Известия вузов. Математика
2024, № 9, с. 45–55

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

С. МАГХСУДИ, А. НЕАМАТИ

СУЩЕСТВОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДРОБНОЙ ПОЛУЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Аннотация. В данной статье рассматривается дробная полулинейная задача в секвенциально компактном банаховом пространстве X: $x^{\alpha}(t) = A(t)x(t)+f(t,x(t))$, $t \in \mathbb{R}^{+}$, с начальным условием $x(0) = x_0$, $x_0 \in X$. Здесь A является генератором эволюционной системы $(U(t,s))_{t \le s \le 0}$, а f — заданная функция, удовлетворяющая некоторым условиям. Мы исследуем, имеет ли это дробное полулинейное интегро-дифференциальное уравнение асимптотически почти периодическое решение.

Ключевые слова: асимптотически почти периодическое решение, полулинейная дробная задача, эволюционная система.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-45-55

Введение

Класс почти периодических функций гораздо более общий и практичный, чем класс периодических функций. Этой категорией функций гораздо легче описывать интересные модели и явления окружающей среды. По этой причине, после введения этой категории функций Х. Бором [1]–[3] в 1925 г., она получила большое внимание со стороны исследователей. С. Бохнер [4], [5] позднее изучил эти функции более подробно в банаховом пространстве. Впоследствии многие исследователи работали в этой области.

Например, в работе [6] авторы рассмотрели следующий класс импульсных дифференциальных уравнений в пространстве X, $t_i \in \mathbb{R}$ при $i \in \mathbb{Z}$ и $A : D(A) \in X \to X$ с целью исследования существования почти периодических умеренных решений среди функций со специальными свойствами:

$$u'(t) = A(t)u(t) + F(u(t)) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq t_i,$$

$$\triangle u(t_i) = I_i(u(t_i)).$$

В работе [7] с целью заключения о том, что класс абстрактных частных интегро-дифференциальных уравнений имеет асимптотически почти периодические и почти периодические решения, авторы рассмотрели следующее уравнение с состояниями

$$A : D(A) \in X \to X, \quad B(t) : D(B(t)) \in X \to X, \quad t \ge 0,$$

являющимися линейными, замкнутыми и плотно определенными операторами в банаховом пространстве X, при этом $D(A) \in D(B(t))$ для каждого $t \ge 0$, а $g(\cdot,\cdot)$ является непрерывной

Поступила в редакцию 22.06.2023, после доработки 16.04.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

функцией:

$$D'u(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)ds + g(t, u(t)), \quad u(0) = x_0.$$

Достигнув желаемого результата, они предоставили хороший ориентир для заинтересованных исследователей.

Для лучшего изучения и понимания использования почти периодических функций в природе можно обратиться к работе [8], в которой авторы сформулировали нелинейную модель распространения и источник нелокальной реакции на всей области, рассматривая модель параболического хемотаксиса. Эта модель зависит от конкретного взаимодействия между коэффициентами, связанными с такой диффузией и реакцией, и авторы доказали, что все полученные решения равномерно ограничены во времени. Для дальнейшего изучения этих функций рекомендуем читателям работы [9]–[12].

Что касается использования эволюционных уравнений и формул, аналогичных формулам (1) и (2), можно обратиться к следующим статьям. Фактически, можно найти множество приложений в электрохимии, электромагнетизме, вязкоупругости, биологии и гидрогеологии. Например, уравнения пространственно фрактальной диффузии использовались в гидрогеологии для моделирования переноса пассивных индикаторов, переносимых потоком жидкости в пористой среде [13], [14], или для моделирования динамики активатор-ингибитора с аномальной диффузией [15] (подробнее см. [16]–[19] и приведенные там ссылки).

В работе [20] мы исследовали существование почти периодических решений нелокальной дробной задачи Коши

$$\begin{gathered} D^{\alpha}u(t) = Au(t) + f(t, x(t)), \quad t \in J = [0,1], \\ u(0) = \int_0^1 g(s, u(s))ds, \end{gathered} \tag{1}$$

где A — генератор сильно непрерывной функции оператора α-резольвенты $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ в банаховом пространстве E, а $f, g : J \times E \to E$ — заданные функции, удовлетворяющие некоторым условиям.

В нашем исследовании рассматривается дробная полулинейная задача

$$\begin{gathered} x^{\alpha}(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0 \in X, \end{gathered} \tag{2}$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, x^{α} — дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha \in (0,1)$, а $A(t) : D_t \subset X \to X$ — генератор эволюционного семейства $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ на X, при этом X — секвенциально компактное банахово пространство, а f — функция. Мы изучаем существование асимптотически почти периодических решений.

