

И.А. КОЛЕСНИКОВ, Ю.А. ЛОБОДА, А.Х. ШАРОВ

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛОСЫ НА КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК ТИПА ПОЛОСЫ

Аннотация. Рассматриваются односвязные области типа полосы, обладающие симметрией переноса, с границей, состоящей из дуг окружностей (круговые счетноугольники типа полосы). Производная Шварца конформного отображения полосы на круговой счетноугольник записана через эллиптические функции. Получено обобщение формулы Кристоффеля–Шварца для отображения полосы на счетноугольник с границей, состоящей из отрезков прямых. Рассмотрен один частный случай счетноугольника, обладающего дополнительной симметрией относительно вертикальной прямой.

Ключевые слова: конформное отображение, полоса, круговой счетноугольник, симметрия переноса, формула Кристоффеля–Шварца.

УДК: 517.54

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-34-44

ВВЕДЕНИЕ

Классический инструмент построения конформного отображения канонической области (круг, полуплоскость) на многоугольник с границей, состоящей из отрезков прямых — формула Кристоффеля–Шварца ([1], с. 425). Эта формула была обобщена на случай конформных отображений многоугольников с границей, состоящей из дуг окружностей ([1], с. 398), многоугольников со специальными геометрическими свойствами, в частности, для односвязных многоугольников D , обладающих симметрией переноса [2]–[5]. Область D называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор V , $V > 0$, если $D = L(D)$, где $L(w) = w + V$. Всякая область с симметрией переноса неограничена, а также либо односвязна, либо бесконечносвязна. Бесконечно удаленная точка может быть носителем одного, двух или счетного количества (в этом случае граница содержит счетное количество разрезов, уходящих на бесконечность) простых концов области с симметрией переноса. Для области D с симметрией переноса возможны только два варианта: при преобразовании $L(w) = w + V$ среди всех простых концов с носителями на бесконечности неподвижными могут оставаться либо один, либо два простых конца. В первом случае область D называют областью типа полуплоскости [2]–[4], [6]–[11], во втором — областью типа полосы [5]–[7], [12], [13].

В англоязычной литературе область с симметрией переноса и границей, состоящей из отрезков прямых, называют «periodic polygon» [2], [5], [6]. Следуя работе [3] будем называть

Поступила в редакцию 26.10.2023, после доработки 03.03.2024. Принята к публикации 20.03.2024.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2023-943).

такие области счетноугольниками. Формула Кристоффеля–Шварца распространена для отображения верхней полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости с границей, состоящей из отрезков прямых [3], [11].

Теорема 1. *Отображение f верхней полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости с границей из отрезков прямых, удовлетворяющее условиям $f(\infty) = \infty$, $f(z + 2\pi) = f(z) + 2\pi$, представимо в виде*

$$f'(z) = c \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{z - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1}, \quad (1)$$

где a_k — прообразы вершин, принадлежащие отрезку $[0, 2\pi)$, $\alpha_k \pi$ — углы счетноугольника при этих вершинах, $k = 1, \dots, n$, $c \in \mathbb{C}$.

Теорема 1 была первоначально установлена в работе [3] с дополнительным множителем $G(z)$ в правой части формулы (1), $G(z)$ — целая функция. В работе [11] показано, что этот множитель есть константа: $G(z) = \text{const}$.

Формула (1) обобщена для счетноугольников типа полуплоскости с границей, состоящей из дуг окружностей [4], [10].

Численно-аналитический подход построения конформного отображения полосы на счетноугольник типа полосы с границей, состоящей из отрезков прямых, реализован в [7], [12]. Формула Кристоффеля–Шварца получила обобщение для односвязных счетноугольников типа полосы в работе [5], в [13] — для многосвязных счетноугольников типа полосы. Упомянем некоторые работы, посвященные приложениям конформных отображений счетноугольников типа полосы. Конформное отображение полосы на счетноугольник типа полосы используется для построения минимальных поверхностей с трехкратной симметрией [5], для решения дифференциальных уравнений [14], для решения задач электростатики [15], задач гидродинамики [7], [16], задач теплопроводности [17], [18].

