Известия вузов. Математика
2024, № 9, с. 74–81

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Б.Ш. РАХИМОВ

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель системы управления в виде дифференциального включения. Исследована проблема управляемости данной системы для подвижного терминального множества $M = M(t)$. Для этой модели динамической системы определено понятие множества M-управляемости. Используя методы теории дифференциальных включений и многозначных отображений, изучены структурные и топологические свойства M-управляемости.

Ключевые слова: динамическая система, дифференциальное включение, задача управляемости, терминальное множество, множество управляемости.

УДК: 517.977.55

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-74-81

Введение

Дифференциальные включения представляют большой интерес как удобный математический аппарат исследования в теории динамических систем управления [1]–[3]. Они имеют широкие приложения в теории дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, дифференциальных играх, задачах управления в условиях неточности информации и неопределенности параметров и других вопросах прикладной математики. Возрастает интерес к таким моделям динамических систем и расширяется сфера их исследования. Изучаются функционально-дифференциальные включения, дифференциальные включения с запаздываниями, импульсные дифференциальные включения, дифференциальные включения с нечеткой правой частью, управляемые дифференциальные включения и другие классы таких моделей [4]–[7].

Важной характеристикой динамической системы управления является ее управляемость, т. е. возможность достижения требуемого терминального состояния с помощью управляемых движений — траекториями, выходящих из множества начальных состояний. В теории управления достаточно важное внимание уделено вопросам управляемости для моделей динамических систем с различными математическими описаниями и содержаниями. Для отдельных классов стационарных и нестационарных систем найдены необходимые и достаточные условия управляемости [8]–[10]. В теории управления изучаются также проблемы условной, относительной управляемости и локальной управляемости [11]–[13].

Задача управляемости динамических систем имеет новое содержание для моделей, описываемых различными классами дифференциальных включений. Отдельные свойства типа

Поступила в редакцию 27.10.2023, после доработки 27.10.2023. Принята к публикации 20.03.2024.

локальной управляемости и управляемости в малом для систем, описываемых дифференциальными включениями, изучены в работах [1], [12]. Вопросам управляемости ансамбля траекторий дифференциальных включений с параметрами управления посвящены работы [14]–[16].

Для динамических систем одной из актуальных проблем является изучение свойства управляемости допустимых траекторий дифференциального включения относительно заданных терминальных состояний. Исследование задачи управляемости для дифференциальных включений способствует развитию вопроса о необходимых и достаточных условиях управляемости динамических систем. Свойство управляемости динамической системы приобретает особый смысл в тех случаях, когда терминальное множество подвижное, т. е. может изменять свое положение в зависимости от времени. Представляет большой интерес изучение структурных свойств множества управляемости дифференциальных включений относительно подвижного терминального множества [17], [18].

1. Материалы и методы исследования

Рассмотрим математическую модель динамической системы в виде дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x). \tag{1}$$

Под допустимыми траекториями рассматриваемой системы будем понимать каждую абсолютно непрерывную на некотором отрезке $T = [t_0, t_1]$ n-вектор-функцию $x = x(t)$, удовлетворяющую почти всюду на $T = [t_0, t_1]$ заданному дифференциальному включению.

Пусть задано подвижное, т. е. зависящее от времени, терминальное множество $M = M(t)$, $t \geq t_0$.

Определение 1. Множество всех начальных состояний $x_0 \in R^n$, из которых дифференциальное включение (1) управляемо в подвижное терминальное состояние $M = M(t)$ на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$, т. е. существует траектория $x(t)$, $T = [t_0, t_1]$, такая, что $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) \in M(t_1)$, называется множеством MT-управляемости дифференциального включения.

Определение 2. Множеством M-управляемости дифференциального включения называется совокупность всех начальных состояний $x_0 \in R^n$, из которых оно управляемо в терминальное множество $M = M(t)$ на некотором конечном отрезке времени T.

Пусть $X(t_0, t_1, x_0, F)$ — множество достижимости дифференциального включения (1) из начальной точки $x_0 \in R^n$ в момент времени $t_1 > t_0$, т. е. множество всевозможных точек $x_1 \in R^n$, для которых существуют траектории $x = x(t)$, $t \in T = [t_0, t_1]$, такие, что $x(t_0) = x_0$ и $x(t_1) = x_1$.