А. Джаваду [21] изучал существование умеренных решений дробного полулинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} x^{\alpha}(t) = A(t)x(t) + f\left(t, x(t), \int_0^t u(t, s, x(s))ds\right), \\ x(0) = x_0 \in X, \end{gathered} \tag{3}$$

где $t > 0$, $0 < \alpha < 1$ и $A(t) : D_t \subset X \to X$ — генератор эволюционной системы $U(t,s)$.

В разделе 3 данного исследования рассматриваем уравнение (3), где A является генератором эволюционного семейства $(U(t,s))_{t\geq s\geq 0}$, а X — сепарабельным и секвенциально компактным банаховым пространством. Затем изучаем существование асимптотически почти периодического умеренного решения этой задачи. По сравнению с предыдущими статьями здесь мы говорим о существовании асимптотически почти периодического решения. Задавая новые условия, показываем существование новых типов решений.

1. Предварительные сведения

Чтобы достичь желаемого результата, в этом разделе сначала сформулируем и приведем необходимые определения и теоремы. Пусть $(X, ||\cdot||)$ является банаховым пространством, а $C_b(\mathbb{R}^+, X)$ — пространством, состоящим из ограниченных и непрерывных функций из $\mathbb{R}^+$ в X, наделенным нормой равномерной сходимости $||\cdot||_\infty$.

Класс всех ограниченных и равномерно непрерывных функции из I в X обозначим через $BUC(I; X)$. Также определим

$$C_0(\mathbb{R}^+, X) = \Big\{ f \in C_b(\mathbb{R}^+, X) : \lim_{t \to 0} ||f(t)|| = 0 \Big\}.$$

Определение 1 ([22]). Пусть $I = \mathbb{R}$ или $I = [0, \infty)$ и $f : I \to \mathbb{R}$ является непрерывной функцией. Для заданного $\varepsilon > 0$ назовем $\tau > 0$ ε-периодом для $f(\cdot)$, если для всех $t \in I$

$$|f(t + \tau) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Множество, состоящее из всех ε-периодов для $f(\cdot)$, обозначим через $\vartheta(f, \varepsilon)$.

Говорят, что функция f является почти периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ множество $\vartheta(f, \varepsilon)$ является относительно плотным в I, что означает существование константы $l > 0$ такой, что любой подинтервал I длины l пересекает $\vartheta(f, \varepsilon)$.

Пространство, состоящее из всех почти периодических функций из интервала I в X, обозначим через $AP(I; X)$. Оснащенное sup-нормой, $AP(I, X)$ становится банаховым пространством.

Определение 2 ([22]). Функция $f \in C_b(I, X)$ называется асимптотически почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти числа $l > 0$ и $M > 0$ такие, что каждый подинтервал I длины l содержит, по крайней мере, одно число τ такое, что $\|f(t + \tau) - f(t)\| \leq \varepsilon$ для всех $t \geq M$. Пространство, состоящее из всех асимптотически почти периодических функций из интервала I в X, обозначим через $AAP(I; X)$.

Далее опишем некоторые свойства почти периодической функции.

Определение 3 ([22]). Пусть $1 \leq p < \infty$.

1) Функция $f : I \times Y \to X$ называется почти периодической, если $f(\cdot, \cdot)$ является ограниченной и непрерывной, а также для любого $\varepsilon > 0$ и любого компактного множества $K \subset Y$ существует число $l(\varepsilon, K) > 0$ такое, что любой подинтервал $J \subset I$ длины $l(\varepsilon, K)$ содержит число τ со свойством $\|f(t + \tau, y) - f(t)\| \leq \varepsilon$ для всех $t \in I$, $y \in K$. Семейство таких функций будет обозначаться как $AP(I \times Y, X)$.
2) Функция $f : [0, \infty) \times Y \to X$ называется асимптотически почти периодической, если она является ограниченной и непрерывной и может быть разложена как $f = g + q$, где $g \in AP([0, \infty) \times Y; X)$ и $q \in C_0([0, \infty) \times Y; X)$. Обозначим через $AAP([0, \infty) \times Y; X)$ векторное пространство, состоящее из всех таких функций.

Лемма 1 ([22]). *Если $(g_n)_n \in N$ — последовательность в $AP(I; X)$ и $(g_n)_{n \in N}$ сходится равномерно к g, то $g \in AP(I, X)$.*

Теорема 1 ([11]). *Если $f \in AP(I; X)$, то верны следующие утверждения:*

1) *функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$;*

2) *область значений R_f функции f является относительно компактным множеством, т.е. любая последовательность точек из R_f содержит сходящуюся в X подпоследовательность.*

Предложение 1 ([9]). *Произведение двух почти периодических функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ является почти периодической функцией.*

Определение 4.

