Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 9, с. 22–33 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

У.Д. ДУРДИЕВ, А.А. РАХМОНОВ

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМ ОПЕРАТОРОМ КАПУТО

Аннотация. В данной работе рассматривается начально-краевая задача (прямая задача) для уравнения четвертого порядка с дробной производной Капуто. Исследуются две обратные задачи определения правой части уравнения по заданному решению прямой задачи в некоторой точке. Неизвестной первой задачи является одномерная функция, зависящая от пространственной переменной, а во второй задаче ищется функция, зависящая от временной переменной. С помощью собственных чисел и функций решение прямой задачи находится в виде ряда Фурье. Устанавливаются достаточные условые на заданные функции, при выполнении которых решение этой задачи является классическим. Используя полученные результаты для прямой задачи и применяя метод интегральных уравнений изучаются обратные задачи. Таким образом, доказаны теоремы единственности и существования прямой и обратной задач.

Ключевые слова: начально-краевая задача, обратная задача, дробная производная Капуто, функция Миттаг–Леффлера, собственная функция, собственное число, единственность, существование.

УДК: 517.9

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-22-33

Введение

Расширение области производных целого порядка привело к хорошо известной математической области дробного исчисления. Поскольку большинство динамических явлений развиваются непрерывно, становится естественным расширить понятие производных целого порядка до производных дробного порядка. Эта теория имеет древнюю историю и критически важные приложения в различных областях [1], [2]. Список приложений дробно-дифференциальных уравнений растет высокими темпами во многих областях таких, как исследование ползучести или релаксации вязкоупругих материалов, проблемы управления, физика плазмы, модели диффузионных процессов и т.д. [3]. Дифференциальные уравнения с запаздыванием занимают важное место в различных областях практических приложений, основанных на реальной жизни. Эти уравнения также используются для моделирования систем с задержкой во времени, например, в системах управления, высокоскоростной обработке, энергосистемах, связи [4]. Дробные дифференциальные уравнения с запаздыванием используются для более точного моделирования динамических систем, также природных явлений [5].

Поступила в редакцию 08.09.2023, после доработки 23.04.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение 075-02-2024-1447).

В настоящее время теория обратных задач для уравнений математической физики изучена достаточно широко. Обратные задачи, связанные с классическими уравнениями в частных производных второго порядка исследованы в [6]. Методика доказательств локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, теорем единственности и условной устойчивости, а также численные подходы решения задач рассмотрены в работах [7]–[14] и др.

До недавнего времени интегрированиям и дифференцированиям дробных порядков уделялось мало внимания, несмотря на обширную область возможного применения. К примеру, дробное исчисление используется в моделях вязкоупругих тел, сплошных сред с памятью, трансформации температуры и влажности в слоях атмосферы, в уравнениях диффузии и в других областях. Прямые и обратные задачи для уравнений дробной диффузии исследованы, например, в работах [15], [16]. В работе [15] исследуется обратная задача определения правой части уравнения субдиффузии с дробной производной Римана–Лиувилля, а в [16] рассматривается двумерная обратная задача для уравнения дробной диффузии. В работах [17]–[19] представлен ряд интересных особенностей уравнений дробной субдиффузии, свидетельствующей об определенном сходстве этих уравнений с параболическими дифференциальными уравнениями второго порядка. В работе [20] доказаны локальные теоремы существования и глобальной единственности, а также получена оценка устойчивости решения задачи определения коэффициента реакции в уравнении диффузии с дробной производной по временем. Отметим, что в работах [21], [22] были исследованы начально-краевые задачи для дробного диффузионного-волнового уравнения четвертого порядка.

В работах [23]–[27] исследуются обратные задачи нахождения пространственно-зависимых и зависящих от времени младших членов уравнения диффузии с обобщенной дробной производной Римана–Лиувилля с помощью разложения по собственным функциям несамосопряженной спектральной задачи. Основные результаты этих исследований включают теоремы существования и единственности, а также оценку устойчивости решения. В работах [28]–[31] рассматривались обратные задачи определения коэффициентов и ядра в этих уравнениях.

В настоящей работе рассматривается прямая начально-краевая задача уравнения четвертого порядка с дробной производной Капуто порядка α, $1 < \alpha < 2$, и для этого уравнения исследуются обратные задачи по определению правой части. Необходимо отметить, что при $\alpha \to 2-0$ рассматриваемое уравнение переходит в уравнение, описывающее изгибные поперечные колебания однородной балки при воздействии внешней силы. За последние несколько лет возрос интерес к исследованию линейных и нелинейных начально-краевых задач для уравнения колебаний балки [32]–[35]. Обратные задачи по отысканию коэффициента жесткости основания и правой части для уравнения колебаний балки рассмотрены в работах [36]–[38].