Из определения 1 ясно, что точка $x_0 \in R^n$ является точкой MT-управляемости дифференциального включения (1) тогда и только тогда, когда существует $t_1 > t_0$ такой, что $X(t_0, t_1, x_0, F) \cap M(t_1) \neq \varnothing$.

Таким образом, для изучения свойства множества M-управляемости дифференциального включения (1) следует изучить множества вида

$$K(t_0, t_1, M, F) = \{\xi \in R^n : X(t_0, t_1, \xi, F) \cap M(t_1) \neq \varnothing\}, \quad t_1 > t_0.$$

Ясно, что свойства последнего зависят от структуры и топологических свойств терминального множества $M = M(t)$ и многозначного отображения $F = F(t, x)$.

Пусть $F(t,x) = A(t)x + B(t)$ $\forall (t,x) \in R^1 \times R^n$, где $A = A(t)$ — $n \times n$-матрица, $B = B(t)$ — многозначное отображение. Тогда получим линейное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t). \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) элементы матрицы $A(t)$ измеримы на любом $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty]$ и $||A(t)|| \leq a(t)$, где $a(\cdot) \in L_1(T)$;

2) при каждом $t \geq t_0$ множества $B(t) \subset R^n$ компактны и многозначное отображение $t \to B(t)$ измеримо на произвольном отрезке $T = [t_0, t_1] \subset [t_0, +\infty]$ и $||B(t)|| \leq b(t)$, где $b(\cdot) \in L_1(T)$.

Относительно терминального множества $M = M(t)$, $t \geq t_0$, будем предполагать, что оно — выпуклый компакт и непрерывно зависит от времени $t \geq t_0$. При изучении свойства множества M-управляемости дифференциального включения (2) будем использовать результаты теории многозначных отображений и теории дифференциальных включений.

Используем следующие обозначения для дифференциального включения (2): $K(t_0, t_1, M, A, B)$– множество MT-управляемости при заданном терминальном множестве $M = M(t)$, $t \geq t_0$; $W(M, A, B)$ — множество M-управляемости; $W_0(A, B)$ — множество нуль-управляемости.

Обозначим через $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ множество достижимости дифференциального включения (2) для начальной точки $\xi \in R^n$ в момент времени $t_1 > t_0$. Из приведенных определений ясно, что

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \left\{\xi \in R^n : X_T(t_1, \xi, A, B) \cap M(t_1) \neq \varnothing\right\},$$

$$W(M, A, B) = \bigcup_{t_1 > t_0} K(t_0, t_1, M, A, B), \quad W_0(A, B) = \bigcup_{t_1 > t_0} K_0(t_0, t_1, A, B).$$

Известно [14], что для множества $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ справедлива формула

$$X(t_0, t_1, \xi, A, B) = \Phi(t, t_0)\xi + \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) d\tau, \tag{3}$$

где $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица решений уравнения $\dot{x} = A(t)x$, $t \in T$. Из этой формулы и свойств интеграла от многозначных отображений легко следует, что множество $X(t_0, t_1, \xi, A, B)$ является выпуклым компактом из R^n.

2. Результаты исследования

В изучении свойства множества управляемости дифференциального включения (2) будем использовать представление множества MT-управляемости через параметры системы с помощью интеграла от многозначного отображения.

Теорема 1. *Множество $K(t_0, t_1, M, A, B)$ представимо формулой*

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt + \Phi_A(t_0, t_1) M(t_1). \tag{4}$$

Доказательство. Соотношение $X_T(t_1, \xi, A, B) \cap M(t_1) \neq \varnothing$ равносильно включению $0 \in X_T(t_1, \xi, A, B) - M(t_1)$. Поэтому

$$K(t_0, t_1, \xi, A, B) = \left\{\xi \in R^n : \ 0 \in X_T(t_1, \xi, A, B) - M(t_1)\right\}. \tag{5}$$