1) Пусть X, Y и Z — банаховы пространства. Функция $f : I \times Y \times Z \to X$ называется почти периодической, если $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ ограничена и непрерывна, а также для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого компактного множества $K \subset Y \times Z$ существует число $l(\varepsilon, K) > 0$ такое, что каждый подинтервал $J \subset I$ длины $l(\varepsilon, K)$ содержит число τ с таким свойством, что $\|f(t + \tau, y, z) - f(t, y, z)\| \leq \varepsilon$ для всех $t \in I$, $(y, z) \in K$. Множество таких функций будет обозначаться как $AP(I \times Y \times Z, X)$.
2) Функция $f : [0, \infty) \times Y \times Z \to X$ называется асимптотически почти периодической, если она ограничена, непрерывна и допускает разложение $f = g + q$, где $g \in AP([0, \infty) \times Y \times Z; X)$ и $q \in C_0([0, \infty) \times Y \times Z; X)$. Обозначим через $AAP([0, \infty) \times Y \times Z; X)$ векторное пространство, состоящее из всех таких функций.

Предложение 2 ([9]). *Если неопределенный интеграл от почти периодической функции $f(x)$ ограничен, то он является почти периодической функцией.*

Предложение 3 ([22]).

1) *Пусть $f \in AP(I \times Y; X)$ и $h \in AP(I; Y)$. Тогда отображение $t \mapsto f(t, h(t))$, $t \in I$, принадлежит пространству $AP(I; X)$.*
2) *Пусть $f \in AAP([0, \infty) \times Y; X)$ и $h \in AAP([0, \infty); Y)$. Тогда отображение $t \mapsto f(t, h(t))$, $t \geq 0$, принадлежит пространству $AAP([0, \infty); X)$.*

Предложение 4 (критерий Бохнера, [22]). *Пусть $f \in BUC(\mathbb{R}, X)$. Тогда $f(\cdot)$ — почти периодическая функция, если и только если для любой последовательности $(b_n)_n$ чисел из R существует подпоследовательность $(a_n)_n$ последовательности $(b_n)_n$ такая, что $f(\cdot + a_n)$ сходится в $BUC(\mathbb{R}; X)$.*

Предложение 5 ([20]). *Пусть $f \in BUC(I \times Y; X)$, где X, Y — банаховы пространства. Тогда $f(\cdot, \cdot)$ является почти периодической тогда и только тогда, когда для любой последовательности $(b_n)_n$ чисел из $\mathbb{R}$ существует подпоследовательность $(a_n)_n$ последовательности $(b_n)_n$ такая, что $\{f(\cdot + a_n, y)\}_n$ сходится в $BUC(\mathbb{R} \times Y; X)$ для $y \in K$, где $K \subset Y$ компактно.*

Развитием вышеприведенного предложения в трехмерном пространстве является

Предложение 6. *Пусть $f \in BUC(I \times Y \times Z; X)$, где X, Y, Z — банаховы пространства. Тогда $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ является почти периодической тогда и только тогда, когда для любой последовательности $(b_n)_n$ чисел из I существует подпоследовательность $(a_n)_n$ последовательности $(b_n)_n$ такая, что $\{f(\cdot + a_n, y, z)\}_n$ сходится в $BUC(I \times Y \times Z; X)$ для $y \in K$, где $K \subset Y \times Z$ компактно.*

Доказательство. Предположим, что $f(t, y, z)$ не является почти периодической функцией. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$, некоторого компактного $K \subset Y \times Z$ и любого $l > 0$ существует некоторый подинтервал J в I длины l, содержащий число τ такое, что

$$\|f(t + \tau, y, z) - f(t, y, z)\| > \varepsilon \tag{4}$$

для всех $t \in I$, $(y,z) \in K$. Рассмотрим теперь произвольное число $\tau_1 \in I$ и пусть (a_1, b_1) — интервал, длина которого больше, чем $2(|\tau_1|)$, и все числа которого удовлетворяют соотношению (4). Через τ_2 обозначим центр этого интервала. Очевидно, $\tau_2 - \tau_1$ принадлежит интервалу (a_1, b_1), поэтому удовлетворяет соотношению (4). Пусть теперь (a_2, b_2) — интервал, длина которого больше, чем $2(|\tau_1| + |\tau_2|)$, и все числа которого удовлетворяют соотношению (4). Пусть τ_3 — центр (a_2, b_2). Аналогично предыдущему рассуждению числа $\tau_3 - \tau_2$, $\tau_3 - \tau_1$ удовлетворяют соотношению (4). Поэтому схожим образом можно определить числа $\tau_4, \tau_5, \ldots$ так, что все $\tau_i - \tau_j$ удовлетворяют соотношению (4). Итак, при любых i, j имеем

$$\|f(t + \tau_i - \tau_j, y, z) - f(t, y, z)\| > \varepsilon \tag{5}$$

для любых $t \in I$, $y \in K$. Для любого $t \in I$ соотношение (5) выполнено, поэтому для $t+\tau_j \in I$

$$\|f(t + \tau_j + \tau_i - \tau_j, y, z) - f(t + \tau_j, y, z)\| > \varepsilon,$$