1. Постановка задач

Рассмотрим уравнение четвертого порядка с дробной производной

$$ {}^{C}D_t^{\alpha} u(x,t) + a^2 u_{xxxx} = F(x,t), \tag{1} $$

где ${}^{C}D_t^{\alpha} u$ — дробная производная в смысле Капуто по переменной t функции $u(x,t)$ порядка $\alpha \in (1,2]$ ([39], с. 90):

$$ {}^{C}D_t^{\alpha} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} u_{\tau\tau}(x,\tau)\, d\tau, \quad {}^{c}D_t^{2} u(x,t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t). \tag{2} $$

Уравнение (1) рассмотрим в прямоугольной области

$$\Sigma = \Big\{(x,t) \mid 0 < x < l, \;\; 0 < t < T\Big\},$$

где l и T — заданные положительные числа, с начальными

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x), \;\; x \in [0,l], \tag{3}$$

и граничными

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0, \;\; t \in [0,T], \tag{4}$$

условиями.

В прямой задаче при заданных числах a, l, T и достаточно гладких функциях $f(x,t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ требуется найти функцию

$$u(x,t) \in C^1\left(\overline{\Sigma}\right) \cap C^{(4,\,\alpha)}\left(\Sigma\right), \tag{5}$$

удовлетворяющую уравнению (1) при $(x,t) \in \Sigma$ и условиям (3), (4). Здесь $C^{(4,\,\alpha)}\left(\Sigma\right)$ — класс функций, непрерывных в Σ и четыре раза непрерывно дифференцируемых по x в области Σ, для которых существует непрерывная производная ${}^CD_t^\alpha$.

Дадим определение класса функций $C_\gamma^n[0,T]$ ([39], с. 199):

$$C_\gamma^n[0,T] = \Big\{v(t) : t^\gamma v^{(n)}(t) \in C[0,T]\Big\},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \gamma < 1$.

Основной целью нашей работы являются следующие задачи.

Обратная задача 1. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$, $g(t)$ — известная функция. Найти пару функций $\{u(x,t), f(x)\} \in C^1\left(\overline{\Sigma}\right) \cap C^{(4,\,\alpha)}\left(\Sigma\right) \times C[0,l]$, удовлетворяющую условиям (1)–(4), и, кроме того, условию

$$u(x,t_0) = h(x), \;\; 0 \leq x \leq l, \;\; 0 < t_0 \leq T, \tag{6}$$

где $h(x) \in C^1[0,l]$, а $t_0 \in (0,T]$ — заданное число.

Обратная задача 2. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$ и $f(x)$ — известная функция. Найти пару функций $\{u(x,t), g(t)\} \in C^1\left(\overline{\Sigma}\right) \cap C^{(4,\,\alpha)}\left(\Sigma\right) \times AC[0,T]$, удовлетворяющую условиям (1)–(4) и условию

$$u(x_0,t) = q(t), \;\; 0 < x_0 < l, \;\; 0 \leq t \leq T, \tag{7}$$

где $q(t) \in C^2[0,T]$, а $x_0 \in (0,l)$ — заданное число.

2. Исследование решения прямой задачи

Для решения уравнения (1) с начальными (3) и граничными (4) условиями используем метод разделения переменных, представив $u(x,t) = X(x)T(t)$, получаем спектральную задачу относительно $X(x)$:

$$\begin{gathered} X^{(IV)} + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = X'(0) = X'(l) = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

и задачу относительно $T(t)$:

$$\begin{gathered} {}^CD_t^\alpha T(t) - a^2\lambda T(t) = F_n(t), \\ T(0) = \varphi_n, \;\; T'(0) = \psi_n, \end{gathered} \tag{9}$$

