Известия вузов. Математика
2024, № 9, с. 56–73
https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

П.Г. ПОЦЕЙКО, Е.А. РОВБА

О РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ СУММАМИ АБЕЛЯ–ПУАССОНА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЕВА

Аннотация. Исследуются рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля–Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышева с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Устанавливается интегральное представление соответствующих приближений.

Изучаются рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (1/2,\ 1)$, суммами Абеля–Пуассона. Получены интегральное представление приближений и оценки приближений с учетом положения точки на отрезке. Установлено асимптотическое выражение при $r \to 1$ мажоранты приближений, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания этой мажоранты. В качестве следствия приведены асимптотические оценки приближений на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции суммами Абеля–Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Ключевые слова: сопряженная функция, ряд Фурье–Чебышева, сумма Абеля–Пуассона, поточечные и равномерные оценки, наилучшее приближение, метод Лапласа.

УДК: 517.5

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-56-73

Введение

При решении различных задач математики и ее приложений возникают интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи различных преобразований приводятся к виду

$$\hat{f}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in [-1,\ 1], \tag{1}$$

где интеграл в правой части понимается в смысле главного значения по Коши и для его существования достаточно потребовать, чтобы функция $f(t)$ удовлетворяла на отрезке $[-1,\ 1]$ условию Липшица любого порядка [1], [2]. Преобразование $\hat{f}(x)$ можно рассматривать как

Поступила в редакцию 23.02.2023, после доработки 15.05.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», №20162269 (Республика Беларусь).

один из вариантов определения сопряженной функции, заданной на отрезке $[-1,\ 1]$. Некоторый аналитический обзор литературы, относящейся к полиномиальной аппроксимации сопряженных функций вида (1), а также их периодических аналогов, содержится в [3].

В работе [4] введены сопряженные ряды Фурье–Чебышева по одной системе ортогональных рациональных функций Чебышева–Маркова с двумя геометрически различными полюсами и изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженных функций вида (1) частичными суммами этих рядов. В частности, найдены оценки равномерных приближений в случае, когда плотность $f(t)$ имеет на отрезке $[-1,\ 1]$ степенную особенность. Установлено, что специальным выбором параметра аппроксимирующей функции можно добиться большей скорости равномерных рациональных приближений в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами.

В работе [5] на множестве суммируемых на отрезке $[-1,\ 1]$ с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица любого порядка, был введен сопряженный рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышева с произвольным количеством действительных полюсов и исследованы некоторые его аппроксимационные свойства. В частности, получено ([5], т. 1) его интегральное представление $\Bigg($в статье [5], с. 45, формула (4), напечатано: $\lambda_n(y)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1-\alpha_k^2}{1+2\alpha_k\cos y+\alpha_k^2}$, должно быть:

$$\lambda_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1+2|\alpha_k|\cos(y-\arg\alpha_k)+|\alpha_k|^2}\Bigg)$$

$$\hat{s}_n(f,\ x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos v)\frac{\cos\dfrac{v-u}{2}-\cos\lambda_n(v,\ u)}{\sin\dfrac{v-u}{2}}\,dv,\quad x=\cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(v,\ u)=\int\limits_{u}^{v}\left(\frac{1}{2}+\lambda_n(y)\right)dy,\quad \lambda_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2},\quad |z_k|<1. \tag{3}$$

Оператор $\hat{s}_n : f\to\hat{\mathbb{R}}_n(A)$, где $\hat{\mathbb{R}}_n(A)$ — множество рациональных функций вида

$$\frac{\sqrt{1-x^2}p_{n-1}(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_kx)},\quad p_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1},\ a_k=\frac{2z_k}{1+z_k^2},$$

A — множество параметров $(z_1,\ z_2,\ldots,z_n)$, $\hat{s}_n(1,\ x)\equiv 0$. Если среди чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ есть комплексные, то это множество содержит и им сопряженные. Положив в представлении (2) значения параметров $z_k=0,\ k=1,\ldots,n$, выражение $\hat{s}_n(f,\ x)$ есть интегральное представление частичной суммы сопряженного полиномиального ряда Фурье–Чебышева.

Вместе с интегральным представлением (2) в работе [5] установлены поточечные и равномерные оценки рациональных приближений на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma, \gamma>1/2$, в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции.

Аппроксимационные свойства сумм Абеля–Пуассона рядов Фурье в полиномиальной аппроксимации хорошо известны как в периодическом [6]–[9], так и в алгебраическом [10], [11] случаях. Суммы Абеля–Пуассона сопряженных рядов Фурье также нашли применение в полиномиальной аппроксимации сопряженных периодических функций [12]–[15].

В работе [16] (см. также [3]) были введены и изучены суммы Абеля–Пуассона сопряженных рядов Фурье–Чебышева по одной системе рациональных функций Чебышева–Маркова с двумя геометрически различными полюсами, и в продолжении исследований рациональных аппроксимаций сопряженных функций на отрезке, начатых в работе [4], установлены оценки приближений сопряженной функции вида (1) с плотностью $f(t)$, имеющей на отрезке $[-1,\ 1]$ степенную особенность. В указанном выше случае аппроксимирующая рациональная функция также имеет лишь два геометрически различных полюса в расширенной комплексной плоскости.

Рациональный интегральный оператор (2) в общем случае не ограничивается определенным количеством полюсов в расширенной комплексной плоскости. В связи с этим представляет интерес исследование аппроксимационных свойств сумм Абеля–Пуассона рациональных интегральных операторов (2) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов. В работе устанавливается интегральное представление приближений и исследуются приближения сопряженной функции с плотностью $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (1/2,\ 1)$.

1. Суммы Абеля–Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышева

Пусть q — произвольное натуральное число, A_q есть подмножество A параметров таких, что среди чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ровно q различных, и кратность каждого параметра равна m, $n = mq, n \geq q$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости.

Составим сумму

$$\hat{P}_{r,\ q}(f,\ x) = (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \hat{s}_{kq}(f,\ x), \quad x \in [-1, 1],\ r \in (0,\ 1), \tag{4}$$

где $\hat{s}_{kq}(f,\ x)$ определена в (2).

Выражение (4) естественно ([17], с. 403) назвать суммами Абеля–Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышева с q-геометрически различными полюсами.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К.Н. Лунгу [18], [19].