откуда

$$\|f(t + \tau_i, y, z) - f(t + \tau_j, y, z)\| > \varepsilon.$$

Следовательно, любая подпоследовательность последовательности $\{f(t+\tau_n, y, z)\}$ не является сходящейся в $BUC(I \times Y \times Z; X)$.

Пусть $f \in AP(I \times Y \times Z; X)$, тогда $R_f \subset X$ и по предложению 3 для одномерного случая это множество относительно компактно. Рассматривая функцию $f(t, y, z)$, мы берем (y, z) из компактного подмножества $Y \times Z$ и считаем f непрерывной. Поэтому множество значений $f(t, y, z)$ является относительно компактным. Следовательно, любая последовательность точек из R_f, например $\{f(\cdot + b_n, \cdot, \cdot)\}_n$, содержит сходящуюся в X подпоследовательность, например, $\{f(\cdot + a_n, \cdot, \cdot)\}_n$. $\square$

Определение 5. Пусть $t \in \mathbb{R}$. Семейство $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ ограниченных линейных операторов на X называется эволюционным семейством, если $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $U(t,t) = I$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где I — тождественный оператор;
2) $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ для любого $t \geq s \geq r$;
3) отображение $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ является непрерывным при любом фиксированном $x \in X$.

Пример. Функция $F(t,s) = (\cos(t) + \cos(\sqrt{2}t))s$, где $t \in \mathbb{R}$ и $s \in K$ ($K \subset \mathbb{R}$ — компактное множество), является почти периодической. Действительно, поскольку функция $f(t) = \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)$ почти периодическая на $\mathbb{R}$ ([23], с. 3), то из предложения 1 следует, что функция $F(t)$ является почти периодической на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Существование асимптотически почти периодических решений дробной полулинейной задачи

Рассмотрим теперь полулинейную дробную задачу (2), где A — генератор эволюционного семейства $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ на X. Мы хотим показать, что это уравнение имеет асимптотически почти периодическое решение. Для достижения нашего результата рассмотрим следующие гипотезы.

(H_1) Эволюционное семейство $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ является равномерно непрерывным, при этом

$$U(t + w, s + w) = U(t,s) \quad \text{для любых} \quad t \geq s,$$

существуют $M > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$||U(t,s)|| \leq M \exp^{-\delta(t-s)} |t-s|^{(1-\alpha)} \quad \text{для} \quad t > s \geq 0.$$

(H_2) Функция $f: I \times X \to X$ удовлетворяет условиям типа Каратеодори, т.е. $f(.,x)$ является измеримой при $x \in X$, а $f(t,.)$ — непрерывной почти всюду при $t \geq 0$, X — секвенциально компактное банахово пространство. Функция f удовлетворяет условию Липшица по $u(t)$, т.е. существует константа L такая, что

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq L|u-v|.$$

Существуют функция $\varphi \in L^1(J, \mathbb{R}^+)$ и неубывающая непрерывная функция $\psi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\|f(t,u)\| \leq \varphi(t)\psi(\|u\|)$.

Определение 6. Непрерывная функция $x: \mathbb{R}^+ \to X$ называется умеренным решением задачи (2), если x удовлетворяет уравнению

$$x(t) = U(t,0)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s, x(s)) ds.$$

Лемма 2. *Пусть $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ — равномерно непрерывное эволюционное семейство. Если $f(\cdot,\cdot)$ принадлежит $AP(\mathbb{R}^+ \times Y; X)$, то*

$$\int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s,y) ds$$

принадлежит $AP(\mathbb{R}^+ \times Y; X)$.

Доказательство. Пусть $f \in AP(\mathbb{R}^+ \times Y; X)$. Тогда по гипотезе для любого $\varepsilon > 0$, любого компактного $K \subset Y$ существует $l(\varepsilon, K) > 0$ такое, что любой подинтервал в $\mathbb{R}^+$ длины l содержит, по крайней мере, одну точку τ такую, что

$$\|f(t+\tau, y) - f(t,y)\|_X \leq \varepsilon$$

для всех $t \in I$, $y \in Y$.

