Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 9, с. 16–21 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

С. ДЕМИР

ОСЦИЛЯЦИОННОЕ НЕРАВЕНСТВО В КОМПЛЕКСНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Пусть T — сжимающее отображение на комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и для $f \in \mathcal{H}$ определим

$$A_n(T)f = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T^j f.$$

Пусть (n_k) — возрастающая последовательность, а M — произвольная последовательность. Мы доказываем, что существует положительная константа C такая, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{n_k \le m < n_{k+1} \\ m \in M}} \|A_m(T)f - A_{n_k}(T)f\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{1/2} \le C\|f\|_{\mathcal{H}}$$

для всех $f \in \mathcal{H}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, сжимающее отображение, осциляционное неравенство.

УДК: 517

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-16-21

Введение

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство, а $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — сжимающее отображение. Определим среднее

$$A_n f = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T^j f$$

для любого элемента $f \in \mathcal{H}$.

Из спектральной теоремы для сжимающего отображения следует, что существует мера μ на $[-\pi, \pi)$ такая, что $\mu[-\pi, \pi) = \|f\|_{\mathcal{H}}^2$,

$$\|A_m(f) - A_n(f)\|_{\mathcal{H}} \le \|a_m(\theta) - a_n(\theta)\|_{2,\mu},$$

где

$$a_n(\theta) = \frac{e^{in\theta} - 1}{n(e^{i\theta} - 1)},$$

и равенство достигается, когда T — изометрия.

Следующий результат был получен М. Лифшицем и М. Вебером [1].

Поступила в редакцию 10.11.2023, после доработки 10.11.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Теорема 1. *Пусть (n_k) — возрастающая последовательность положительных целых чисел. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_{n_{k+1}}(T)f - A_{n_k}(T)f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 6\pi \|f\|_{\mathcal{H}}^2$$

для всех $f \in \mathcal{H}$.

Автором были получены следующие обратные версии этого результата [2].

Теорема 2. *Пусть $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — унитарный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $A_n f = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} U^j f$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Предположим, что (n_k) — лакунарная последовательность без нетривиального общего делителя. Тогда существует положительная константа C такая, что*

$$\|f\|_{\mathcal{H}} \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|A_{n_{k+1}} f - A_{n_k} f\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2}$$

для всех $f \in \mathcal{H}$ с $\displaystyle\int f = 0$.

Теорема 3. *Пусть T — сжимающий оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и пусть $A_n(T)f = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T^j f$ для всех $f \in \mathcal{H}$. Предположим, что (n_k) — лакунарная последовательность без нетривиального общего делителя. Тогда существует гильбертово пространство K, содержащее $\mathcal{H}$ как замкнутое подпространство, и ортогональная проекция $P : K \to \mathcal{H}$ такие, что*

$$\|P\|_{\mathcal{H}} \|f\|_{\mathcal{H}} \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|A_{n_{k+1}}(T) f - A_{n_k}(T) f\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2}$$

для всех $f \in \mathcal{H}$ с $\displaystyle\int f = 0$, где C — положительная константа.

Наш первый результат — следующая осцилляционная версия теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть T — сжимающий оператор на комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и для $f \in \mathcal{H}$ определим*

$$A_n(T)f = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} T^j f.$$

Пусть (n_k) — возрастающая последовательность положительных целых чисел, а M — любая последовательность. Тогда существует положительная константа C такая, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} \|A_m(T)f - A_{n_k}(T)f\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{\mathcal{H}}$$

для всех $f \in \mathcal{H}$.

Доказательство. Согласно спектральной теореме для сжимающего оператора на комплексном гильбертовом пространстве ([3], с. 94) существует вероятностная мера μ на $[-\pi,\pi]$ такая, что

$$\langle T^n f, T^m f\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\mu(\theta)$$

для всех $n,m\in\mathbb{Z}$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathcal{H}$. Следовательно, если определим

$$a_n(\theta) = \frac{1}{n}\left(1+e^{i\theta}+e^{i2\theta}+\cdots+e^{i(n-1)\theta}\right) = \frac{e^{in\theta}-1}{n(e^{i\theta}-1)},$$

то при $n,m\geq 1$ получим

$$\|A_m(f)-A_n(f)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|a_m(\theta)-a_n(\theta)\|_{2,\mu} = \int_{-\pi}^{\pi} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2\, d\mu(\theta).$$

Поскольку

$$|a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2 \leq \sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2,$$

имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2\, d\mu(\theta) \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2\, d\mu(\theta).$$

Отсюда

$$\sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} \int_{-\pi}^{\pi} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2\, d\mu(\theta) \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2\, d\mu(\theta),$$

и, таким образом, получаем

$$\sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} \|A_m(f)-A_n(f)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} |a_m(\theta)-a_n(\theta)|^2\, d\mu(\theta).$$

Теперь для доказательства теоремы нам необходимо оценить осцилляцию

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{\substack{n_k\leq m<n_{k+1}\\ m\in M}} |a_m(\theta)-a_{n_k}(\theta)|^2$$

для любого $N\in\mathbb{N}$.

Обозначим через Σ_1 сумму по всем $k=1,2,\ldots,N$ таким, что

$$|m\theta-n_k\theta|\geq 1,\quad n_k\leq m<n_{k+1},$$

и через Σ_2 — сумму по всем $k=1,2,\ldots,N$ таким, что

$$|m\theta-n_k\theta|<1,\quad n_k\leq m<n_{k+1}.$$

Рассмотрим сначала первую сумму, т. е. сумму по всем $|m\theta-n_k\theta|\geq 1$, $n_k\leq m<n_{k+1}$.