Используя формулу (3), получим

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=\left\{\xi\in R^n:\,0\in\Phi_A(t_1,t_0)\xi+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt-M(t_1)\right\}=$$

$$=\left\{\xi\in R^n:\,-\Phi_A(t_1,t_0)\xi\in\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt-M(t_1)\right\}. \quad (6)$$

Соотношение

$$-\Phi_A(t_1,t_0)\xi\in\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt-M(t_1)$$

эквивалентно включению

$$\xi\in-\Phi_A^{-1}(t_1,t_0)\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)B(t)dt-M(t_1)\right]. \quad (7)$$

В силу свойств фундаментальной матрицы имеем

$$\Phi_A^{-1}(t_1,t_0)={}_A(t_0,t_1),\quad \Phi_A(t_0,t_1)\Phi_A(t_1,t)=\Phi_A(t_0,t).$$

Учитывая эти равенства, соотношение (7) запишем в виде

$$\xi\in-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt+\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1).$$

Теперь, нетрудно заметить, что формула (6) принимает вид (4). □

Следствие 1. Если $M(t_1)$ — выпуклый компакт, то $K(t_0,t_1,M,A,B)$ также является выпуклым компактом из R^n. Если множества $M(t_1)$ и $\operatorname{conv}B(t)$ строго выпуклы при $t\in T=[t_0,t_1]$, то $K(t_0,t_1,M,A,B)$ — строго выпуклое множество.

Пусть $X^0(t_0,t_1,A,B)$ — множество достижимости системы (2) для начального состояния $x_0=0$, т. е. $X^0(t_0,t_1,A,B)=X(t_0,t_1,0,A,B)$. Тогда учитывая формулу (3), из теоремы 1 получим

$$K(t_0,t_1,M,A,B)=\Phi_A(t_0,t_1)[X^0(t_0,t_1,A,-B)+M(t_1)]. \quad (8)$$

В случае, когда $M=\{0\}$, вместо $K(t_0,t_1,\{0\},A,B)$ запишем $K_0(t_0,t_1,A,B)$. Из формулы (4) ясно, что

$$K_0(t_0,t_1,A,B)=-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B(t)dt. \quad (9)$$

Тогда формулу (4) можно записать в виде

$$K(t_0,t_1,,A,B)=K_0(t_0,t_1,A,B)+\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1). \quad (10)$$

Если $A(t)\equiv A,\ t\in T=[t_0,t_1]$, то $\Phi_{-A}(t_1,t_0)=\Phi_A(t_0,t_1)$. Тогда из (9) получим

$$K_0(t_0,t_1,A,B)=\Phi_A(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_1,t)(-B(t))dt=\Phi_{-A}(t_1,t_0)X^0(t_0,t_1,A,-B).$$

Следствие 2. Справедлива формула

$$\mathrm{co}K(t_0, t_1, M, A, B) = K(t_0, t_1, \mathrm{co}M, A, B).$$

Следствие 3. Пусть $M(t) = \Phi_{\mathcal{A}}(t, t_0)M_0$. Тогда

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = K_0(t_0, t_1, A, B) + M_0,$$

$$W(M, A, B) = W_0(A, B) + M_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$ *при* $t \in T = [t_0, t_1]$. *Тогда*

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \bigcup_{\xi \in M(t_1)} X(t_0, t_1, \xi, -A, -B). \tag{11}$$

Доказательство. Если $A(t) \equiv A$, то $\Phi_A(t, \tau) = e^{A(t-\psi)}$ и, поэтому, $\Phi_{-A}(t, \tau) = \Phi_A(\tau, t)$. Тогда используя формулу (4), легко можно убедиться, что справедливо представление

$$\bigcup_{\xi \in M(t_1)} X(t_0, t_1, \xi, -A, -B) = \Phi_A(t_0, t_1)M(t_1) - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t, t_1)Bdt. \tag{12}$$

Поскольку $\Phi_A(t, \tau) = e^{A(t-\psi)}$, имеет место равенство

$$\Phi_A(t_1 + t_0 - s, t_1) = \Phi_A(t_0, s) \ \forall s \in [t_0, t_1].$$

Учитывая это и сделав замену переменных $s = t_1 + t_0 - t$ в интеграле равенства (12), получим

$$\bigcup_{\xi \in M(t_1)} X(t_0, t_1, \xi, -A, -B) = \Phi_A(t_0, t_1)M(t_1) - \int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, s)Bds.$$