Зададим

$$w(t) = \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s,y) ds.$$

Откуда имеем

$$\begin{aligned}
\|w(t+\tau) - w(t)\| &= \left\| \int_0^{t+\tau} \frac{U(t+\tau,s)}{(t+\tau-s)^{1-\alpha}} f(s,x(s)) - \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s,x(s)) ds \right\| = \\
&= \left\| \int_0^t \frac{U(t+\tau, s+\tau)}{(t+\tau-(s+\tau))^{1-\alpha}} f(s+\tau, x(s+\tau)) - \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s,x(s)) ds \right\| = \\
&= \left\| \int_0^t \left(\frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s+\tau, x(s+\tau)) - \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s,x(s)) \right) ds \right\| = \\
&= \left\| \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} (f(s+\tau, x(s+\tau)) - f(s,x(s))) ds \right\| \leq \\
&\leq \int_0^t \frac{\|U(t,s)\|}{|t-s|^{1-\alpha}} \|f(s+\tau, x(s+\tau)) - f(s,x(s))\| ds \leq M\varepsilon \int_0^t \exp^{-\delta(t-s)} ds \leq \frac{M\varepsilon}{\delta},
\end{aligned}$$

и, следовательно, w принадлежит $AP(\mathbb{R}^+ \times Y; X)$. □

Теорема 2. *Рассмотрим задачу (2), где X — секвенциально компактное банахово пространство. Предположим, что гипотезы (H_1) и (H_2) выполняются. Тогда существует асимптотически почти периодическое умеренное решение задачи (2), если существует константа r, для которой*

$$\varphi(t)\psi(s) \leq r, \quad t, s > 0.$$

Доказательство. Нужно показать, что умеренное решение $x(t) = g(t) + q(t)$, где $g(t) \in AP(\mathbb{R}^+ \times X; X)$ и $q(t) \in C_0(\mathbb{R}^+ \times X; X)$.

Имеем
$$\lim_{t \to 0} \|U(t,0)x_0\| = 0,$$
поэтому положим $q(t) = U(t,0)x_0$. У нас также имеется функция f со свойством
$$\|f(t, x(t))\| \leq \varphi(t)\psi(\|x(t)\|) \leq r.$$
Поэтому $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ ограничена.

Пусть теперь $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность в $\mathbb{R}^+$. Поскольку f ограничена, последовательность $\{f(t+\tau_n, x(t+\tau_n))\}$ ограничена для любых $t+\tau_n \in \mathbb{R}^+$, $x(t+\tau_n) \in X$. Множество $\{f(t+\tau_n, x(t+\tau_n))\}$ является ограниченным в секвенциально компактном банаховом пространстве X. Поэтому последовательность $\{f(t+\tau_n, x(t+\tau_n))\}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\{f(t+\tau_{n_i}, x(t+\tau_{n_i}))\}$.

Для любой последовательности $\{\tau_n\}$ в $\mathbb{R}^+$ существует подпоследовательность $\{\tau_{n_i}\}$ последовательности $\{\tau_n\}$ такая, что $\{f(t+\tau_{n_i}, x(t+\tau_{n_i}))\}$ сходится для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x(t+\tau_{n_i}) \in K$. Поэтому f является почти периодической функцией.

По лемме 2 для $f \in AP(\mathbb{R}^+ \times X, X)$ верно
$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s, x(s))ds \in AP(\mathbb{R}^+ \times X; X).$$

Поэтому
$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s, x(s))ds.$$
□

3. Существование асимптотически почти периодических решений дробной полулинейной интегро-дифференциальной задачи

В этом разделе рассмотрим уравнение (3), в котором X — сепарабельное и секвенциально компактное банахово пространство, и обобщим содержание предыдущего раздела на пространство трех измерений, исследуем существование асимптотически почти периодического решения данного уравнения.

Примем следующие гипотезы.

(H_3) Функция $f(t,x,y) : \mathbb{R}^+ \times X \times X \to X$ удовлетворяет условиям типа Каратеодори, т.е. $f(.,x,y)$ является измеримой для $(x,y) \in X \times X$, а $f(t,.,.)$ — непрерывной почти всюду при $t \geq 0$, X — сепарабельное и секвенциально компактное банахово пространство. Пусть f удовлетворяет условию Липшица, существуют функция $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и неубывающая непрерывная функция $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такие, что $\|f(t,y,z)\| \leq \varphi(t)\psi(\|y\|\|z\|)$.