где

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x) Y_n(x) dx, \;\; \psi_n = \int\limits_0^l \psi(x) Y_n(x) dx,$$

$$F_n(t)=\int\limits_0^l F(x,t)Y_n(x)dx,$$

$$Y_n(x)=\frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|}$$

— ортонормированный базис,

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sh} d_n\left(x-\dfrac{l}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{d_n l}{2}\right)}-\dfrac{\sin d_n\left(x-\dfrac{l}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{d_n l}{2}\right)}, & n=2k-1;\\ \dfrac{\operatorname{ch} d_n\left(x-\dfrac{l}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{d_n l}{2}\right)}+\dfrac{\cos d_n\left(x-\dfrac{l}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{d_n l}{2}\right)}, & n=2k,\end{cases}$$

$$\|X_n(x)\|=\sqrt{l}\left|\operatorname{tg}\frac{d_n l}{2}\right|$$

определяется как решение спектральной задачи (8), которое исследовано в работе [40], а решение задачи (9) представлено в ([39], с. 232). Исходя из этого, можем записать решение задачи (1)–(4) в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)Y_n(x), \tag{10}$$

$$T_n(t)=\int\limits_0^l u(x,t)Y_n(x)dx, \tag{11}$$

где

$$T_n(t)=\varphi_n E_\alpha\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]+\psi_n t E_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]+\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n (t-s)^\alpha\right]F_n(s)ds, \tag{12}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{13}$$

здесь $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг–Леффлера. Перейдем к установлению асимптотических свойств функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ при больших по модулю значениях аргумента z.

Лемма 1 ([41], с. 136). *Пусть $0<\alpha<2$, $\beta\in\mathbb{R}$ — вещественная постоянная и μ — фиксированное число из интервала $(\pi\alpha/2,\min\{\pi,\pi\alpha\})$. Тогда справедлива оценка*

$$|E_{\alpha,\beta}(z)|\le\frac{M}{1+|z|},\quad \mu\le|\arg z|\le\pi,$$

где M — постоянная, не зависящая от z.

Значения $\lambda_n = -d_n^4$ являются собственными значениями спектральной задачи (8), где

$$d_n \approx \frac{\pi}{2l}(2n-1).$$

На основании полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2(0,l)$ можно доказать единственность решения задачи (1)–(5). Действительно, пусть существует различные функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — решения данной задачи. Тогда их разность $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ есть решение однородной задачи (1)–(5), где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $F(x,t) \equiv 0$, отсюда $\varphi_n \equiv 0$, $\psi_n \equiv 0$, $F_n(t) \equiv 0$, и из (12) получим $T_n(t) \equiv 0$, что на основании (11) равносильно равенству

$$\int\limits_0^l u(x,t) Y_n(x) dx = 0.$$

В силу полноты системы $Y_n(x)$ в пространстве $L_2(0,l)$ функция $u(x,t) = 0$ почти всюду в $[0,l]$ и при любом $t \in [0,T]$. Поскольку в силу условия (5) u непрерывна на $\overline{\Sigma}$, то $u(x,t) \equiv 0$ на $\overline{\Sigma}$. Тем самым единственность решения задачи (1)–(5) доказана.

Теперь переходим к исследованию решения прямой задачи. Для этого найдем

$${}^C D_t^\alpha \left[T_n(t)\right] = {}^C D_t^\alpha \left(\varphi_n E_\alpha \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right] + \psi_n t E_{\alpha,2} \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right] + \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left[a^2 \lambda_n (t-s)^\alpha\right] F_n(s) ds \right),$$

$1 < \alpha < 2$.

Для удобства введем обозначения

$$I_1 := {}^C D_t^\alpha \left(\varphi_n E_\alpha \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right]\right) = \varphi_n {}^C D_t^\alpha \left(E_\alpha \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right]\right), \tag{14}$$

$$I_2 := {}^C D_t^\alpha \left(\psi_n t E_{\alpha,2} \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right]\right) = \psi_n {}^C D_t^\alpha \left(t E_{\alpha,2} \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right]\right), \tag{15}$$

$$I_3 := {}^C D_t^\alpha \left(\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left[a^2 \lambda_n (t-s)^\alpha\right] F_n(s) ds \right).$$

Начнем с вычисления дробной производной в (14). Для этого согласно (13) находим

$${}^C D_t^\alpha E_\alpha \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right] = {}^C D_t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a^2 \lambda_n t^\alpha\right)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a^2 \lambda_n \tau^\alpha\right)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} =$$

$$= a^2 \lambda_n E_\alpha \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right].$$

Отсюда вытекает

Предложение 1. *Для $1 < \alpha < 2$ и $\lambda > 0$ верно соотношение*

$${}^C D_t^\alpha E_\alpha[\lambda t^\alpha] = \lambda E_\alpha[\lambda t^\alpha], \quad 0 < t \le T.$$

Переходя к (15), имеем

$${}^C D_t^\alpha t E_{\alpha,2} \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right] = {}^C D_t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a^2 \lambda_n\right)^k t^{\alpha k + 1}}{\Gamma(\alpha k + 2)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int\limits_0^t (t-\tau)^{1-\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a^2 \lambda_n\right)^k \tau^{\alpha k + 1}}{\Gamma(\alpha k + 2)} d\tau = a^2 \lambda_n t E_{\alpha,2} \left[a^2 \lambda_n t^\alpha\right].$$