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ x) = \hat{f}(x) - \hat{P}_{r,\ q}(f,\ x), \quad x \in [-1,\ 1],$$
$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ A_q) = \left\| \hat{f}(x) - \hat{P}_{r,\ q}(f,\ x) \right\|_{C[-1,\ 1]}, \quad r \in (0,\ 1).$$

Теорема 1. *Для приближений сопряженной функции* (1) *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *суммами Абеля–Пуассона* (4) *имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ x) = \frac{1-r}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\dfrac{v-u}{2} - r\cos\left(\dfrac{v-u}{2} - \lambda_q^*(v,\ u)\right)}{\sin\dfrac{v-u}{2}(1 - 2r\cos\lambda_q^*(v,\ u) + r^2)}\,dv, \quad x = \cos u, \tag{5}$$

где

$$\lambda_q^*(v,\ u) = \int_u^v \sum_{k=1}^q \frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}\,dy. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим приближения на отрезке $[-1,1]$ сопряженной функции (1) сопряженным рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышева (2) ([5], с. 49)

$$\hat{\delta}_n(f,\ x,\ A) = \hat{f}(x) - \hat{s}_n(f,\ x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\lambda_n(v,\ u)}{\sin\frac{v-u}{2}}\,dv, \quad x=\cos u, \quad x\in[-1,\ 1], \tag{7}$$

где величина $\lambda_n(v,\ u)$ определена в (3). Отметим, что интеграл справа является сингулярным и понимается в смысле главного значения по Коши. Нетрудно также показать, что

$$\hat{\delta}_n(1,\ x,\ A) = 0.$$

Покажем, что величины $\hat{\delta}_n(f,\ x,\ A),\ n=0,1,2,\ldots$, ограничены в совокупности. Действительно, используя последнее равенство, получим

$$\hat{\delta}_n(f,\ x,\ A) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)-f(\cos u)}{\sin\frac{v-u}{2}}\cos\lambda_n(v,\ u)\,dv, \quad x=\cos u, \quad x\in[-1,\ 1].$$

Плотность f по условию существования сопряженной функции удовлетворяет условию Липшица некоторого порядка $\gamma\in(0,\ 1]$. Следовательно,

$$|\hat{\delta}_n(f,\ x,\ A)| \le \frac{L}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|\cos v-\cos u|^\gamma}{\left|\sin\frac{v-u}{2}\right|}\,dv, \quad x=\cos u, \quad x\in[-1,\ 1],$$

где L — константа Липшица.

Применив несложные методы для оценки интеграла справа, получим

$$|\hat{\delta}_n(f,\ x,\ A)| \le \frac{L2^\gamma}{\gamma}, \quad \gamma\in(0,\ 1],\ x\in[-1,\ 1],\ n=0,1,2\ldots.$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. В случае q-геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции представление (7) примет вид

$$\hat{\delta}_{mq}(f,\ x,\ A_q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(\cos v)-f(\cos u))\frac{\cos\left(\frac{v-u}{2}+m\lambda_q^*(v,\ u)\right)}{\sin\frac{v-u}{2}}\,dv,\ x=\cos u,\ x\in[-1,\ 1],$$

где $n=mq$, величина $\lambda_q^*(v,\ u)$ определена в (6).

Из последнего представления, учитывая, что (см., например, [20], лемма 5)

$$\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} = \mathrm{e}^{i\lambda_q^*(v,\ u)}, \quad \omega_q(\zeta) = \prod_{k=1}^q\frac{\zeta+z_k}{1+\bar{z}_k\zeta}, \quad \xi=\mathrm{e}^{iu}, \zeta=\mathrm{e}^{iv},$$

нетрудно получить

$$\hat{\delta}_{mq}(f,\ x,\ A_q) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\cos v)-f(\cos u)}{\zeta-\xi}\left(\zeta\frac{\omega_q^m(\zeta)}{\omega_q^m(\xi)}+\xi\frac{\omega_q^m(\xi)}{\omega_q^m(\zeta)}\right)dv,\ \xi=\mathrm{e}^{iu}, \zeta=\mathrm{e}^{iv}, x=\cos u. \tag{8}$$

С другой стороны, умножим правую и левую части равенства

$$\hat{\delta}_{kq}(f,\ x,\ A_q) = \hat{f}(x) - \hat{s}_{kq}(f,\ x), \quad x \in [-1, 1],\ k = 0, 1, \ldots,$$

на r^k, $r \in (0,\ 1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, просуммируем по k от 0 до $+\infty$ и умножим на $(1-r)$. Получим

$$(1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \hat{\delta}_{kq}(f,\ x,\ A_q) = \hat{f}(x) - (1-r)\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \hat{s}_{kq}(f,\ x) = \hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ x), \quad x \in [-1,\ 1]. \tag{9}$$

Подставим соотношение (8) в (9). Ввиду равномерной ограниченности величин $\hat{\delta}_{kq}(f,\ x,\ A_q)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, в силу признака Вейерштрасса ряд слева в (9) будет сходиться равномерно при всех $x \in [-1,\ 1]$ для любого фиксированного $r \in (0,\ 1)$. Следовательно, возможна замена порядка суммирования и интегрирования. Выполнив указанное действие, получим

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ x) = \frac{(1-r)i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v) - f(\cos u)}{\zeta - \xi}\left[\zeta \sum_{k=0}^{+\infty}\left(r\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k + \xi\sum_{k=0}^{+\infty}\left(r\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right] dv.$$

Отметим, что справа находится сингулярный интеграл, понимаемый в смысле главного значения по Коши. Ряды в квадратных скобках представляют собой суммы геометрических прогрессий с соответствующими знаменателями $|r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(\zeta)| < 1$ и $|r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}| < 1$, где $\xi = \mathrm{e}^{iu}$, $\zeta = \mathrm{e}^{iv}$, $r \in (0,\ 1)$. Следовательно,

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ x) = \frac{(1-r)i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\cos v) - f(\cos u)}{\zeta - \xi}\left[\frac{\zeta}{1 - r\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)}} + \frac{\xi}{1 - r\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}}\right] dv. \tag{10}$$

Отсюда, учитывая, что $\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(1,\ x) = 0$, после соответствующих алгебраических преобразований находим

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f,\ x) = \frac{(1-r)i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\zeta + \xi - r[\xi\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} + \zeta\omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}]}{(\zeta - \xi)(1 - r[\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} + \omega_q(\xi)\overline{\omega_q(\zeta)}] + r^2)}\, dv, \quad x = \cos u.$$

Умножив числитель и знаменатель подинтегрального выражения на $2\sqrt{\xi\zeta}$ и заметив, что $\omega_q(\zeta)\overline{\omega_q(\xi)} = \mathrm{e}^{i\lambda_q^*(v,\ u)}$, где $\lambda_q^*(v,\ u)$ из (6), придем к (5). $\square$

В теореме 1 положим значения всех параметров $z_k = 0$, $k = 1,\ 2, \ldots, q$. Тогда величина $\hat{\varepsilon}_{r,\ 0}(f,\ x) = \hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f,\ x)$ – приближения сопряженной функции (1) суммами Абеля–Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Следствие 1. Имеет место интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f,\ x) = \frac{(1-r)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{dv}{\operatorname{tg}\dfrac{v-u}{2}(1 - 2r\cos(v-u) + r^2)}, \quad x = \cos u.$$

Эта величина встречалась, например, в работе [21].