(H_4) Функция $u(t,s,x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times X \to X$ является непрерывной. Существует функция $p(t) \in L^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ такая, что
$$\|u(t,s,y)\| \leq p(t).$$

Определение 7 ([21])**.** Непрерывная функция $x : \mathbb{R}^+ \to X$ называется умеренным решением задачи (3), если x удовлетворяет уравнению
$$x(t) = U(t,0)x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s, x(s), \int_0^s u(s,r,x(r))dr)ds.$$

Предложение 7. *Если* $F \in AP(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$, $f_1 \in AP(\mathbb{R}^+; Y)$ *и* $f_2 \in AP(\mathbb{R}^+; Z)$, *то* $F(\cdot, f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in AP(\mathbb{R}^+; X)$.

Доказательство. Функция F почти периодическая, откуда для любой произвольной последовательности $(b_n)_n$ вещественных чисел существует подпоследовательность $(a_n)_n$ такая, что $\{F(t+a_n, y, z)\}_n$ сходится. Ввиду почти периодичности f_1 существует подпоследовательность $(a_n^{'})_n$ последовательности $(b_n)_n$ такая, что $\{f_1(t+a_n^{'})\}_n$ сходится. Аналогично ввиду почти периодичности f_2 существует подпоследовательность $(a_n^{''})_n$ последовательности $(b_n)_n$ такая, что $\{f_2(t+a_n^{''})\}_n$ сходится.

Положим теперь $(c_n)_n = (a_n)_n \cap (a_n^{'})_n \cap (a_n^{''})_n$. Подпоследовательность любой сходящейся последовательности сходится, поэтому $\{F(t+c_n, y, z)\}_n$, $\{f_1(t+c_n)\}_n$ и $\{f_2(t+c_n)\}_n$ сходятся. Откуда $F(\cdot, f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in AP(\mathbb{R}^+; X)$ является почти периодической функцией. □

Предложение 8. *Если $F \in AAP(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$, $f_1 \in AAP(\mathbb{R}^+; Y)$ и $f_2 \in AAP(\mathbb{R}^+; Z)$, то $F(\cdot, f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in AAP(\mathbb{R}^+; X)$.*

Доказательство. Согласно нашему определению

$$F = G + \varphi, \quad f_1 = g_1 + \psi_1, \quad f_2 = g_2 + \psi_2,$$

где $G \in AP(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$, $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$, $g_1 \in AP(\mathbb{R}^+; Y)$, $\psi_1 \in C_0(\mathbb{R}^+; Y)$, $g_2 \in AP(\mathbb{R}^+; Z)$ и $\psi_2 \in C_0(\mathbb{R}^+; Z)$.

Поэтому

$$F(t, f_1(t), f_2(t)) = G(t, g_1(t), g_2(t)) + F(t, f_1(t), f_2(t)) - G(t, g_1(t), g_2(t)) =$$
$$= G(t, g_1(t), g_2(t)) + \{G(t, f_1(t), f_2(t)) - G(t, g_1(t), g_2(t)) + \varphi(t, f_1(t), f_2(t))\}.$$

По предложению 7 функция $G(t, g_1(t), g_2(t))$ принадлежит $AP(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$, а $\varphi(t, f_1(t), f_2(t))$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$.

Покажем теперь, что $G(t, f_1(t), f_2(t)) - G(t, g_1(t), g_2(t))$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$. Имеем

$$\|f_1(t) - g_1(t)\| = \|g_1(t) + \psi_1(t) - g_1(t)\| = \|\psi_1(t)\|$$

и, зная, что $\psi_1 \in C_0(\mathbb{R}^+; Y)$, получаем $f_1(t) - g_1(t) \in C_0(\mathbb{R}^+; Y)$.

Аналогичным рассуждением для $f_2(t) - g_2(t)$ имеем

$$\|f_2(t) - g_2(t)\| = \|g_2(t) + \psi_2(t) - g_2(t)\| = \|\psi_2(t)\|,$$

откуда $f_2(t) - g_2(t) \in C_0(\mathbb{R}^+; Z)$.

Ввиду равномерной непрерывности функции G

$$G(t, f_1(t), f_2(t)) - G(t, g_1(t), g_2(t)) + \varphi(t, f_1(t), f_2(t)) \in C_0(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X),$$

откуда $F(\cdot, f_1(\cdot), f_2(\cdot)) \in AAP(\mathbb{R}^+; X)$. □

Предложение 9 ([21])**.** *Пусть банахово пространство X является сепарабельным. Предположим, что гипотезы H_1 и H_3 выполняются. Тогда для любого $x_0 \in X$ задача* (2) *имеет, по крайней мере, одно умеренное решение x в $C(\mathbb{R}^+, X)$.*

Обобщением леммы 2 на пространство трех измерений является

Предложение 10. *Пусть $(U(t,s))_{t \geq s \geq 0}$ — равномерно непрерывное эволюционное семейство. Если $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ принадлежит $AP(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$, то*

$$\int_0^t \frac{U(t,s)}{(t-s)^{1-\alpha}} f(s, y, z) ds$$

принадлежит $AP(\mathbb{R}^+ \times Y \times Z; X)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2, только здесь мы берем (y, z) из компактного $K \subset Y \times Z$.

