

$$u_k(\tau) = \frac{f_k}{1 + \lambda_k + \lambda_k^2} \tau^\rho E_{\rho, \rho+1}(-\mu_k \tau^\rho) = 0,$$

поскольку $\tau^\rho E_{\rho, \rho+1}(-\mu_k \tau^\rho) \neq 0$ при $\tau > 0$, $f_k = 0$ для всех $k \geq 1$. Так как собственные функции $\{v_k\}$ образуют полную ортонормированную систему в H , имеем $f = 0$. Поскольку $f_k = 0$, тогда получаем $u_k(t) = 0$ для всех $k \geq 1$. А если снова учесть, что собственные функции $\{v_k\}$ образуют полную ортонормированную систему в H , то имеем $u(t) \equiv 0$. Теорема 2 доказана полностью. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алгазин С.Д., Кийко И.А. *Флаттер пластин и оболочек* (Наука, М., 2006).
- [2] Замышляева А.А. *Математические модели соболевского типа высокого порядка*, Вестн. ЮУрГУ, Сер. Матем. моделиров. и программ. **7** (2), 5–28 (2014), DOI: 10.14529/mmp140201.
- [3] Benney D.J., Luke J.C. *On the interactions of permanent waves of finite amplitude*, Math. Phys. **43** (1–4), 309–313 (1964).
- [4] Stoker J.J. *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications* (Interscience Publ. Inc., New York, 1957).
- [5] Wehausen J.V., Laitone E.V. *Surface Waves*, in: Encyclopaed. Phys. **9**, 446–778 (Springer Verlag, 1960).

- [6] Юлдашев Т.К. *Об одной нелокальной обратной задаче для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вепней–Луке с вырожденным ядром*, Вестн. ТвГУ, Сер. Прикл. матем. (3), 19–41 (2018).
- [7] Yuldashev T.K., Rakhmonov F.D. *On a Benney–Luke type differential equation with nonlinear boundary value conditions*, Lobachevskii J. Math. **42** (15), 3761–3772 (2021).
- [8] Мегралиев Я.Т., Велиева Б.К. *Обратная краевая задача для линеаризованного уравнения Бенни–Люка с нелокальными условиями*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки **29** (2), 166–182 (2019).
- [9] Mokhtar Kirane, Abdissalam A. Sarsenbi *Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative*, Fractal and Fractional **7** (2), 131 (2023), DOI: 10.3390/fractalfract7020131.
- [10] Berezanskii Yu. *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators* (Translations of Mathematical Monographs) (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968).
- [11] Podlubny I. *Fractional differential equations* (Academic Press, San Diego, 1999).
- [12] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations* **204** (Elsevier, Amsterdam, 2006).
- [13] Lizama C. *Abstract Linear Fractional Evolution Equations* Fract. Diff. Equat. **2**, 465–497 (De Gruyter, Berlin, 2019).
- [14] Ashurov R.R., Fayziev Yu.E., Khushvaktov N.Kh. *Some problems for the Barenblatt–Zheltov Kochina*, Bull. Inst. Math. **5**, 97–104 (2022).
- [15] Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*, Inverse and Ill-posed Problems Ser. **55** (De Gruyter, Berlin, 2011).
- [16] Ashurov R., Fayziev Yu. *On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations*, Fractal and Fractional **6** (1), 41 (2022), DOI: 10.3390/fractalfract6010041.
- [17] Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т. *Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии*, Дифференц. уравнения **56** (12), 1596–1609 (2020).
- [18] Ashurov R., Shakarova M. *Time-Dependent source identification problem for fractional Schrödinger type equations*, Lobachevskii J. Math. **43** (5), 303–315 (2022).
- [19] Ashurov R., Shakarova M. *Time-dependent source identification problem for a fractional Schrödinger equation with the Riemann–Liouville derivative*, Ukr. Math. J. **75** (7), 997–1015 (2023).
- [20] Ashurov R., Umarov S. *Determination of the order of fractional derivative for subdiffusion equations*, Fract. Calc. Appl. Anal. **23** (6), 1647–1662 (2020), DOI: 10.1515/fca-2020-0081/ivrm/pravila.
- [21] Alimov Sh., Ashurov R. *Inverse problem of determining an order of the Caputo time-fractional derivative for a subdiffusion equation*, J. Inverse and Ill-posed Problems **28** (5), 651–658 (2020), DOI: 10.1515/jiip-2020-0072.
- [22] Ashurov R.R., Fayziev Yu.E. *Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equations*, Eurasian Math. J. **13** (1), 19–31 (2022).
- [23] Ashurov R.R., Fayziev Yu.E. *Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation*, Lobachevskii J. Math. **42** (3), 508–516 (2021), DOI: 10.1134/S1995080221030069.
- [24] Ашуров Р.Р., Файзиев Ю.Э. *Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении*, Матем. заметки **110** (6), 824–836 (2021), DOI: 10.4213/mzml3090.

Юсуф Эргашевич Файзиев

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
ул. Университетская, д. 4, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан;
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, д. 17, г. Карши, 180119, Республика Узбекистан,
e-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

Шамшод Тургунбоевич Пирматов

Ташкентский государственный технический университет,
ул. Университетская, д. 2, г. Ташкент, 100095, Республика Узбекистан,
e-mail: shamshod@rambler.ru

Хусан Турсунович Дехконов

*Наманганский государственный университет,
ул. Уйчи, д. 316, г. Наманган, 160119, Республика Узбекистан,*

e-mail: khusanboyd4686@gmail.com

Yu.E. Fayziyev, Sh.T. Pirmatov, and Kh.T. Dekhkonov

Forward and inverse problems for the Benney–Luke type fractional equations

Abstract. In the paper, we study direct and inverse problems for fractional partial differential equations of the Benney–Luke type. The conditions for the existence and uniqueness of solutions to the Cauchy problems for a Benney–Luke type equation of fractional order are derived. In addition, the inverse problem of finding the right-hand side of the equation is investigated.

Keywords: Benney–Luke equation, fractional order derivative, direct and inverse problem.

Yusuf Ergashevich Fayziev

*National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek,
4 Universitetskaya str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan;
Karshi State University,
17 Kuchabag str., Karshi, 180119 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

Shamshod Turgunboevich Pirmatov

*Tashkent State Technical University,
2 Universitetskaya str., Tashkent, 100095 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: shamshod@rambler.ru

Khusan Tursunovich Dekhkonov

*Namangan State University,
316 Uychi str., Namangan, 160119 Republic of Uzbekistan,*

e-mail: khusanboyd4686@gmail.com