Данная работа посвящена конформным отображениям полосы на счетноугольники с симметрией переноса типа полосы. В первом разделе строится конформное отображение полосы на счетноугольник типа полосы с границей, состоящей из дуг окружностей. Во втором разделе строится конформное отображение полосы на счетноугольник типа полосы с границей, состоящей из отрезков прямых. В третьем разделе приводится пример конформного отображения полосы на счетноугольник типа полосы с границей, состоящей из отрезков прямых и обладающий симметрией относительно вертикальной прямой.

Далее в этом разделе приведем некоторые обозначения и вспомогательные результаты.

Пусть функция $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в односвязной области D , $f'(z) \neq 0$. Для производной Шварца функции f в D будем использовать следующее обозначение ([1], с. 399):

$$\{f(z), z\} = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

Теорема 2 ([1], с. 400). *Пусть отображения f и g голоморфны в области D , $f' \neq 0$, $g' \neq 0$ в D . Тогда равенство $\{f(z), z\} = \{g(z), z\}$ в D имеет место тогда и только тогда, когда $g(z) = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}$, где $ad - bc \neq 0$.*

Теорема 3. *Пусть D — круговой многоугольник, многоугольник D^* симметричен D относительно некоторой стороны α многоугольника D , многоугольник D^{**} симметричен D^* относительно некоторой стороны α^* многоугольника D^* . Тогда $D^{**} = g(D)$, где g — дробно-линейное преобразование.*

Приведем информацию из теории эллиптических функций (см., например, [19], [20]) необходимую для доказательства основных результатов.

Введем обозначение $\Omega := \{2m\omega_1 + 2n\omega_2, n, m \in \mathbb{Z}\}$. Здесь $2\omega_1, 2\omega_2$ — фундаментальные периоды эллиптической функции, выбранные так, что $\text{Im } \tau > 0, \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Будем использовать следующие специальные функции:

- σ -функция Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) e^{\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2};$$

- первая ϑ -функция

$$\vartheta_1(z) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin \pi z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\pi z + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5\pi z - \dots,$$

где $q = e^{\pi i \tau}, |q| < 1$;

- ζ -функция Вейерштрасса

$$\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right);$$

- $\wp$ -функция Вейерштрасса

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = -\zeta'(z).$$

Приняты обозначения

$$\wp(\omega_1) = e_1, \quad \wp(\omega_2) = e_2, \quad \wp(\omega_1 + \omega_2) = e_3. \quad (2)$$

Отметим, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0. \quad (3)$$

Отметим еще следующие свойства этих функций:

$$\sigma(z + 2\omega_k) = -e^{2\zeta(\omega_k)(z + \omega_k)} \sigma(z), \quad k = 1, 2; \quad (4)$$

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_1), \quad (5)$$

$$\zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\zeta(\omega_2);$$

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)} e^{\zeta(\omega_1) \frac{z^2}{2\omega_1}} \vartheta_1\left(\frac{z}{2\omega_1}\right). \quad (6)$$

При ω_2 , стремящемся к бесконечности, имеем

$$\sigma(z) \rightarrow \frac{2\omega_1}{\pi} e^{\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right)^2} \sin \frac{\pi z}{2\omega_1}, \quad (7)$$

$$\zeta(z) \rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 z + \frac{\pi}{2\omega_1} \text{ctg} \frac{\pi z}{2\omega_1}. \quad (8)$$

Следующие три утверждения относятся к общим свойствам эллиптических функций.

Теорема 4 ([19], с. 689). *Сумма вычетов эллиптической функции относительно всех полюсов, лежащих в параллелограмме периодов, равна нулю.*

Теорема 5 ([19], с. 689). *Целая эллиптическая функция является константой.*

Теорема 6 ([19], с. 712). Пусть эллиптическая функция f имеет в основном параллелограмме периодов полюса $a_1, \dots, a_n$ с главными частями

$$\frac{c_{k1}}{z - a_k} + \dots + \frac{c_{kn_k}}{(z - a_k)^{n_k}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда f можно представить в виде

$$f(z) = C + \sum_{k=1}^n \left(c_{k1} \zeta(z - a_k) - c_{k2} \zeta'(z - a_k) + \dots + (-1)^{n_k-1} \frac{c_{kn_k}}{(n_k - 1)!} \zeta^{(n_k-1)}(z - a_k) \right),$$

где C — некоторая константа.

1. КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК ТИПА ПОЛОСЫ

Пусть $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ и D есть односвязная область с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор V типа полосы. По теореме Римана существует однолистное голоморфное отображение $f : S \rightarrow D$ такое, что $f(S) = D$.

Пусть двум простым концам полосы S с носителями на бесконечности при отображении f соответствуют два простых конца счетноугольника Δ с носителями на бесконечности. Отметим, что для каждого такого отображения f , переводящего полосу S на счетноугольник с симметрией переноса вдоль вещественной оси на вектор $V > 0$, существует вещественное число $v > 0$ такое, что $f(z + kv) = f(z) + kV$, $k \in \mathbb{Z}$.

Счетноугольником типа полосы с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π будем называть односвязную область $\Delta \subset \mathbb{C}$, удовлетворяющую следующим условиям:

- область Δ инвариантна относительно сдвига $L(w) = w + 2\pi$;
- при преобразовании L на бесконечности остаются неподвижными два простых конца границы Δ ;
- часть границы $f((z_0, z_0 + 2\pi))$ области Δ состоит из конечного числа дуг окружностей, где $z_0 \in \partial S$.

Рассмотрим вопрос о нормировке отображения $f : S \rightarrow \Delta$, $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$. Для отображения f выполняется $f(z + v) = f(z) + 2\pi$. Рассмотрим композицию $\tilde{f}(z) = f(\mu z + \delta)$, $\mu > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. Можно выбрать μ так, чтобы $\tilde{f}(z + 2\pi) = \tilde{f}(z) + 2\pi$, и можно выбрать δ так, чтобы заданная граничная точка z_0 полосы S при отображении $\tilde{f}$ переходила в заданную граничную точку w_0 счетноугольника Δ . Очевидно, что переход к отображению $\tilde{f}$, обладающему свойством $\tilde{f}(z + 2\pi) = \tilde{f}(z) + 2\pi$, эквивалентен выбору ширины h полосы S такой, что $f(z + 2\pi) = f(z) + 2\pi$, $f : S \rightarrow \Delta$.

Итак, существуют единственное h и отображение $f : S \rightarrow \Delta$, переводящее голоморфно и однолистно полосу $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ на счетноугольник Δ так, что двум простым концам полосы с носителями на бесконечности соответствуют два простых конца счетноугольника Δ с носителями на бесконечности, для которого

$$f(z + 2\pi) = f(z) + 2\pi \tag{9}$$

и $f(z_0) = w_0$, где $z_0 \in \partial S$. Далее будем изучать такое отображение.

Обходя части границы $f([0, 2\pi))$ и $f([ih, ih + 2\pi))$ счетноугольника Δ в положительном направлении, обозначим последовательно встречающиеся угловые точки границы через $A_{k,0}$, $k = 1, \dots, N$, будем называть их вершинами счетноугольника на основном периоде. Введем обозначение $A_{k,n} = A_{k,0} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Угол при вершине $A_{k,n}$ обозначим через $\alpha_k \pi$, $k = 1, \dots, N$.

Прообразы вершин $A_{k,n}$ при отображении f обозначим через $a_{k,n}$, $a_{k,n} \in \partial S$. Для упрощения обозначим $a_{k,0} =: a_k$.