Отсюда вытекает

Предложение 2. *Для* $1<\alpha<2$, $\beta>0$ *и* $\lambda>0$ *верно*

$$^{C}D_t^{\alpha}t^{\beta}E_{\alpha,\alpha}[\lambda t^{\alpha}]=\lambda t^{\beta}E_{\alpha,\alpha}[\lambda t^{\alpha}],\quad 0<t\le T.$$

Предложение 3 ([27])**.** *Для* $1<\alpha<2$ *и* $\lambda>0$, *если* $f(t)\in AC[0,T]$, *справедливо равенство*

$$^{C}D_t^{\alpha}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(t-s)^{\alpha}\right]f(s)ds=f(t)-\lambda\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda(t-s)^{\alpha}\right]f(s)ds.$$

Покажем, что ряд (10) является решением задачи (1)–(5). Для этого сначала убедимся, что сумма ряда (10) является непрерывной функцией в замкнутой области $\overline{\Sigma}$. Оценивая выражение для $T_n(t)$, находим

$$|T_n(t)\,|\le|\varphi_nE_{\alpha}[a^2\lambda_nt^{\alpha}]|+\left|\psi_ntE_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_nt^{\alpha}\right]\right|+\left|\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n(t-s)^{\alpha}\right]F_n(s)ds\right|.$$

Далее согласно лемме 1 получим

$$|T_n(t)|\le\widetilde{C}_1\left(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\right),$$

где $F_n(t_m)=\max\limits_{0\le t\le T}|F_n(t)|$, $\widetilde{C}_1=\widetilde{C}_1(\alpha,T)$, далее $\widetilde{C}_i$ зависит только от α и T.

Теперь найдем оценку для функции $^{c}D_t^{\alpha}T_n(t)$ аналогичным образом:

$$\left|^{C}D_t^{\alpha}T_n(t)\right|\le\left|a^2\lambda_nT_n(t)+F_n(t)\right|\le\widetilde{C}_2\lambda_n\left(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\right).$$

Лемма 2. *При любом* $t\in[0,T]$ *справедливы оценки*

$$|T_n(t)|\le\widetilde{C}_1\big(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\big),\tag{16}$$

$$\left|^{C}D_t^{\alpha}T_n(t)\right|\le\widetilde{C}_2n^4\big(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\big).\tag{17}$$

Формально почленным дифференцированием (10) составим ряды

$$^{C}D_t^{\alpha}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}{}^{C}D_t^{\alpha}T_n(t)Y_n(x),\tag{18}$$

$$u_{xxxx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n^{(4)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}d_n^4T_n(t)Y_n(x).\tag{19}$$

Так как $|Y_n(x)|\le1$, из ряда (10) и леммы 2 получим оценку

$$|u(x,t)|\le\widetilde{C}_1\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\right).$$

Точно также для рядов (18), (19) согласно лемме 2 имеем

$$\left|^{C}D_t^{\alpha}u(x,t)\right|\le\widetilde{C}_3\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\left(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\right),$$

$$|u_{xxxx}(x,t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}d_n^4|T_n(t)|\le\widetilde{C}_2\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\right).$$

Ряды (10), (18) и (19) при любых $(x,t)\in\overline{\Sigma}$ согласно лемме 2 можарируются рядом

$$\widetilde{C}_3\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(|\varphi_n|+|\psi_n|+|F_n(t_m)|\right).$$

Для сходимости последного ряда нам понадобится

Лемма 3. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F(x,t)$ удовлетворяют условиям*

$$\begin{gathered}\varphi(x)\in C^6[0,l],\;\; \varphi(0)=\varphi(l)=\varphi'(0)=\varphi'(l)=\varphi'''(0)=\varphi'''(l)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(l)=\\ =\varphi^{(5)}(0)=\varphi^{(5)}(l)=0,\\ \psi(x)\in C^6[0,l],\;\; \psi(0)=\psi(l)=\psi'(0)=\psi'(l)=\psi'''(0)=\psi'''(l)=\psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(l)=\\ =\psi^{(5)}(0)=\psi^{(5)}(l)=0,\\ F(\cdot,t)\in C^6[0,l],\;\; F(0,t)=F(l,t)=F_x(0,t)=F_x(l,t)=F_{xxx}(0,t)=F_{xxx}(l,t)=\\ =F_{xxxx}(0,t)=F_{xxxx}(l,t)=F_{xxxxx}(0,t)=F_{xxxxx}(l,t)=0\end{gathered}$$