2. Приближения сопряженной функции с плотностью, имеющей степенную особенность

Изучим приближения суммами Абеля–Пуассона (4) сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x) = (1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2,\ 1)$. Пусть параметры аппроксимирующей рациональной функции $\{z_k\}_{k=1}^q$ имеют вид

$$z_k \mapsto -\alpha_k,\ \alpha_k \in [0,\ 1), \quad k = 1, 2, \ldots, q.$$

Теорема 2. *Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля–Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышева с q-геометрически различными полюсами имеют место*

1) *интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f_\gamma,\ x) = -\frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\sin\psi_r(x,\ t)\,dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}\sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)}}, \tag{11}$$

где

$$\psi_r(x,\ t) = \arg\frac{\xi}{(1-t\xi)(1-r\omega_q(t)\omega_q(\xi))}, \quad \omega_q(t) = \prod_{k=1}^q \frac{t-\alpha_k}{1-\alpha_k t},$$

$$M_q(x) = \frac{1}{2}\left(\omega_q(\xi) + \overline{\omega_q(\xi)}\right), \quad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \quad x = \cos u,$$

— рациональная функция Чебышева–Маркова порядка q;

2) *поточечная оценка сверху*

$$|\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f_\gamma,\ x)| \le \frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin\pi\gamma\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\,dt}{(1-2tx+t^2)\sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)}} + \right.$$

$$\left. +\lambda_q(u)\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\,dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}\left(1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)\right)}\right], \quad x = \cos u, \tag{12}$$

где $\lambda_q(u)$ из (3);

3) *равномерно по $x \in [-1,\ 1]$ оценка сверху*

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q) \le \sqrt{1-x^2}\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q), \quad r \in (0,\ 1), \tag{13}$$

где

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q) = \frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\left[\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-2}t^{-\gamma}}{1-r|\omega_q(t)|}\,dt + \sum_{k=1}^q \frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-1}t^{-\gamma}}{(1-r|\omega_q(t)|)^2}\,dt\right]. \tag{14}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (9). Известно [5], что

$$\hat{\delta}_{kq}(f_\gamma,\ x,\ A_q) = \frac{-\sin\pi\gamma}{2^\gamma\pi i}\int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi\omega_q^k(\xi)}{1-t\xi} - \frac{\overline{\omega_q^k(\xi)}}{\xi - t}\right]\omega_q^k(t)\,dt, \quad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \quad x = \cos u,$$

где $\omega_q(\xi)$ определена в (11).

Умножим правую и левую части на $(1-r)r^k$, $r \in (0,\ 1)$, и просуммируем по k от 0 до $+\infty$. Получим

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f_\gamma,\ x) = \frac{-\sin\pi\gamma(1-r)}{2^\gamma \pi i}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi}{1-t\xi}\sum_{k=0}^{+\infty}(r\omega_q(\xi)\omega_q(t))^k - \frac{1}{\xi-t}\sum_{k=0}^{+\infty}(r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))^k\right]dt, \quad \xi = \mathrm{e}^{iu}, \quad x=\cos u.$$

Ряды в подинтегральной функции представляют собой суммы геометрических прогрессий со знаменателями соответственно $|r\omega_q(\xi)\omega_q(t)|<1$ и $|r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t)|<1$, где $\xi=\mathrm{e}^{iu}$, $r,\ t\in(0,\ 1)$, поэтому сходятся равномерно. Отсюда находим

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}(f_\gamma,\ x) = \frac{(1-r)i\sin\pi\gamma}{2^\gamma\pi}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 (1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}\left[\frac{\xi}{(1-t\xi)(1-r\omega_q(\xi)\omega_q(t))} - \frac{1}{(\xi-t)(1-r\overline{\omega_q(\xi)}\omega_q(t))}\right]dt, \quad \xi=\mathrm{e}^{iu}, \quad x=\cos u.$$

Заметив, что выражения в квадратных скобках интеграла, стоящего справа, являются взаимно комплексно-сопряженными, чтобы прийти к (11) достаточно выполнить соответствующие преобразования и заметить, что [22]

$$M_q(x) = \frac{1}{2}\left(\omega_q(\xi)+\overline{\omega_q(\xi)}\right), \quad \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u,$$

— косинус-дробь Чебышева–Маркова порядка q.

Докажем второе утверждение теоремы 2. Из (11) следует

$$|\hat{\varepsilon}_{r,\ q}((1-x)^\gamma,\ x)| \le$$

$$\le \frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}|\sin\psi_r(x,\ t)|\,dt}{\sqrt{1-2tx+t^2}\sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)}}, \quad x\in[-1,\ 1]. \tag{15}$$

Оценим величину $|\sin\psi_r(x,\ t)|$. Имеем

$$|\sin\psi_r(x,\ t)| \le \left|\sin\arg\frac{\xi}{1-\xi t}\right| + \left|\sin\arg\frac{1}{1-r\omega_q(t)\omega_q(\xi)}\right| =$$

$$= \frac{|\sin u|}{\sqrt{1-2t\cos u+t^2}} + \frac{r|\omega_q(t)||N_q(x)|}{\sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)}},$$

где

$$N_q(x) = \sin\sum_{k=1}^q \arccos\frac{x-a_k}{1-a_k x}, \quad x\in[-1,\ 1], \quad a_k\in[0,\ 1),$$

— синус-дробь Чебышева–Маркова порядка q. Известно ([22], с. 50), что

$$|N_q(x)| \le |\sin u|\lambda_q(u), \quad x=\cos u,\ x\in[-1,\ 1],$$

где $\lambda_q(u)$ из (3). Отсюда и из неравенства (15) следует (12).