В силу теоремы 1 правая часть последнего равенства есть множество $K(t_0, t_1, M, A, B)$. Итак, справедлива формула (11). $\square$

Теорема 3. *Пусть* $t_0 < t_1 < t_2$, *множества* $M(t_1)$ *и* $M(t_2)$ — *выпуклые компакты. Тогда соотношение*

$$K(t_0, t_2, M, A, B) \subset K(t_0, t_1, M, A, B) \tag{13}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

$$K(t_1, t_2, M, A, B) \subset M(t_1). \tag{14}$$

Доказательство. Действительно, если имеет место соотношение (13), то учитывая (4), запишем его так:

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t)B(t)dt + \Phi_A(t_0, t_1)K(t_1, t_2, M, A, B) \subset -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t)B(t)dt + \Phi_A(t_0, t_1)M(t_1). \tag{15}$$

Теперь используя выпуклость и компактность множества (9), имеем

$$\Phi_A(t_0, t_1)K(t_1, t_2, M, A, B) \subset \Phi_A(t_0, t_1)M(t_1). \tag{16}$$

Следовательно, имеет место (14).

Обратно, если $K(t_1, t_2, M, A, B) \subset M(t_1)$, то справедливо соотношение (16) и далее получим (15), т. е. имеет место (13). $\square$

Теорема 4. *Пусть* $M(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) M_i(t)$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) = 1$, $\alpha_i(t) \geq 0$, $i = \overline{1,k}$, $t \geq t_0$. *Тогда*

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) K(t_0, t_1, M_i, A, B). \tag{17}$$

Доказательство. Полагая в формуле (4) $M(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) M_i(t)$, имеем

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = -\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt + \Phi_A(t_0, t_1) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) M_i(t_1).$$

Так как интеграл $\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt$ является выпуклым компактом и

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t) = 1,\ \alpha_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,k},$$

то

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) \right) \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt.$$

Следовательно,

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) \left[-\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt \right] + \Phi_A(t_0, t_1) \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) M_i(t_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(t_1) \left[-\int_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0, t) B(t) dt + \Phi_A(t_0, t_1) M_i(t_1) \right].$$

Теперь в последней формуле используя формулу (4), получим требуемое (17).

□

Теорема 5. *Пусть* $B(t) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i B_i(t)$, *где* $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,k}$, *и множество* $M_i(t_1)$ *выпукло. Тогда*

$$K(t_0, t_1, M, A, B) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i K(t_0, t_1, M, A, B_i). \tag{18}$$

Доказательство. В силу выпуклости множества $M(t_1)$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) \Phi_A(t_0, t_1) M(t_1) = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i \Phi_A(t_0, t_1) M(t_1)).$$

Теперь используя формулу (4), имеем

$$K(t_0,t_1,M,A,B) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \Phi_A(t_0,t)\sum_{i=1}^{k}\alpha_i B_i(t)dt + \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B_i(t)dt + \sum_{i=1}^{k}(\alpha_i\Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi_A(t_0,t)B_i(t)dt + \Phi_A(t_0,t_1)M(t_1)\right] = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i K(t_0,t_1,M,A,B_i),$$

т. е. имеет место равенство (18).

□

3. Обсуждение

Из полученных результатов следует особо отметить теорему 1, в которой дана формула представления (4) для множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$. Используя эту формулу, изучены свойства множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$, дающие представление об его структуре. Теорема 2 устанавливает связь между множеством MT-управляемости системы (2) и множеством достижимости соответствующей системы $\dot{x} \in -A(t)x - B(t)$ при условии стационарности дифференциального включения (2), т. е. когда $A(t) \equiv A$, $B(t) \equiv B$. Теорема 3 дает представление о динамике множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$ в зависимости от времени $t \geq t_0$. Теоремы 4 и 5 показывают выпуклый характер зависимости множества MT-управляемости от переменного терминального множества $M(t)$ и многозначного отображения $B(t)$. Изученные свойства множества $K(t_0,t_1,M,A,B)$ позволяют выяснение структуры множества M-управляемости дифференциальных включений.