для любых $0\le t\le T$, то справедливы соотношения

$$\varphi_n=\frac{1}{d_n^6}\varphi_n^{(6)},\quad \psi_n=\frac{1}{d_n^6}\psi_n^{(6)},\quad F_n(t)=\frac{1}{d_n^6}F_n^{(6)}(t),$$

где

$$\varphi_n^{(6)}=\int\limits_0^l\varphi^{(6)}(x)Y_n(x)dx,\quad \psi_n^{(6)}=\int\limits_0^l\psi^{(6)}(x)Y_n(x)dx,\quad F_n^{(6)}(t)=\int\limits_0^l\frac{\partial^6F}{\partial x^6}(x,t)Y_n(x)dx.$$

Согласно лемме 3 ряды (10), (18), (19) можарируются сходящимся числовым рядом

$$\widetilde{C}_4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(|\varphi_n^{(6)}|+|\psi_n^{(6)}|+|F_n^{(6)}(t_m)|\right),$$

т. е. сходятся абсолютно и равномерно на $\overline{\Sigma}$. Следовательно, сумма ряда удовлетворяет всем условиям задачи (1)–(4). Таким образом, доказана

Теорема 1. *Пусть функция $F(x,\cdot)\in AC[0,T]$ для любых $x\in[0,l]$. Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $F(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 3, то существует единственное решение задачи (1)–(4), которое определяется в виде суммы ряда (10), где коэффициенты находятся по формулам (12).*

3. Основной результат

Исследуем обратную задачу 1. Пусть $F(x,t)=f(x)g(t)$. Тогда ряд (10) можно переписать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)Y_n(x)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_nE_\alpha\left[a^2\lambda_nt^\alpha\right]+\psi_ntE_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_nt^\alpha\right]+f_n\int\limits_0^t(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n(t-s)^\alpha\right]g(s)ds\right]Y_n(x),\tag{20}$$

где

$$f_n = \int\limits_0^l f(x) Y_n(x) dx.$$

Пользуясь условием (6), получим

$$u(x,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t_0) Y_n(x) = h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n Y_n(x), \tag{21}$$

где

$$T_n(t_0) = \varphi_n E_\alpha \left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] + \psi_n t_0 E_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] + f_n \int\limits_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n (t_0-s)^\alpha\right] g(s) ds.$$

Пусть $g(t) \equiv 1$. Тогда равенство (21) примет вид

$$\left(\int\limits_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n (t_0-s)^\alpha\right] g(s) ds \right) f_n = h_n - \varphi_n E_\alpha \left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] - \psi_n t_0 E_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right]. \tag{22}$$

Отсюда находим неизвестные коэффициенты

$$f_n = \frac{1}{\delta_n(t_0)} \Big(h_n - \varphi_n E_\alpha \left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] - \psi_n t_0 E_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] \Big) \tag{23}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\delta_n(t_0) = \frac{1}{a^2\lambda_n^2} \Big(-E_\alpha \left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] + 1 \Big) \neq 0,$$

где мы использовали $\displaystyle\int_0^t s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(cs^\alpha) ds = \frac{1}{c}(-E_\alpha\left[ct^\alpha\right] + 1)$ для $c \neq 0$ и $0 \leq E_\alpha(a^2\lambda_n t_0^\alpha) < 1$. В силу теоремы единственности решения задачи 1 выражение $\delta_n(t_0)$ не равно нулю при всех $n \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $h(x) \equiv 0$. Тогда $\varphi_n = \psi_n = h_n \equiv 0$. Если при некотором $n = p \in \mathbb{N}$ выражение $\delta_p(t_0) = 0$, то из равенства (22) следует, что f_p–произвольная постоянная, вообще говоря, не равная нулю. Тогда обратная задача 1 с нулевыми граничными условиями при $g(t) = 1$ имеет ненулевое решение

$$u(x,t) = \frac{f_p}{a^2\lambda_p} \Big(E_\alpha \left[a^2\lambda_n t_0^\alpha\right] - 1 \Big), \quad f(x) = f_p X_p(x).$$

Подставив (23) в (20), найдем функцию $u(x,t)$.

Пусть теперь $g(t) \neq 1$, $g(t) \in C[0,T]$, и можно считать, что $g(t) \geq g_0 = \text{const} > 0$. Тогда

$$g_n(t) = g(\xi) \int_0^{t_0} (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[a^2\lambda_n (t-s)^\alpha] ds = g(\xi) \frac{E_\alpha[a^2\lambda_n t_0^\alpha] - 1}{a^2\lambda_n},$$

где $0 < \xi < t_0$.