Для доказательства третьего утверждения теоремы 2 в (12) воспользуемся легко проверяемыми оценками

$$\sqrt{1-2t\cos u+t^2} \ge 1-t, \quad t\in[0,\ 1],\ u\in\mathbb{R},$$

$$\sqrt{1-2r\omega_q(t)M_q(x)+r^2\omega_q^2(t)} \ge 1-r|\omega_q(t)|, \quad r\in(0,\ 1). \qquad \square$$

В теореме 2 положим значения параметров $\alpha_k = 0, k = 1,\ 2, \ldots, q$. Тогда $\hat{\varepsilon}_{r,\ 0}(f_\gamma,\ x) = \hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma,\ x)$ — приближения сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля–Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Следствие 2. Для приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля–Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева имеют место интегральные представления

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma,\ x) = -\frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin\pi\gamma\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma}t^{-\gamma}(1-rt^2)\,dt}{(1-2tx+t^2)(1-2rtx+r^2t^2)},\quad x\in[-1,\ 1];$$

$$\hat{\varepsilon}_r^{(0)}(f_\gamma) = \frac{2^{1-\gamma}(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{2\gamma-2}t^{-\gamma}(1-rt^2)\,dt}{(1-rt)^2},\quad r\in(0,\ 1).$$

3. Асимптотическое выражение мажоранты приближений

Исследуем асимптотическое поведение мажоранты (14) равномерной оценки (13) при $r \to 1$. Для решения поставленной задачи в правой части (14) выполним замену переменного по формуле $t = (1-u)/(1+u)$, $dt = -2du/(1+u)^2$. Тогда

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q) = \frac{2^\gamma(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\left[I_r^{(1)} + 2\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right) I_r^{(2)}\right],\quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}, \tag{16}$$

где

$$I_r^{(1)} = \int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^\gamma(1-r|\chi_q(u)|)},\quad I_r^{(2)} = \int\limits_0^1 \frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma(1-r|\chi_q(u)|)^2},$$

$$\chi_q(u) = \prod_{k=1}^q \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}.$$

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $r \in (0,\ 1)$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, т. е., вообще говоря, $\beta_k = \beta_k(r),\ k = 1, \ldots, q$. В этом случае будем полагать, что параметры $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, удовлетворяют условию

$$\lim_{r\to1}\frac{\beta_k}{1-r} = \infty,\quad k = 1, 2, \ldots, q, \tag{17}$$

и учитывать его в дальнейших рассуждениях. Положим, что параметры $\beta_k,\ k = 1,\ 2, \ldots, q$, упорядочены следующим образом:

$$0 < \beta_q \le \beta_{q-1} \le \ldots \le \beta_1 \le 1.$$

Теорема 3. *При $\beta_q = \beta_q(r) \to 0$ в условиях (17) для мажоранты равномерных приближений имеет место асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q) \sim \frac{2^\gamma(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\left[\Psi_r(A_q) + \Phi_r(A_q)\right],\quad r\to1, \tag{18}$$

где

$$\Psi_r(A_q) = \frac{2\pi\gamma(1-r)^{2\gamma-2}}{|\sin 2\pi\gamma|\left(2\displaystyle\sum_{k=1}^q \frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} +$$

$$+2\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)\left[\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}\,(1-|\chi_q(u)|)^2}+\int\limits_{\beta_1}^{1}\frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}\,(1-|\chi_q(u)|)^2}\right],$$

$$\Phi_r(A_q)=\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\,(1-|\chi_q(u)|)}+\int\limits_{\beta_1}^{1}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\,(1-|\chi_q(u)|)}.$$

Доказательство. Задача сводится к изучению асимптотического поведения интегралов $I_r^{(1)}$ и $I_r^{(2)}$ в (16) при $r\to 1$. Рассмотрим интеграл

$$I_r^{(1)}=I_r^{(3)}+I_r^{(4)}+I_r^{(5)},\quad r\in(0,\ 1),\tag{19}$$

где

$$I_r^{(3)}=\int\limits_{0}^{\beta_q}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\,(1-r\chi_q(u))},\quad I_r^{(4)}=\sum_{j=1}^{q-1}\int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\,(1-r|\chi_q(u)|)},$$

$$I_r^{(5)}=\int\limits_{\beta_1}^{1}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\,(1-r|\chi_q(u)|)}.$$

Выясним, как ведет себя при $r\to 1$ каждый из $(q+1)$ интегралов по отдельности. Так, для изучения интеграла $I_r^{(3)}$ заметим, что параметр β_q целесообразно выбирать сколь угодно близким к нулю. Ввиду этого асимптотика интеграла $I_r^{(3)}$ будет определяться поведением подинтегральной функции в непосредственной близости нуля переменного интегрирования. Воспользуемся приемом Ю.И. Русецкого ([10], с. 138). Учитывая, что

$$\chi_q(u)=1-2\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)u+O\left(2\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2u^2\right),\quad u\to 0,$$

равномерно по $r\in[0,\ 1)$ при $u\in(0,\ \beta_q)$ будет

$$\frac{u^{2\gamma-2}}{(1-u^2)^{\gamma}\,(1-r\chi_q(u))}-\frac{u^{2\gamma-2}}{\left(1-r\left(1-2u\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)\right)}=$$

$$=O\left(\frac{2ru^{2\gamma}\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2}{\left(1-r\left(1-2u\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)\right)^2}\right)+O\left(\frac{u^{2\gamma}}{1-r\left(1-2u\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)}\right).$$

Из последнего порядкового соотношения находим

$$I_r^{(3)}=\frac{1}{1-r}\int\limits_{0}^{\beta_q}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{1+\dfrac{2ru}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\dfrac{1}{\beta_k}}+$$

$$+O\left(\frac{2r}{(1-r)^2}\left(\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2\int\limits_0^{\beta_q}\frac{u^{2\gamma}\,du}{\left(1+\frac{2ru}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^2}\right)+O\left(\frac{1}{1-r}\int\limits_0^{\beta_q}\frac{u^{2\gamma}\,du}{1+\frac{2ru}{1-r}\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}\right).$$

Выполнив в интегралах справа замену $2ru\left(\sum\limits_{k=1}^{q}1/\beta_k\right)/(1-r)\mapsto u$, будем иметь

$$I_r^{(3)}=\frac{(1-r)^{2\gamma-2}}{\left(2r\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}}\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{1+u}+O\left(\frac{2r(1-r)^{2\gamma-1}}{\left(2r\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}}\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)}\frac{u^{2\gamma}\,du}{(1+u)^2}\right)+$$

$$+O\left(\frac{(1-r)^{2\gamma}}{\left(2r\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma+1}}\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)}\frac{u^{2\gamma}\,du}{1+u}\right),\tag{20}$$