Отображение f голоморфно в полосе S и на интервалах границы ∂S , не содержащих прообразов вершин $a_{k,n}$, $k = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{Z}$, и согласно принципу симметрии Римана–Шварца аналитически продолжается через эти интервалы. Продолжим по принципу симметрии отображение f из области S через какие-нибудь два различных интервала вещественной оси, не содержащих особых точек функции f , в область $S^* = \{z \in \mathbb{C} : -h < \operatorname{Im} z < 0\}$. Получим два отображения f^* , f^{**} , конформно отображающие область S^* на счетноугольники Δ^* и Δ^{**} соответственно, симметричные счетноугольнику Δ относительно некоторых дуг окружностей. Согласно теореме 3 отображения f^* и f^{**} связаны дробно-линейным отображением. Выполняя всевозможные аналитические продолжения отображения f , получим бесконечнозначную аналитическую функцию, для нее исходная функция f является в полосе S одной из однозначных ветвей. Различные ветви этой полной аналитической функции в точке z , $z \neq a_k + 2\pi n + 2iht$, $n, t \in \mathbb{Z}$, согласно теореме 3 связаны дробно-линейным преобразованием. Из теоремы 2 следует, что производная Шварца $\{f(z), z\}$ — однозначная в $\mathbb{C}$ функция.

Лемма 1. *Производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции f на границе полосы ∂S , за исключением особых точек $a_k + 2\pi n$, $k = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{Z}$, принимает вещественные значения.*

Доказательство. Отображение f переводит интервал границы ∂S , не содержащий особых точек $a_k + 2\pi n$, $k = 1, \dots, N$, $n \in \mathbb{Z}$, на дугу окружности, поэтому сужение f на этот интервал можно записать в виде $f(x) = z_0 + re^{i\phi(x)}$, где z_0 и r — центр и радиус соответствующей окружности, $\phi(x)$ — некоторая вещественная функция. Находя производную Шварца функции f , получаем

$$\{f(x), x\} = \{\phi(x), x\} + \frac{\phi'^2(x)}{2},$$

откуда видно, что $\{f(x), x\} \in \mathbb{R}$ при $x \in \partial S$, $x \neq a_k + 2\pi n$. $\square$

Лемма 2. *Производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции f — двоякопериодическая функция с периодами 2π и $2ih$.*

Доказательство. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции f имеет период 2π в силу (9).

В силу теоремы 3 значения полной аналитической функции f в точках z и $z + 2ih$ связаны дробно-линейным преобразованием, следовательно, по теореме 2 заключаем, что $2ih$ — период для $\{f(z), z\}$. $\square$

Исследуем поведение производной Шварца $\{f(z), z\}$ в ее изолированных особых точках $a_k + 2\pi n + 2iht$, $k = 1, \dots, N$, $n, t \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности $\{f(z), z\}$ достаточно изучить $\{f(z), z\}$ в окрестностях особых точек, принадлежащих прямоугольнику

$$Q := \{z : a_1 \leq \operatorname{Re} z < a_1 + 2\pi, 0 \leq \operatorname{Im} z < 2ih\}.$$

Пусть ξ — прообраз одной из вершин счетноугольника Δ , $\xi \in Q$, $\xi \in \{a_k, k = 1, \dots, N\}$, $\psi\pi$ — угол при соответствующей вершине W .

Лемма 3. *Производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции f — мероморфная функция с полюсами в точках $a_k + 2\pi n + 2iht$, $k = 1, \dots, N$, $n, t \in \mathbb{Z}$, и главными частями в них*

$$\frac{1 - \alpha_k^2}{2(z - a_k - 2\pi n - 2iht)^2} + \frac{M_k}{z - a_k - 2\pi n - 2iht}. \quad (10)$$

Доказательство. Изучение производной Шварца $\{f(z), z\}$ функции f , переводящей полосу на круговой счетноугольник типа полосы, в окрестности прообраза вершины аналогично изучению производной Шварца $\{f(z), z\}$ функции f , переводящей полуплоскость на круговой многоугольник ([1], с. 398). Здесь рассмотрим только случай, когда угол $\psi\pi$ при вершине $W = f(\xi)$ имеет величины $0, \pi$ или 2π . При этом прилегающие стороны могут быть дугами окружностей или дугой окружности и прямолинейным отрезком.