Теорема 2. *Пусть $h(x) \in C^1[0,l]$, $\varphi(x) \in C^1[0,l]$, $\psi(x) \in C^1[0,l]$, $g(t) = 1$ или $g(t) \in C[0,T]$, $|g(x)| \geq g_0 > 0$, тогда обратная задача (1)–(6) в пространстве непрерывных функций имеет единственное решение.*

Исследуем обратную задачу 2.

Для этого воспользуемся условием (7) и получим

$$u(x_0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)Y_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n E_\alpha\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]+\psi_n t E_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]+f_n g_n(t)\right)Y_n(x_0)=q(t), \tag{24}$$

где

$$g_n(t)=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n(t-s)^\alpha\right]g(s)ds.$$

Разрешая (24) относительно $g_n(t)$ получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f_n (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n(t-s)^\alpha\right]g(s)Y_n(x_0)ds=\widetilde{q}(t), \tag{25}$$

где

$$\widetilde{q}(t)=q(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n E_\alpha\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]+\psi_n t E_{\alpha,2}\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]\right)Y_n(x_0). \tag{26}$$

Сначала покажем, что $\tilde{q}(t)\in C^2[0,T]$. Для этого найдем первую производную по t от (26):

$$\frac{d}{dt}\tilde{q}(t)=q'(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n a^2\lambda_n t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[a^2\lambda_n t^\alpha]+\psi_n E_\alpha[a^2\lambda_n t^\alpha]\right)Y_n(x_0).$$

Пусть $q'(t)\in C[0,T]$, тогда ряд в (26) можарируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4|\varphi_n|+|\psi_n|\right).$$

Этот ряд сходится в силу леммы 3, отсюда получаем $d/dt[\tilde{q}(t)]\in C[0,T]$. Далее рассмотрим функцию $p(t)=t^\gamma\dfrac{d^2}{dt^2}\tilde{q}(t)$. Вычисляя производную от функции $\dfrac{d}{dt}\tilde{q}(t)$, имеем

$$p(t)=t^\gamma q''(t)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n a^2\lambda_n^2 t^{\gamma+\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]+\psi_n a^2\lambda_n t^{\gamma+\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n t^\alpha\right]\right)Y_n(x_0),$$

где $2-\alpha\le\gamma<1$, γ — заданное число. Включение $d^2/dt^2[\tilde{q}(t)]\in C_\gamma[0,T]$ вытекает из следующего легко доказываемого утверждения.

Лемма 4. *Пусть $\varphi(x)\in C^{10}[0,l]$, $\varphi(0)=\varphi(l)=\varphi'(0)=\varphi'(l)=\varphi'''(0)=\varphi'''(l)=\varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(l)=\varphi^{(5)}(0)=\varphi^{(5)}(l)=\varphi^{(7)}(0)=\varphi^{(7)}(l)=\varphi^{(8)}(0)=\varphi^{(8)}(l)=\varphi^{(9)}(0)=\varphi^{(9)}(l)=0$, и функция $\psi(x)$ подчинена условиям леммы 3. Тогда имеет место формула*

$$\varphi_n=\frac{1}{d_n^{10}}\varphi_n^{(10)},$$

где

$$\varphi_n^{(10)}=\int_0^l \varphi^{(10)}(x)Y_n(x)dx.$$

Так как в интегральном уравнении Вольтерра первого рода нахождение неизвестной функции есть некорректно поставленная задача, возьмем дробную производную Капуто от интегрального уравнение (25) и пользуясь утверждением 3, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x_0) \left(g(t) - a^2\lambda_n \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[a^2\lambda_n(t-s)^{\alpha}\right] g(s)ds \right) = {}^C D_t^{\alpha}\widetilde{q}(t). \tag{27}$$

Отсюда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n Y_n(x_0) = f(x_0)$. Если $f(x_0) \neq 0$ и ядро интегрального уравнения — непрерывная функция, то определяя искомую функцию $g(t)$ из (27), затем подставляя $g(t)$ в (24), найдем функцию $u(x,t)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы* 4. *Тогда, если*

$$f(x_0) \neq 0, \quad q(t) \in C_{\gamma}^2[0,T], \quad \varphi(x_0) = q(0), \quad \psi(x_0) = q'(0),$$

то уравнение (27) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $AC[0,T]$.