где в силу условия (17) $\varphi(r,\ A_q)=((2r\beta_q)/(1-r))\sum\limits_{k=1}^{q}1/\beta_k\to\infty,\ r\to 1$. Поскольку при этом

$$\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)}\frac{u^{2\gamma}\,du}{(1+u)^2}=O\left([\varphi(r,\ A_q)]^{2\gamma-1}\right),\qquad\int\limits_0^{\varphi(r,\ A_q)}\frac{u^{2\gamma}\,du}{1+u}=O\left([\varphi(r,\ A_q)]^{2\gamma}\right)\quad r\to 1,$$

а также

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{2\gamma-2}\,du}{1+u}=\frac{\pi}{|\sin 2\pi\gamma|},\quad \gamma\in(1/2,\ 1),$$

из (20) получим

$$I_r^{(3)}=\frac{(1-r)^{2\gamma-2}\pi}{|\sin 2\pi\gamma|\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}}+O(\beta_q^{2\gamma-1})+O\left(\frac{\beta_q^{2\gamma}}{\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}}\right),\quad \gamma\in(1/2,\ 1),\ r\to 1.$$

Второе и третье слагаемые справа при любом наборе $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,q$, имеют заведомо больший порядок малости при $r\to 1$ в сравнении с первым. Следовательно,

$$I_r^{(3)}\sim\frac{(1-r)^{2\gamma-2}\pi}{|\sin 2\pi\gamma|\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}},\quad r\to 1.\tag{21}$$

Займемся исследованием величины $I_r^{(4)}$ (см. (19)). Подинтегральные функции в каждом из $q-1$ слагаемых в сумме справа на соответствующих интервалах $[\beta_{j+1},\ \beta_j]$, $j=1,2,\ldots,q-1$, непрерывны по переменному u и соответствующие интегралы представляют собой функции параметров $\beta_k \in (0, 1]$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Выполнив, в каждом из $q-1$ интегралов предельный переход при $r \to 1$, приходим к асимптотическому равенству

$$I_r^{(4)} \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{j} \dfrac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \quad r \to 1. \tag{22}$$

Рассуждая аналогичным образом, находим

$$I_r^{(5)} \sim \int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{q} \dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \quad r \to 1. \tag{23}$$

Теперь из равенства (19) на основании асимптотических соотношений (21)–(23) получим

$$I_r^{(1)} \sim \frac{(1-r)^{2\gamma-2}\pi}{|\sin 2\pi\gamma| \left(2\sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma-1}} + \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{j} \dfrac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)} +$$
$$+ \int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{u^{2\gamma-2}\,du}{(1-u^2)^{\gamma}\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{q} \dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)}, \quad r \to 1. \tag{24}$$

Аналогичным образом устанавливается асимптотическое равенство

$$I_r^{(2)} \sim \frac{(1-r)^{2\gamma-2}\pi(2\gamma-1)}{|\sin 2\pi\gamma| \left(2\sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{1}{\beta_k}\right)^{2\gamma}} + \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{j} \dfrac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod\limits_{k=j+1}^{q} \dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^2} +$$
$$+ \int\limits_{\beta_1}^{1} \frac{u^{2\gamma-1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\gamma}\left(1 - \prod\limits_{k=1}^{q} \dfrac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\right)^2}, \quad r \to 1. \tag{25}$$

Теперь вернемся к доказательству теоремы 3. Подставив асимптотические соотношения (24), (25) в равенство (16), придем к (18). $\square$

В теореме 3 положим значение $q = 1$. В этом случае аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости.

Следствие 3. При $\beta=\beta(r)\to 0$ в условиях (17) справедливо асимптотическое равенство

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,1}(f_\gamma,\ A_1)\sim\frac{2^\gamma(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi}\left[\frac{2^{2-2\gamma}\pi\gamma(1-r)^{2\gamma-2}\beta^{2\gamma-1}}{|\sin 2\pi\gamma|}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\beta^3}\int\limits_\beta^1\frac{u^{2\gamma-2}(u+\beta)(u^2+u\beta(1+\beta)+\beta^2)\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}\right],\quad r\to 1. \tag{26}$$

Из представления (26) следует, что в случае одного полюса аппроксимирующей функции правая часть асимптотического равенства состоит из двух слагаемых и содержит один параметр β. Причем при $\beta=\beta(r)\to 0$ первое слагаемое будет уменьшаться, в то время как второе будет увеличиваться.

Получим результат, соответствующий теореме 3 в полиномиальном случае.

Теорема 4. *Для мажоранты приближений сопряженной функции* (1) *с плотностью* $f_\gamma(x)$ *суммами Абеля–Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_r(f_\gamma)\sim\frac{2^{1-\gamma}\gamma(1-r)^{2\gamma-1}}{|\cos\pi\gamma|},\quad r\to 1. \tag{27}$$

Доказательство. Воспользуемся вторым равенством следствия 2. После замены переменного интегрирования по формуле $t=(1-u)/(1+u)$, $dt=-2du/(1+u)^2$, придем к представлению

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_r(f_\gamma)=\frac{2^\gamma\sin\pi\gamma}{\pi R}\int\limits_0^1\frac{u^{2\gamma-2}(R+2u+Ru^2)\,du}{(1-u^2)^\gamma(1+u/R)^2},\quad R=\frac{1-r}{1+r},\ r\in(0,\ 1).$$

Выполнив еще одну замену переменного по формуле $u/R\mapsto u$, получим

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_r(f_\gamma)=\frac{2^\gamma\sin\pi\gamma R^{2\gamma-1}}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{R}}\frac{u^{2\gamma-2}(1+2u+R^2u^2)\,du}{(1-R^2u^2)^\gamma(1+u)^2},\quad R=\frac{1-r}{1+r},\ r\in(0,\ 1).$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\frac{1}{R}}\frac{u^{2\gamma-2}(1+2u+R^2u^2)\,du}{(1-R^2u^2)^\gamma(1+u)^2}\underset{r\to1}{\longrightarrow}\int\limits_0^{+\infty}\frac{u^{2\gamma-2}(1+2u)\,du}{(1+u)^2}=\frac{2\pi\gamma}{|\sin 2\pi\gamma|},\quad \gamma\in(1/2,\ 1),$$

а также, что $R\sim(1-r)/2,\ r\to 1$, из последнего интегрального представления приходим к асимптотическому равенству (27). □