Представим отображение f в виде композиции $f(z) = g_1(g_2(g_3(z)))$, где $\zeta = g_3(z) = e^{z\frac{\pi}{h}} - e^{\xi\frac{\pi}{h}}$ переводит область $S \cap U(\xi, \varepsilon)$ в полукрестность точки нуль. Отображение $\omega = g_1^{-1}(w) = \frac{A}{w - W} + B$ переводит вершину W в бесконечно удаленную точку, при этом стороны, прилегающие к вершине, переходят в параллельные прямолинейные отрезки. Можно выбрать A и B так, чтобы расстояние между этими отрезками равнялось π . Отображение g_2 имеет вид $\omega = g_2(\zeta) = \ln \zeta + \zeta^{-\psi} + T(\zeta)$, где $T(\zeta)$ — голоморфное в нуле отображение.

Отображение $g_2(g_3(z))$ в окрестности точки ξ представимо в виде

$$g_2(g_3(z)) = \ln(z - \xi) + \delta_1(z - \xi)^{-\psi} + \delta_2(z - \xi)^{1-\psi} + \tilde{T}(z - \xi),$$

где $\tilde{T}(z - \xi)$ — голоморфная часть. Находим

$$\{g_2(g_3(z)), z\} = \frac{1 - \psi^2}{2(z - \xi)^2} + \frac{M}{z - \xi} + \Phi(z),$$

где M — вещественная константа, $\Phi(z)$ — голоморфная часть.

В силу теоремы 2 $\{f(z), z\} = \{g_2(g_3(z)), z\}$, т. е. $\{f(z), z\}$ имеет вид (10). $\square$

Лемма 4. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ функции f , отображающей полосу S на счетноугольник Δ и нормированная условием (9), является эллиптической функцией с периодами 2π и $2ih$.

Доказательство. Утверждение следует из лемм 2 и 3. $\square$

Теорема 7. Производная Шварца $\{f(z), z\}$ отображения f , голоморфно и однолистно переводящего полосу $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ на круговой счетноугольник типа полосы Δ , нормированного условием (9), имеет вид

$$\{f(z), z\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (1 - \alpha_k^2) \wp(z - a_k) + \sum_{k=1}^N M_k \zeta(z - a_k) + \theta, \quad (11)$$

где $\theta, M_k \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^N M_k = 0$, a_k — прообраз вершины A_k^0 , $\alpha_k\pi$ — угол при этой вершине, $k = 1, \dots, N$, $\wp(z)$ — $\wp$ -функция Вейерштрасса с периодами 2π и $2ih$, $\zeta(z)$ — ζ -функция Вейерштрасса, $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

Доказательство. Справедливость представления (11) следует из лемм 3, 4 и теоремы 6.

В силу теоремы 4 имеем $\sum_{k=1}^N M_k = 0$.

Рассмотрим сужение (11) на отрезок вещественной оси, не содержащий особых точек функции $\{f(z), z\}$. В силу того, что функции $\wp(z)$ и $\zeta(z)$ на вещественной оси принимают вещественные значения и леммы 1 заключаем, что $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

Из примера, приведенного в разделе 3, видно, что θ зависит от геометрии счетноугольника.

2. СЧЕТНОУГОЛЬНИК ТИПА ПОЛОСЫ С ГРАНИЦЕЙ ИЗ ОТРЕЗКОВ ПРЯМЫХ

Сформулируем аналог теоремы 7 для случая, когда граница счетноугольника типа полосы состоит из отрезков прямых. Насколько известно авторам статьи, впервые этот результат получен в работе [5], где константа γ в формуле (15) найдена другим способом.

Теорема 8. *Голоморфное однолистное отображение полосы $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ на счетноугольник типа полосы Δ с симметрией переноса и границей, состоящей из отрезков прямых, можно записать в виде*

$$f(z) = \tilde{c} \int_{z_0}^z e^{\nu z} \prod_{k=1}^N (\sigma(z - a_k))^{\alpha_k - 1} dz + c \quad (12)$$

или

$$f(z) = \hat{c} \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^N \left(\vartheta_1 \left(\frac{z - a_k}{2\pi} \right) \right)^{\alpha_k - 1} dz + c, \quad (13)$$

где $c, \tilde{c}, \hat{c} \in \mathbb{C}$, $\nu = \frac{\zeta(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^N a_k(\alpha_k - 1)$, a_k — прообраз вершины счетноугольника с углом $\alpha_k \pi$, $k = 1, \dots, N$.