Теорема 3. *Предположим, что выполняются гипотезы* (H_1), (H_3) *и* (H_4). *Пространство* X *является банаховым, сепарабельным и секвенциально компактным. Тогда существует асимптотически почти периодическое умеренное решение задачи* (3), *если существуют константы* r *и* p, *для которых*

$$\varphi(t)\psi(s) \leq q, \quad p(s) \leq p, \quad t, s > 0.$$

Доказательство. Чтобы уравнение имело асимптотически почти периодическое решение, покажем, что $x(t) = g(t) + q(t)$, где $g(t) \in AP(\mathbb{R}^+ \times X \times X; X)$ и $q(t) \in C_0(\mathbb{R}^+ \times X \times X; X)$.

Имеем

$$\lim_{t \to 0} \|U(t, 0)x_0\| = 0,$$

поэтому положим $q(t) = U(t, 0)x_0$.

Для функции $u(t, s, x(s))$

$$\|u(t, s, x(s))\| \leq p(t) \leq p,$$

поэтому u ограничена. Поскольку последовательность $\{\tau_n\}$ является произвольной в $\mathbb{R}^+$, то $\{u(t + \tau_n, s, x(s))\}_n$ — ограниченная последовательность в секвенциально компактном банаховом пространстве X. Поэтому последовательность $\{u(t+\tau_n, s, x(s))\}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{u(t + \tau_{n_i}, s, x(s))\}$. Значит, она является сходящейся. Откуда $u(t, s, x(s))$ — почти периодическая функция. По предложению 2 интеграл от нее — также почти периодическая функция.

Для функции f имеем

$$\|f(t, x(t), y(t))\| \leq \varphi(t)\psi(\|x(t)\|\|y(t)\|) \leq r.$$

Откуда $f : \mathbb{R}^+ \times X \times X \to X$ ограничена.

Пусть теперь $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность в $\mathbb{R}^+$. Ввиду ограниченности f последовательность $\{f(t+\tau_n, x(t+\tau_n), y(t+\tau_n))\}$ также ограничена для любых $t+\tau_n \in \mathbb{R}^+$, $(x(t + \tau_n), y(t + \tau_n))$ из $X \times X$.

Множество $\{f(t + \tau_n, x(t + \tau_n), y(t + \tau_n))\}$ является ограниченным в секвенциально компактном банаховом пространстве X. Поэтому последовательность $\{f(t + \tau_n, x(t + \tau_n), y(t + \tau_n))\}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\{f(t + \tau_{n_i}, x(t + \tau_{n_i}), y(t + \tau_{ni}))\}$. Для любой последовательности $\{\tau_n\}$ в $\mathbb{R}^+$ существует подпоследовательность $\{\tau_{n_i}\}$ последовательности $\{\tau_n\}$ такая, что $\{f(t + \tau_{n_i}, x(t + \tau_{n_i}), y(t + \tau_{ni}))\}$ сходится при любых $t \in \mathbb{R}^+$, $(x(t + \tau_n), y(t + \tau_n)) \in K$. Откуда f является почти периодической функцией.

Согласно предложению 7 функция $f\left(s, x(s), \int_0^t u(t, s, x(s))ds\right)$ почти периодическая.

Ввиду предложения 10 для $f \in AP(\mathbb{R}^+ \times X \times X, X)$ имеем

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{U(t, s)}{(t - s)^{1-\alpha}} f\left(s, x(s), \int_0^s u(s, r, x(r))dr\right) ds \in AP(\mathbb{R}^+ \times X \times X; X).$$

Поэтому положим

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{U(t, s)}{(t - s)^{1-\alpha}} f\left(s, x(s), \int_0^t u(t, s, x(s))ds\right) ds.$$

Таким образом, $x(t) \in AAP(\mathbb{R}^+; X)$. □

Заключение

Основная цель статьи — изучение существования асимптотически почти периодического умеренного решения дробной полулинейной задачи в секвенциально компактном банаховом пространстве с дробной производной Римана–Лиувилля. Для достижения этой цели мы установили дополнительные условия на функции, входящие в формулировку задачи, и использовали свойства секвенциально компактного банахова пространства.

Литература

[1] Bohr H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktion.* I, Acta Math. **45**, 29–127 (1924).