4. Наилучшая оценка приближений суммами Абеля–Пуассона

Представляет интерес минимизировать правую часть соотношения (18) посредством выбора оптимального для этой задачи набора $(\beta_1^*,\beta_2^*,\dots,\beta_q^*)$. Другими словами, будем искать наилучшую оценку приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Абеля–Пуассона (4). Положим

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma)=\inf_{A_q}\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q),$$

где $\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q)$ — асимптотическое выражение мажоранты приближений сопряженной функции с плотностью $f_\gamma(x)$ суммами Абеля–Пуассона (4), определенное в (18). Очевидно, что при постоянных значениях параметров $\beta_k,\ k=1,2,\ldots,q$, порядок в указанном соотношении не отличается от полиномиального, найденного в теореме 4. Наряду с выполнением условий (17), будем полагать, что параметры удовлетворяют условиям

$$\beta_k=\beta_k(r)\to 0,\quad \beta_{k+1}(r)=o(\beta_k(r)),\quad r\to 1,\ k=1,2,\ldots,q. \tag{28}$$

Теорема 5. *При выполнении условий* (28) *справедливо асимптотическое равенство*

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma))\sim\mu(q,\gamma)(1-r)^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)(2\gamma-1)},\quad r\to 1, \tag{29}$$

где

$$\mu(q,\gamma)=\frac{2^{1-\gamma}(1+\gamma)}{|\cos\pi\gamma|(1-\gamma)^{\frac{q-1}{2\gamma}+\frac{(2\gamma-1)(1-(1-\gamma)^{q-1})}{2\gamma^2(1+\gamma)}}}(2c_1(\gamma))^{\frac{2\gamma-1}{4\gamma(1+\gamma)}}\left(\frac{|\sin 2\pi\gamma|}{2^{4-2\gamma}\pi\gamma^2}\right)^{\frac{2\gamma-1}{2\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}\right)},$$

$$c_1(\gamma)=\int\limits_0^1\frac{u^{2\gamma+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma}=\frac{\Gamma(1-\gamma)}{2\pi\gamma}\left(2\sqrt{\pi}\Gamma(3/2+\gamma)-\pi\Gamma(1+\gamma)\right),\quad \gamma\in(1/2,\ 1). \tag{30}$$

Доказательство. Рассмотрим соотношение (18). Нетрудно получить, что при $r\to 1$ и выполнении условий (28) справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^q\frac{1}{\beta_k}\sim\frac{1}{\beta_q},$$

$$1-\prod_{k=1}^j\frac{\beta_k-u}{\beta_k+u}\prod_{k=j+1}^q\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\sim\frac{2u}{\beta_j},\quad j=1,2,\ldots,q,\quad u\in[\beta_{j+1},\ \beta_j],$$

$$1-\prod_{k=1}^q\frac{u-\beta_k}{u+\beta_k}\sim\frac{2\beta_1}{u},\quad u\in[\beta_1,\ 1].$$

При этом (18) примет вид

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q)\sim\frac{2^\gamma(1-r)\sin\pi\gamma}{\pi\beta_q}\left[\Psi_r(A_q)+\Phi_r(A_q)\right], \tag{31}$$

где

$$\Psi_r(A_q)=\frac{2^{2-2\gamma}\pi\gamma(1-r)^{2\gamma-2}\beta_q^{2\gamma}}{|\sin 2\pi\gamma|}+\frac{1}{4(1-\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2}, \tag{32}$$

$c_1(\gamma)$ — постоянная величина, определенная в (30),

$$\Phi_r(A_q)=\frac{\beta_q}{4(1-\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{\pi\beta_q}{4\beta_1\sin\pi\gamma},\quad r\to 1.$$

Ввиду очевидного асимптотического соотношения

$$\Phi_r(A_q)=o\left(\frac{1}{4(1-\gamma)}\sum_{j=1}^{q-1}\frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-2\gamma}}+\frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2}\right),\quad r\to 1,$$

при варьировании параметров $\beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, q$, слагаемые в $\Phi_r(A_q)$ не влияют на асимптотическое поведение величины $\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A_q)$. Следовательно, нахождение наилучшего набора параметров необходимо осуществлять исследуя выражение $\Psi_r(A_q)$. При каждом фиксированном $\gamma \in (1/2,\ 1)$ оно представляет собой функцию переменных $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, непрерывную в каждой точке q-мерного куба $[\delta, 1]^q$, где $\delta = \delta(r) > 0$ – некоторая величина, зависящая от r, и при любом r ограничивающая множество параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса функция $\Psi_r(A_q)$ имеет строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta^*_1,\ \beta^*_2, \ldots, \beta^*_q)$. Причем поскольку $\beta_k = 1, k = 1, \ldots, q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k = \beta_k(r) \to 0,\ r \to 1$, достаточно большой скоростью величина $\Psi_r(A_q)$ неограниченно растет, то можно предположить, что β^* — внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того, чтобы найти оптимальный набор β^* для соответствующего асимптотического равенства решим экстремальную задачу

$$\Psi_r(A_q) = c_q\beta_q^{2\gamma} + \frac{1}{4(1-\gamma)}\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}} + \frac{1}{4(1-\gamma)}\frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} + \cdots + \frac{1}{4(1-\gamma)}\frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}} + \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} \underset{A_q}{\longrightarrow} \inf,$$

где для краткости положим

$$c_q = \frac{2^{2-2\gamma}\pi\gamma(1-r)^{2\gamma-2}}{|\sin 2\pi\gamma|}.$$

Функция $\Psi_r(A_q)$ переменных $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0, 1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial\Psi_r(A_q)/\partial\beta_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, q$. Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&2\gamma c_q\beta_q^{2\gamma-1} - \frac{1}{2}\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{3-2\gamma}} = 0,\\
&\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-2\gamma}} - (1-\gamma)\frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{3-2\gamma}} = 0,\\
&\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} - (1-\gamma)\frac{\beta_{q-3}^2}{\beta_{q-2}^{3-2\gamma}} = 0,\\
&\qquad\cdots\\
&\frac{\beta_2}{\beta_3^{2-2\gamma}} - (1-\gamma)\frac{\beta_1^2}{\beta_2^{3-2\gamma}} = 0,\\
&\frac{\beta_1}{2(1-\gamma)\beta_2^{2-2\gamma}} - \frac{c_1(\gamma)}{\beta_1^3} = 0,
\end{aligned} \tag{33}$$