Доказательство. Так как $\frac{f''}{f'}$ — эллиптическая функция с периодами 2π и $2ih$, имеющая простые полюсы в точках $a_k + 2\pi n + 2iht$, $n, t \in \mathbb{Z}$, с вычетами, равными $\alpha_k - 1$, то $\frac{f''}{f'}$ можно записать в виде

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{k=1}^N (\alpha_k - 1) \zeta(z - a_k) + \nu,$$

где ν — константа, или в виде

$$(\ln f'(z))' = \sum_{k=1}^N (\alpha_k - 1) \frac{d}{dz} \ln(\sigma(z - a_k)) + \nu.$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^N (\alpha_k - 1) \ln(\sigma(z - a_k)) + \ln e^{\nu z} + \ln c$$

или

$$f'(z) = ce^{\nu z} \prod_{k=1}^N (\sigma(z - a_k))^{\alpha_k - 1}. \quad (14)$$

Отображение f' имеет период 2π , поэтому в силу $\sum_{k=1}^N \alpha_k = N$ и (4) имеем

$$f'(z + 2\pi) = f'(z) = f'(z) e^{2\pi\nu - 2\zeta(\pi) \sum_{k=1}^N a_k(\alpha_k - 1)}.$$

Следовательно,

$$\nu = \frac{\zeta(\pi)}{\pi} \sum_{k=1}^N a_k(\alpha_k - 1) + i\gamma, \quad \text{где } \gamma \in \mathbb{Z}. \quad (15)$$

Покажем, что константа γ равна нулю. Подвергнем счетноугольник Δ непрерывной деформации: будем сдвигать вверх часть границы счетноугольника Δ , являющуюся образом прямой $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = h\}$ при отображении f . Заметим, что при $h \rightarrow \infty$ параметр γ должен меняться непрерывно, но γ — целое число, поэтому γ не меняется. Используя (7), (8) и равенство $\sum_{k=n+1}^N (\alpha_k - 1) = 0$, получаем, что согласно (обобщенной) теореме Каратеодори [21] отображение f' при $h \rightarrow \infty$ сходится к отображению

$$f'(z) \rightarrow c e^{i\gamma z} \prod_{k=1}^n \left(\sin \frac{z - a_k}{2} \right)^{\alpha_k - 1},$$

где n — количество прообразов вершин на отрезке вещественной оси $[0, 2\pi)$. Сравнивая с (1), заключаем, что $\gamma = 0$.

Проинтегрировав равенство (14) по кривой, соединяющей точку z_0 , $z_0 \neq a_k + 2\pi n + 2ihm$, с точкой z , $z \in S$, получим (12).

Запишем еще искомую функцию через первую тета-функцию. С помощью формулы (6) находим

$$\sigma(z - a_k) = \frac{2\pi}{\vartheta_1'(0)} e^{\frac{\zeta(\pi)}{2\pi}(z - a_k)^2} \vartheta_1\left(\frac{z - a_k}{2\pi}\right).$$

Проведя соответствующие преобразования в (12), получим (13). $\square$

3. ПРИМЕР

Рассмотрим голоморфное однолистное отображение f полосы

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < h\}$$

на счетноугольник Δ с четырьмя вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 на основном периоде и границей, состоящей из отрезков прямых. Пусть $\operatorname{Re} A_1 = \operatorname{Re} A_4 = 0$, $\operatorname{Re} A_2 = \operatorname{Re} A_3 = \pi$, т.е. счетноугольник Δ обладает симметрией относительно прямых $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$ и $\{z : \operatorname{Re} z = \pi\}$. Угол при вершине A_k обозначим через $\alpha_k \pi$, $k = 1, 2, 3, 4$. Пусть $a_1 = 0$ — прообраз вершины A_1 при отображении f , и f удовлетворяет (9). Тогда в силу принципа симметрии Римана–Шварца $a_2 = \pi$, $a_3 = \pi + ih$, $a_4 = ih$ — прообразы вершин A_2, A_3, A_4 соответственно, $h > 0$. Согласно теореме 8 отображение f' можно записать в виде

$$f'(z) = c e^{\nu z} \prod_{k=1}^4 (\sigma(z - a_k))^{\alpha_k - 1},$$

где $a_1 = 0$, $a_2 = \pi$, $a_3 = \pi + ih$, $a_4 = ih$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$, $\alpha_3 + \alpha_4 = 2$, $\nu = \zeta(\pi)(\alpha_2 + \alpha_3 - 2)$.