Доказательство теоремы следует из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Литература

[1] Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics* (Scientific, World, 2000).

[2] Kumar S. *A new analytical modeling for fractional telegraph equation via Laplace trasnform*, Appl. Math. Modelling **38** (13), 3154–3163 (2014).

[3] Sun H., Zhang Y., Baleanu D., Chen W., Chen Ya. *A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **64**, 213–231 (2018).

[4] Stepan G. *Delay effects in the human sensory system during balancing*, Philos. Trans. R. Soc. A, Math. Phys. Eng. Sci. **367** (1891), 1195–1212 (2009).

[5] Butcher E.A., Dabiri A., Nazari M., *Transition curve analysis of linear fractional periodic time-delayed systems via explicit harmonic balance method*, J. Comput. Nonlinear Dynam. **11** (4), 041005 (2016).

[6] Романов В.Г. *Обратные задачи математической физики* (Наука, М., 1984).

[7] Дурдиев Д.К., Тотиева Ж.Д. *Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости*, Сиб. матем. журн. **58** (3), 553–572 (2017).

[8] Durdiev D.K., Totieva Zh.D. *The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations*, Math. Methods Appl. Sci. **41** (17), 8019–8032 (2018).

[9] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Задача определения тепловой памяти проводящей среды*, Дифференц. уравнения **56** (6), 796–807 (2020).

[10] Карчевский А.Л., Фатьянов А.Г. *Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды*, Сиб. журн. вычисл. матем. **4** (3), 259–268 (2001).

[11] Карчевский А.Л. *Определение возможности горного удара в угольном пласте*, Сиб. журн. индустр. матем. **20** (4), 35–43 (2017).

[12] Дурдиев У.Д. *Численное определение зависимости диэлектрической проницаемости слоистой среды от временной частоты*, Сиб. электрон. матем. изв. **17**, 179–189 (2020).

[13] Durdiev U., Totieva Z. *A problem of determining a special spatial part of* 3D *memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Math. Methods Appl. Sci. **42** (18), 7440–7451 (2019), DOI: 10.1002/mma.5863.

[14] Дурдиев У.Д. *Обратная задача для системы уравнений вязкоупругости в однородных анизотропных средах*, Сиб. журн. индустр. матем. **22** (4), 26–32 (2019).

[15] Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т. *Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии*, Дифференц. уравнения **56** (12), 1596–1609 (2020).

[16] Durdiev D.K., Bozorov Z.R., Rahmonov A.A. *A two-dimensional diffusion coefficient determination problem for the time-fractional equation*, Math. Methods Appl. Sci. **44** (13), 10753–10761 (2021).