из которой последовательно находим

$$\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-2\gamma}} = 4\gamma c_q\beta_q^{2\gamma},\ \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-2\gamma}} = \frac{4\gamma c_q\beta_q^{2\gamma}}{1-\gamma}, \ldots, \frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-2\gamma}} = \frac{4\gamma c_q\beta_q^{2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-2}},\ \frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} = \frac{4\gamma c_q\beta_q^{2\gamma}}{4(1-\gamma)^{q-1}}.$$

Подставив последние соотношения в (32), находим

$$\Psi_r(A_q^*) = \frac{c_q(1+\gamma)\beta_q^{*2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}}.$$

При этом из (31) следует, что асимптотическое выражение наилучшей мажоранты примет вид

$$\hat{\varepsilon}^*_{r,\ q}(f_\gamma,\ A^*_q) = \frac{2^{1-\gamma}(1+\gamma)(1-r)^{2\gamma-1}\beta_q^{*2\gamma-1}}{(1-\gamma)^{q-1}|\cos\pi\gamma|} + o\left((1-r)^{2\gamma-1}\beta_q^{2\gamma-1}\right), \quad r\to 1. \tag{34}$$

Осталось найти оптимальный параметр β_q^*. С этой целью снова обратимся к системе (33). Последовательно находим

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q}\right)^2 = 4\gamma c_q, \\ &\left(\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}}\right)^2 = \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q}\right)^2\right)^{1-\gamma} = \frac{(4\gamma c_q)^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \\ &\left(\frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}}\right)^2 = \frac{1}{1-\gamma}\left(\left(\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}}\right)^2\right)^{1-\gamma} = \frac{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^2}}{(1-\gamma)(1-\gamma)^{1-\gamma}}, \\ &\qquad\qquad\qquad \dots \\ &\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \frac{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-2)}}{\gamma}}}. \end{aligned} \tag{35}$$

С другой стороны, из последнего уравнения в (33) получим

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 = \left(\frac{2(1-\gamma)c_1(\gamma)}{\beta_1^{2(1+\gamma)}}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}.$$

Отсюда и из последнего уравнения системы (35) будем иметь

$$\beta_1^2 = (2c_1(\gamma))^{\frac{1}{1+\gamma}}\left(\frac{(1-\gamma)^{\frac{1-(1-\gamma)^{(q-1)}}{\gamma(1-\gamma)}}}{(4\gamma c_q)^{(1-\gamma)^{(q-2)}}}\right)^{\frac{1-\gamma}{1+\gamma}}, \quad \gamma\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right).$$

Учитывая, что

$$\frac{c_1(\gamma)}{2\beta_1^2} = \frac{\gamma c_q\beta_q^{2\gamma}}{(1-\gamma)^{q-1}},$$

найдем

$$\beta_q^* = (2c_1(\gamma))^{\frac{1}{2(1+\gamma)}}\left(\frac{(1-\gamma)^{q-1-\frac{1-(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}}{(4\gamma c_q)^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}\right)^{\frac{1}{2\gamma}}.$$

Учитывая, что в представлении β_q^* содержится величина c_q, важно отметить, что

$$\beta_q^* = O\left((1-r)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}\right)}\right) \underset{r\to 1}{\longrightarrow} 0.$$

При этом порядки остальных параметров оптимального набора нетрудно найти из системы (35).

Подставив полученное представление параметра β_q^* в (34), и выполнив необходимые алгебраические преобразования, придем к (29). $\square$

Из теоремы 5 следует, что параметры аппроксимирующей рациональной функции (4) можно подобрать так, что для приближений сопряженной функции (1) с плотностью $(1-x)^\gamma,\ \gamma \in (1/2,\ 1)$, на отрезке $[-1,\ 1]$ справедлива оценка

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{P}_{r,\ q}(f_\gamma,\ x)| \leq \sqrt{1-x^2}\mu(q,\gamma)(1-r)^{\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{(1-\gamma)^q}{1+\gamma}\right)(2\gamma-1)} + \delta_r^*, \quad r \to 1,$$

где величина $\mu(q,\ \gamma)$ определена в формулировке теоремы 5, а величина $\delta_r^* \to 0$ при $r \to 1$ и имеет заведомо больший порядок малости в сравнении с главным членом асимптотического выражения справа.

В теореме 5 положим значение $q = 1$, т. е. в этом случае аппроксимирующая функция имеет один полюс в открытой комплексной плоскости, приходим к задаче оптимизации правой части (26). Тогда

$$|\hat{f}_{f_\gamma} - \hat{P}_{r,\ 1}(f_\gamma,\ x)| \leq \sqrt{1-x^2}\mu(1,\ \gamma)(1-r)^{\frac{2}{1+\gamma}(2\gamma-1)} + \delta_r^*, \quad r \to 1.$$

Поскольку величина $2/(1+\gamma) > 1,\ \gamma \in (1/2,\ 1)$, то полученная скорость приближений является большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом (см. теорему 4).

Известно ([23], с. 96), что наилучшие равномерные полиномиальные приближения функции $(1-x)^\gamma$ обладают свойством

$$E_{2n}(|x|^{2\gamma}; [-1,1]) = \frac{1}{2^\gamma} E_n((1-x)^\gamma; [0,1]).$$

Используя в наших исследованиях аналогичные рассуждения, после соответствующих преобразований из (29) находим асимптотическое выражение наилучшей мажоранты равномерных приближений сопряженной функции с плотностью $|x|^s,\ s \in (1,\ 2)$:

$$\hat{\varepsilon}_{r,\ q}^*(|x|^s) \sim \mu(q,s)(1-r)^{\frac{2}{s}\left(1-\frac{(2-s)^q}{2^{q-1}(s+2)}\right)(s-1)}, \quad r \to 1,$$

где

$$\mu(q,s) =$$
$$= \frac{2+s}{2^s\left|\cos\frac{\pi s}{2}\right|}\left(\frac{2}{2-s}\right)^{\frac{q-1}{s}+\frac{(s-1)(2^{q+1}-4(2-s)^{q-1})}{2^{q-1}s^2(2+s)}} (2c_1(s))^{\frac{s-1}{s(2+s)}} \left(\frac{|\sin\pi s|}{2^{2-s}\pi s^2}\right)^{\frac{s-1}{s}\left(1-\frac{2^{2-q}(2-s)^{q-1}}{2+s}\right)},$$

$$c_1(s) = \int\limits_0^1 \frac{u^{s+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad s \in (1,\ 2).$$

Заключение

В работе исследованы рациональные аппроксимации сопряженной функции на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля–Пуассона сопряженных рациональных интегральных операторов Фурье–Чебышева с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Установлено интегральное представление приближений.