Отсюда находим, что производная Шварца отображения f имеет вид

$$\{f(z), z\} = - \sum_{k=1}^4 (\alpha_k - 1) \wp(z - a_k) - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^4 (\alpha_k - 1) \zeta(z - a_k) + \nu \right)^2. \quad (16)$$

С другой стороны, по теореме 7

$$\{f(z), z\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (1 - \alpha_k^2) \wp(z - a_k) + \sum_{k=1}^4 M_k \zeta(z - a_k) + \theta. \quad (17)$$

Сравнивая вычеты правых частей (16) и (17) в точках $0, \pi, \pi + ih$ и ih , находим

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0.$$

Сравнивая свободные члены разложений (16) и (17) в окрестности точки 0, используя обозначения (2), имеем

$$\theta = (\alpha_1 - 2)((\alpha_2 - 1)e_1 + (\alpha_3 - 1)e_3 + (\alpha_4 - 1)e_2) - \frac{1}{2}((1 - \alpha_2^2)e_1 + (1 - \alpha_3^2)e_3 + (1 - \alpha_4^2)e_2).$$

Перепишем это равенство, используя (3) и равенства $\alpha_1 = 2 - \alpha_2$, $\alpha_4 = 2 - \alpha_3$:

$$\theta = 2e_2(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) - \frac{e_1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3)^2. \quad (18)$$

Сужение отображения f на прямоугольник $R = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ переводит этот прямоугольник на трапецию $A_1A_2A_3A_4$. Итак, если заданы углы $\alpha_2\pi$, $\alpha_3\pi$ основания трапеции A_2A_3 и соотношение двух сторон трапеции $|A_1A_2|/|A_2A_3|$, то найдется такое h , что отображение f переводит прямоугольник R на трапецию $A_1A_2A_3A_4$ и удовлетворяет уравнению

$$\{f(z), z\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 (1 - \alpha_k^2) \wp(z - a_k) + \theta, \quad (19)$$