[17] Кочубей А.Н. *Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка*, Дифференц. уравнения **25** (8), 1359–1368 (1989).
[18] Кочубей А.Н. *Диффузия дробного порядка*, Дифференц. уравнения **26** (4), 660–670 (1990).
[19] Eidelman S.D., Kochubei A.N. *Cauchy problem for fractional diffusion equations*, Diff. Equat. **199** (2), 211–255 (2004).
[20] Дурдиев У.Д. *Задача об определении коэффициента реакции в дробном уравнении диффузии*, Дифференц. уравнения **57** (9), 1220–1229 (2021).
[21] Agrawal O.P. *A general solution a the fourth-order fractional diffusion-wave equation*, Fract. Calculat. Appl. Anal. **3**, 1–12 (2000).
[22] Agrawal O.P. *A general solution for a fourth-order fractional diffusion wave equation defined in bounded domain*, Comput. Struct. **79** (16), 1497–1501 (2001).
[23] Турдиев Х.Х. *Обратные коэффициентные задачи для временно-дробного волнового уравнения с обобщенной производной Римана–Лиувилля по времени*, Изв. вузов. Матем. (10), 46–59 (2023).
[24] Durdiev D.K., Turdiev H.H. *Inverse coefficient problem for fractional wave equation with the generalized Riemann–Liouville time derivative*, Math. Meth. Appl. Sci., https://doi.org/10.1002/mma.9867 (2023).
[25] Durdiev D.K., Turdiev H.H. *Inverse coefficient problem for fractional wave equation with the generalized Riemann–Liouville time derivative*, Indian J. Pure Appl. Math., https://doi.org/10.1007/s13226-023-00517-9 (2023).
[26] Durdiev D.K., Turdiev H.H. *Determining of a Space Dependent Coefficient of Fractional Diffusion Equation with the Generalized Riemann–Liouville Time Derivative*, Lobachevskii J. Math. **45** (2), 80–94 (2024).
[27] Gong X., Wei T. *Reconstruction of a time-dependent source term in a time-fractional diffusion-wave equation*, Inverse Problems Sci. Engineering **27** (11), 1577–1594 (2019).
[28] Дурдиев Д.К., Жумаев Ж.Ж. *Обратная задача определения ядра интегро-дифференциального уравнения дробной диффузии в ограниченной области*, Изв. вузов. Матем. (10), 22–35 (2023).
[29] Durdiev D.K. *On the uniqueness of kernel determination in the integro-differential equation of parabolic type*, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. **19** (4), 658–666 (2015).
[30] Дурдиев Д.К., Болтаев А.А., Рахмонов А.А. *Задача определения ядра типа свертки в уравнении Мура–Гибсона–Томсона третьего порядка*, Изв. вузов. Матем. (12), 3–16 (2023).
[31] Акрамова Д.И. *Обратная коэффиентная задача для дробного-диффузионного уравнения с оператором Бесселя*, Изв. вузов. Матем. (9), 45–57 (2023).
[32] Сабитов К.Б. *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок*, Дифференц. уравнения **53** (1), 89–100 (2017).
[33] Сабитов К.Б. *Начальная задача для уравнения колебаний балки*, Дифференц. уравнения **53** (5), 665–671 (2017).
[34] Сабитов К.Б. *Обратные задачи для уравнения колебаний балки по определению правой части и начальных условий*, Дифференц. уравнения **56** (6), 773–785 (2020).
[35] Сабитов К.Б. *Начально-граничные задачи для уравнения колебаний балки с учетом ее вращательного движения при изгибе*, Дифференц. уравнения **57** (3), 364–374 (2021).
[36] Дурдиев У.Д. *Обратная задача об источнике для уравнения вынужденных колебаний балки*, Изв. вузов. Матем. (8), 10–22 (2023).
[37] Durdiev U.D. *Inverse problem of determining an unknown coefficient in the beam vibration equation*, Diff. Equat. **58** (1), 36–43 (2022).
[38] Дурдиев У.Д. *Обратная задача по определению неизвестных коэффициентов уравнения колебания балки в бесконечной области*, Дифференц. уравнения **59** (4), 456–466 (2023).
[39] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and application of fractional differetial equations* (North-Holland Mathematical Studies, Amsterdam: Elsevier, 2006).
[40] Сабитов К.Б. *Колебания балки с заделанными концами*, Вестн. Самарск. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. **19** (2), 311–324 (2015), DOI : doi.org/10.14498/vsgtu1406.
[41] Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области* (Наука, М., 1966).

Умиджон Дурдимуратович Дурдиев

Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбол, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан;

Бухарское отделение института математики им. В.И.Романовского,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан,

e-mail: umidjan93@mail.ru, u.d.durdiev@buxdu.uz

Аскар Ахмадович Рахмонов

Бухарское отделение института математики им. В.И.Романовского,
ул. Университетская, д. 9, г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан;
Бухарский государственный университет,
ул. М.Икбол, д. 11, г. Бухара, 200100, Республика Узбекистан,

e-mail: araxmonov@mail.ru

U.D. Durdiev and A.A. Rahmonov

Inverse problem for a fourth-order differential equation with the fractional Caputo operator

Abstract. In this paper we consider an initial boundary value problem (direct problem) for a fourth order equation with the fractional Caputo derivative. Two inverse problems of determining the right-hand side of the equation by a given solution of the direct problem at some point are studied. The unknown of the first problem is a one-dimensional function depending on a spatial variable, while in the second problem a function depending on a time variable is found. Using eigenvalues and eigenfunctions, a solution of the direct problem is found in the form of Fourier series. Sufficient conditions are established for the given functions, under which the solution to this problem is classical. Using the results obtained for the direct problem and applying the method of integral equations, we study the inverse problems. Thus the uniqueness and existence theorems of the direct and inverse problems are proved.

Keywords: initial boundary value problem, inverse problem, fractional Caputo derivative, Mittag–Leffler function, eigenfunction, eigenvalue, uniqueness, existence.

Umidjon Durdimuratovich Durdiev

Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan;
Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan,

e-mail: umidjan93@mail.ru, u.d.durdiev@buxdu.uz

Askar Ahmadovich Rahmonov

Bukhara Branch of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy,
9 University str., Tashkent, 100174 Republic of Uzbekistan;
Bukhara State University,
11 M.Ikbol str., Bukhara, 200100 Republic of Uzbekistan,

e-mail: araxmonov@mail.ru