Изучены рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,\ 1]$ сопряженной функции с плотностью $(1-x)^\gamma$, $\gamma \in (1/2,\ 1)$, введенные суммами Абеля–Пуассона. Получены интегральное представление приближений, оценка поточечных приближений и равномерных приближений с определенной мажорантой. Установлено ее асимптотическое выражение при $r \to 1$, зависящее от параметров аппроксимирующей функции. В заключительной части найдены оптимальные значения параметров, при которых обеспечивается наибольшая скорость убывания мажоранты. Следствием полученных результатов являются оценки приближений и асимптотическое выражение мажоранты приближений сопряженной функции на отрезке $[-1,\ 1]$ суммами Абеля–Пуассона сопряженных полиномиальных рядов Фурье–Чебышева.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции возможно добиться скорости приближений рациональными суммами Абеля–Пуассона, большей в сравнении с соответствующими полиномиальными аналогами. Этот результат справедлив уже в случае аппроксимирующей функции с одним полюсом.

Литература

[1] Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* (Физматгиз, М., 1958).

[2] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд., испр. и доп.* (Наука, М., 1968).

[3] Поцейко П.Г., Ровба Е.А. *Рациональные ряды Фурье–Чебышева и их аппроксимационные свойства* (ГрГУ, Гродно, 2022).

[4] Ровба Е.А., Поцейко П.Г. *Приближения сопряженных функций частичными суммами сопряженных рядов Фурье по одной системе алгебраических дробей Чебышева–Маркова*, Изв. вузов. Матем. (9), 68–84 (2020).

[5] Поцейко П.Г., Ровба Е.А. *Сопряженный рациональный оператор Фурье–Чебышева и его аппроксимационные свойства*, Изв. вузов. Матем. (3), 44–60 (2022).

[6] Натансон И.П. *О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона*, Докл. АН СССР **72** (1), 11–14 (1950).

[7] Тиман А.Ф. *Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона*, Докл. АН СССР **74** (1), 17–20 (1950).

[8] Штарк Э.Л. *Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функций из* Lip 1 *от сингулярного интеграла Абеля–Пуассона*, Матем. заметки **13** (1), 21–28 (1973).

[9] Жук В.В. *О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи средних Фейера и Пуассона ее ряда Фурье*, Матем. заметки **4** (1), 21–32 (1968).

[10] Русецкий Ю.И. *О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля–Пуассона*, Сиб. матем. журн. **9** (1), 136–144 (1968).

[11] Жигалло Т.В. *Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица на конечном отрезке вещественной оси, интегралами Пуассона–Чебышева*, Пробл. управл. и информ. **3**, 1–14 (2018).

[12] Sz.-Nagy, B. *Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae **1**, 183–188 (1950).

[13] Баскаков В.А. *Асимптотические оценки приближения сопряженных функций сопряженными интегралами Абеля–Пуассона*, Прим. функц. анализа в теории прибл. (5), 14–20 (Калининск. гос. ун-т, 1975).

[14] Жигало К.М., Харкевич Ю.И. *Повна асимптотика вiдхилення вiд класу диференцiйовних функцiй множини їх гармонiйних iнтегралiв Пуассона*, Укр. матем. журн. **54** (1), 43–52 (2002).

[15] Жигало К.М., Харкевич Ю.И. *Наближення спряжених диференцiйовних функцiй їх iнтегралами Абеля–Пуассона*, Укр. матем. журн. **61** (1), 73–82 (2009).

[16] Поцейко П.Г., Ровба Е.А. *Суммы Абеля–Пуассона сопряженных рядов Фурье–Чебышева и их аппроксимационные свойства*, Изв. НАН Беларуси **57** (2), 156–175 (2021).

[17] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т. 2 (Физматлит, М., 2001).

[18] Лунгу К.Н. *О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов*, Матем. сб. **86(128)** (2(10)), 314–324 (1971).

[19] Лунгу К.Н. *О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов*, Сиб. матем. журн. **25** (2), 151–160 (1984).

[20] Джрбашян М.М. *К теории рядов Фурье по рациональным функциям*, Изв. АН Арм. ССР, Сер. физ.-матем. **9** (7), 3–28 (1956).

[21] Фалалеев Л.П. *Приближение сопряженных функций обобщенными операторами Абеля–Пуассона*, Матем. заметки **67** (4), 595–602 (2000).

[22] Русак В.Н. *Рациональные функции как аппарат приближения* (БГУ, Минск, 1979).

[23] Бернштейн С.Н. *Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной.* Ч. 1 (Гл. ред. общетехн. лит-ры, М.; Л., 1937).

Павел Геннадьевич Поцейко

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,

e-mail: pahamatby@gmail.com

Евгений Алексеевич Ровба

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, д. 22, г. Гродно, 230023, Республика Беларусь,

e-mail: rovba.ea@gmail.com

P.G. Potseiko and E.A. Rovba

On rational approximations of the conjugate function on a segment by Abel–Poisson sums of Fourier–Chebyshev integral operators

Abstract. Rational approximations of the conjugate function on the segment $[-1,\ 1]$ by Abel–Poisson sums of conjugate rational integral Fourier–Chebyshev operators with restrictions on the number of geometrically different poles are investigated. An integral representation of the corresponding approximations is established.

Rational approximations on the segment $[-1,\ 1]$ of the conjugate function with density $(1-x)^{\gamma}$, $\gamma \in (1/2,\ 1)$, by Abel–Poisson sums are studied. An integral representation of approximations and estimates of approximations taking into account the position of a point on the segment $[-1,\ 1]$ are obtained. An asymptotic expression as $r \to 1$ for the majorant of approximations, depending on the parameters of the approximating function is established. In the final part, the optimal values of parameters which provide the highest rate of decrease of this majorant are found. As a corollary we give some asymptotic estimates of approximations on the segment $[-1,\ 1]$ of the conjugate function by Abel–Poisson sums of conjugate polynomial Fourier–Chebyshev series.

Keywords: conjugate function, Fourier–Chebyshev series, Abel–Poisson sum, pointwise and uniform estimates, best approximation, Laplace method.

Pavel Gennadjevich Potseiko

Yanka Kupala State University of Grodno,
22 Ozheshko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,

e-mail: pahamatby@gmail.com

Evgeniy Alekseevich Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno,
22 Ozheshko str., Grodno, 230023 Republic of Belarus,

e-mail: rovba.ea@gmail.com