где θ определяется по формуле (18). Напротив, для заданного h и α_2 , α_3 найдется такое соотношение сторон $|A_1A_2|/|A_2A_3|$ трапеции, что отображение f переводит прямоугольник R на эту трапецию $A_1A_2A_3A_4$ и удовлетворяет уравнению (19). Таким образом, можно утверждать, что θ непрерывно зависит от h (или от $|A_1A_2|/|A_2A_3|$) и от углов трапеции.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров И.А. *Теория функций комплексного переменного* (ТГУ, Томск, 2002).
- [2] Hussenpflug W.S. *Elliptic integrals and the Schwarz–Christoffel transformation*, Comput. Math. Appl. **33** (12), 15–114 (1997).
- [3] Александров И.А. *Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса*, Изв. вузов. Матем. (6), 15–18 (1999).
- [4] Колесников И.А. *Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Сер. Матем. Механ. (2(22)), 33–43 (2013).
- [5] Fujimori S., Weber M. *Triply periodic minimal surfaces bounded by vertical symmetry planes*, Manuscripta mathem. (129), 29–53 (2009).
- [6] Driscoll T.A., Trefethen L.N. *Schwarz–Christoffel mapping*, **8**, Cambridge Monographs Appl. Comput. Math. (Cambridge Univ. Press, 2002).
- [7] Floryan J.M. *Conformal-mapping-based coordinate generation method for flows in periodic configurations*, J. Comput. Phys. **62** (1), 221–247 (1986).
- [8] Колесников И.А., Копанева Л.С. *Конформное отображение на счетноугольник с двойной симметрией*, Изв. вузов. Матем. (12), 37–47 (2014).
- [9] Колесников И.А. *Определение акцессорных параметров для отображения на счетноугольник*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Сер. Матем. Механ. (2(28)), 18–28 (2014).
- [10] Колесников И.А. *Определение акцессорных параметров конформных отображений из верхней полуплоскости на прямолинейные счетноугольники с двойной симметрией и круговые счетноугольники*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Сер. Матем. Механ. (60), 42–60 (2019).
- [11] Колесников И.А. *Конформное отображение полуплоскости на счетноугольник типа полуплоскости*, Вестн. Томск. гос. ун-та. Сер. Матем. Механ. (77), 5–16 (2022).
- [12] Floryan J.M. *Conformal-mapping-based coordinate generation method for channel flows*, J. Comput. Phys. **58** (2), 229–245 (1985).
- [13] Baddoo P.J., Crowdy D.G. *Periodic Schwarz–Christoffel mappings with multiple boundaries per period*, Proc. Math. Phys. Engin. Sci. **475** (2228), 1–20 (2019).
- [14] Hale N., Tee T.W. *Conformal maps to multiply slit domains and applications*, SIAM J. Sci. Comput. **31** (4), 3195–3215 (2009).
- [15] Gysen B.L.J., Lomonova E.A., Paulides J.J.H., Vandenput A.J.A. *Analytical and numerical techniques for solving Laplace and Poisson equations in a tubular permanent magnet actuator: Part II. Schwarz–Christoffel mapping*, IEEE Trans. Magnetics **44** (7), 1761–1767 (2008).

- [16] Baddoo P.J., Ayton L.J. *A calculus for flows in periodic domains*, Theor. Comput. Fluid Dynam. **35**, 145–168 (2021).
- [17] Fyrillas M.M. *Shape factor and shape optimization for a periodic array of isothermal pipes*, Internat. J. Heat Mass Transf. **53** (5-6), 982–989 (2010).
- [18] Leontiou T., Ikram M., Beketayev K., Fyrillas M.M. *Heat transfer enhancement of a periodic array of isothermal pipes*, Internat. J. Therm. Sci. **104** (9), 480–488 (2016).
- [19] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного* (Лань, М., 2002).
- [20] Ахиезер Н.И. *Элементы теории эллиптических функций* (Наука, М., 1970).
- [21] Насыров С.Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей* (Магариф, Казань, 2008).

Иван Александрович Колесников

*Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,*

e-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Юлия Анатольевна Лобода

*Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,*

e-mail: ysenchurova@yandex.ru

Азиз Хуршедович Шарофов

*Томский государственный университет,
пр. Ленина, д. 36, г. Томск, 634050, Россия,*

e-mail: aziz.sharofov@mail.ru

I.A. Kolesnikov, Yu.A. Loboda, and A.Kh. Sharofov

Conformal mapping of a strip onto a circular numerable polygon of strip type

Abstract. We consider a simply connected domain of strip type with the symmetry of transfer. The boundary of the domain consists of circular arcs (circular numerable polygon). We write the Schwarz derivative of the mapping of a strip onto a circular numerable polygon in terms of elliptic functions. We obtain a generalization of the Schwarz–Christoffel formula for mapping of a strip onto a numerable polygon with the boundary consisting of straight line segments. One special case of a numerable polygon with additional symmetry with respect to a vertical line is considered.

Keywords: conformal mapping, strip, circular numerable polygon, symmetry of transfer, Schwarz–Christoffel formula.

Ivan Aleksandrovich Kolesnikov

*Tomsk State University,
36 Lenina Ave., Tomsk, 634050 Russia,*

e-mail: ia.kolesnikov@mail.ru

Yulia Anatolievna Loboda

*Tomsk State University,
36 Lenina Ave., Tomsk, 634050 Russia,*

e-mail: ysenchurova@yandex.ru

Aziz Khurshedovich Sharofov

Tomsk State University,

36 Lenina Ave., Tomsk, 634050 Russia,

e-mail: aziz.sharofov@mail.ru