Заключение

В работе исследована проблема управляемости для математической модели системы управления в виде линейного дифференциального включения. Рассмотрен случай, когда терминальное множество подвижное, т. е. зависит от времени: $M = M(t)$. Для этой модели динамической системы введено понятие множества M-управляемости. Изучены структурные и топологические свойства M-управляемости.

Литература

[1] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. *Дифференциальные включения и оптимальное управление*, Тр. МИАН **169**, 194–252 (1985).

[2] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений* (КомКнига, М., 2005).

[3] Половинкин Е.С. *Многозначный анализ и дифференциальные включения* (Физматлит, М., 2015).

[4] Aseev S.M. *An optimal control problem for a differential inclusion with state constraint. Smooth approximations and necessary optimality conditions*, J. Math. Sci. **103** (6), 670–685 (2001).

[5] Булгаков А.И. *Функционально-дифференциальные включения с невыпуклой правой частью*, Дифференц. уравнения **26** (11), 1872–1878 (1990).

[6] Plotnikov A.V., Komleva T.A. *Piecewise constant controlled linear fuzzy differential inclusions*, Univ. J. Appl. Math. **1** (2), 39–43 (2013).

[7] Отакулов С. *Задачи управления ансамблем траекторий дифференциальных включений* (Lambert Acad. Publ., 2019).

[8] Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления* (Наука, М., 1972).
[9] Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. *Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа* (Изд-во БГУ, Минск, 1973).
[10] Ащепков Л.Т. *Оптимальное управление линейными системами*: учеб. пособие (Изд-во ИГУ, Иркутск, 1982).
[11] O'Connor D.A., Tarn T.J. *On the function space controllability of linear neutral systems*, SIAM J. Control Optim. **21** (2), 306–329 (1983).
[12] Margheri A. *On the 0-local controllability of a linear control system*, J. Opt. Theory Appl. **66** (1), 61–69 (1990).
[13] Благодатских В.И. *О локальной управляемости дифференциальных включений*, Дифференц. уравнения **9** (2), 361–362 (1973).
[14] Otakulov S., Rahimov B. Sh. *About the property of controllability an ensamble of trajectories of differential inclusion*, IEJRD **5** (4), 366–374 (2020).
[15] Отакулов С., Рахимов Б.Ш. *Задача управления ансамблем траекторий дифференциального включения с параметрами при условии подвижности терминального множества*, Научн. вестн. СамГУ. Сер. точн. наук (1), 59–65 (2021).
[16] Otakulov S., Kholiyarova F.Kh. *About conditions of controllability of ensamble trajectories of differential inclusion with delay*, Internat. J. Stat. Appl. Math. **5** (3), 59–65 (2020).
[17] Otakulov S., Rahimov B.Sh., Haydarov T.T. *On the property of relative controllability for the model of dynamic system with mobile terminal set*, AIP Conf. Proc. **2432** (1), 1–5, 030062 (2022).
[18] Otakulov S., Rahimov B. Sh. *On the structural properties of the reachability set of a differential inclusion*, in : Proc. Internat. Conf. Res. Innovat. Multidisc. Sci., 150–153 (New York, USA, March 2021).

Бойхуроз Шермухаммадович Рахимов

Джизакский политехнический институт,
ул. И. Каримова, д. 4, г. Джизак, 130100, Республика Узбекистан,

e-mail: raximovboyxoroz@gmail.com

B.Sh. Rahimov

Properties of the controllability set of one class of differential inclusions

Abstract. In this paper we consider a mathematical model of control system in the form differential inclusion. The problem of controllability of this system under the condition of mobility of the terminal set $M = M(t)$ is researched. For this model of a dynamic system we define a notion of the M-controllability set. Using the methods of the theory of differential inclusions and multi-valued maps, the structural and topological properties of the M-controllability set are studied.

Keywords: dynamic system, differential inclusion, control problem, terminal set, controllability set.

Boyhuroz Shermuhammadovich Rahimov

Jizzakh Polytechnic Institute,
4 I. Karimov str., Jizzakh, 130100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: raximovboyxoroz@gmail.com