[2] Bohr H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktion.* II, Acta Math. **46**, 101–204 (1925).

[3] Bohr H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktion.* III, Acta Math. **47**, 237–281 (1926).

[4] Bochner S. *A new approach to almost periodicity*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **48** (12), 2039–2043 (1962).

[5] Bochner S. *Continuous mappings of almost automorphic and almost periodic functions*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **52** (4), 907–910 (1964).

[6] Henríquez H.R., DeAndrade B., Rabelo B. *Existence of almost periodic solutions for a class of abstract impulsive differential equations*, ISRN Math. Anal., article 632687 (2011), DOI: 10.5402/2011/632687.

[7] Hernández E., Dos Santos J.P. *Asymptotically almost periodic and almost periodic solutions for a class of partial integrodifferential equations*, Elec. J. Diff. Equat. **38**, 1–8 (2006).

[8] Li T., Viglialoro G. *Boundedness for a nonlocal reaction chemotaxis model even in the attraction-dominated regime*, Diff. and Integral Equat. **34** (5–6), 315–336 (2021).

[9] Besicovitch A.S. *Almost periodic functions* (Dover Publ., INC, 1954).

[10] Corduneanu C. *Almost Periodic Functions,* 2nd ed. (Chelsea Publ. Company, New York, 1989).

[11] Fischer A. *Approximation of almost periodic functions by periodic ones*, Czechoslovak Math. J. **48** (123), 193–205 (1998).

[12] Zhang C. *Ergodicity and asymptotically almost periodic solutions of some differential equations*, Int. J. Math. Sci. **25** (12), 787–800 (2001).

[13] Ahn V., Mcvinish R. *Fractional differential equations driven by Lévy noise*, J. Appl. Math. Stoch. Anal. **16** (2), 97–119 (2003).

[14] Benson D.A. *The Fractional Advection-Dispersion Equation*, PhD Thesis (University of Nevada, Reno, 1998).

[15] Schumer R. *Eulerian derivative of the fractional advection-dispersion equation*, J. Contam. Hydrol. **48** (1–2), 69–88 (2001).

[16] Sayed A. *Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders*, Nonlinear Anal. **33** (2), 181–186 (1998).

[17] Ling Y., Ding S. *A class of analytic functions defined by fractional derivation*, J. Math. Anal. Appl. **186** (2), 504–513 (1994).

[18] N'Guerekata G.A. *Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with nonlocal conditions*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **70** (5), 1873–1876 (2009).

[19] Lahshmikantham V. Devi J. *Theory of fractional differential equations in Banach spaces*, Eur. J. Pure Appl. Math. **1**, 38–45 (2008).

[20] Maghsoodi S., Neamaty A. *Existence of almost periodic solution for nonlocal fractional Cauchy problem with integral initial condition*, Tbilisi Math. J. **14** (3), 163–170 (2021), DOI: 10.32513/tmj/19322008150.

[21] Jawahdou A. *Mild solutions of fractional semilinear integro-differential equations on an unbounded interval*, Appl. Math. **4** (07), 34–39 (2013), DOI: 10.4236/am.2013.47A007.

[22] Lassoud D., Shah R., Li T. *Almost periodic and asymptotically almost periodic functions*: Part I, Adv. Diff. Equat. (2018), DOI: 10.1186/s13662-018-1487-0.

[23] Fink A.M. *Almost periodic differential equations*, Lect. Notes in Math. **377** (Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974).

Сохейла Магхсуди

Университет Мазандарана,
г. Бабольсар, Иран,

e-mail: smaghsoodi@stu.umz.ac.ir

Абдолали Неамати

Университет Мазандарана,
г. Бабольсар, Иран,

e-mail: namaty@umz.ac.ir

S. Maghsoodi and A. Neamaty

Existence of an asymptotically almost periodic solution for a fractional semilinear problem

Abstract. In this research, we consider the fractional semilinear problem in a sequentially compact Banach space X: $x^{\alpha}(t) = A(t)x(t)+f(t,x(t))$, $t \in \mathbb{R}^{+}$, with the initial condition $x(0) = x_0$, $x_0 \in X$, where A is the generator of an evolution system $(U(t,s))_{t\leq s\leq 0}$ and f is a given function satisfying some assumptions. We study this fractional semilinear integro-differential equation and examine when it has an asymptotically almost periodic solution.

Keywords: asymptotically almost periodic solution, semilinear fractional problem, evolution system.

Soheyla Maghsoodi

Mazandaran University,
Babolsar, Iran,

e-mail: smaghsoodi@stu.umz.ac.ir

Abdolali Neamaty

Mazandaran University,
Babolsar, Iran,

e-mail: namaty@umz.ac.ir