Без ограничения общности можно предположить, что $\theta\in(0,\pi]$. Легко проверить, что

$$|a_m(\theta)-a_{n_k}(\theta)|^2 = \left|\frac{1}{m}\left(\frac{e^{im\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)-\frac{1}{n_k}\left(\frac{e^{in_k\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\left|\frac{1}{m}\left(\frac{e^{im\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)\right|^2 + 2\left|\frac{1}{N-k}\left(\frac{e^{in_k\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right)\right|^2 \leq C_1\frac{1}{m^2\theta^2}+C_1\frac{1}{n_k^2\theta^2}$$

для некоторой положительной константы C_1, так как $|e^{i\theta}-1| \geq \dfrac{\theta}{K}$ для всех $\theta \leq \pi$ и некоторой положительной константы K.

В данном случае очевидно, что $n_k\theta > 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}^+$, имеем

$$\sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} |a_m(\theta) - a_{n_k}(\theta)|^2 \leq C_1 \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} \frac{1}{m^2\theta^2} + C_1 \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} \frac{1}{n_k^2\theta^2} \leq$$
$$\leq C_1 \frac{1}{n_k^2\theta^2} + C_1 \frac{1}{n_k^2\theta^2} = 2C_1 \frac{1}{n_k^2\theta^2}.$$

Следовательно,

$$\Sigma_1 \leq 2C_1 \sum_{|m\theta - n_k\theta| \geq 1} \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} \frac{1}{n_k^2\theta^2} \leq 2C_1 \sum_{|m\theta - n_k\theta| \geq 1} \frac{1}{n_k^2\theta^2} < \infty.$$

Рассмотрим теперь вторую сумму, т. е. сумму по всем $|m\theta - n_k\theta| < 1$, $n_k \leq m < n_{k+1}$.

Теперь определим

$$\phi(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}.$$

Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} |a_m(\theta) - a_{n_k}(\theta)|^2 \leq 16 \sum_{k=1}^{N} \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} |\phi(m\theta) - \phi(n_k\theta)|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|\phi(m\theta) - \phi(n_k\theta)|^2 = \left| \int_{n_k\theta}^{m\theta} \phi'(x)\,dx \right|^2 \leq |m\theta - n_k\theta| \int_{n_k\theta}^{m\theta} |\phi'(x)|^2\,dx \leq \int_{n_k\theta}^{m\theta} |\phi'(x)|^2\,dx.$$

Тогда имеем

$$\Sigma_2 \leq \sum_{k=1}^{N} \sup_{\substack{n_k \leq m < n_{k+1} \\ m \in M}} \int_{n_k\theta}^{m\theta} |\phi'(x)|^2\,dx \leq \sum_{k=1}^{N} \int_{n_k\theta}^{n_{k+1}\theta} |\phi'(x)|^2\,dx.$$

С другой стороны,

$$\phi'(x) = \frac{ixe^{ix} - (e^{ix}-1)}{x^2} \quad \text{для } x > 0.$$

Поскольку ϕ аналитична и $|\phi'(x)| \leq 1/x + 2/x^2$ для всех $x > 0$, то очевидно, что

$$\int_0^\infty |\phi'(x)|\,dx < \infty.$$

Следовательно,

$$\Sigma_2 \leq \int_0^\infty |\phi'(x)|\,dx \leq C_2.$$

$\square$

Нашим вторым результатом является

Следствие. Пусть $(X, \mathscr{B}, \mu, \tau)$ — эргодическая, сохраняющая меру динамическая система. Определим эргодические средние

$$\mathcal{A}_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f \circ \tau^j(x).$$

Пусть (n_k) — возрастающая последовательность положительных целых чисел, а M — любая последовательность. Тогда существует положительная константа C такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{n_k \le m < n_{k+1} \\ m \in M}} \|\mathcal{A}_m f - \mathcal{A}_{n_k} f\|_2^2 \le C\|f\|_2$$

для всех $f \in L^2(X)$.

Доказательство. Очевидно, что $Tf(x) = f \circ \tau(x)$ является унитарным оператором, следовательно, сжимающим. Поскольку $L^2(X)$ является гильбертовым пространством, результат следует из теоремы 4. □

Замечание. Обратите внимание, что теорема 4 и следствие были доказаны в работе М. Лифшица, М. Вебера ([1], теорема 10, следствие 11) с дополнительным предположением

$$\sup \frac{n_{k+1}}{n_k} < \infty.$$

Литература

[1] Lifshits M., Weber M. *Spectral regularization inequalities*, Math. Scandinavica **86** (1), 75–99 (2000).
[2] Demir S. *Inequalities for square functions induced by operators on a Hilbert space*, Int. J. Stat. Appl. Math. **3** (5), 140–143 (2018).
[3] Krengel U. *Ergodic theorems* (Walter de Gruyter, Berlin & New York, 1985).

Сакин Демир

Университет Агры Ибрагима Чечена,
г. Агры, 04100, Турция,

e-mail: sakin.demir@gmail.com

S. Demir

An oscillation inequality on a complex Hilbert space

Abstract. Let T be a contraction on a complex Hilbert space $\mathcal{H}$, and for $f \in \mathcal{H}$ define

$$A_n(T)f = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} T^j f.$$

Let (n_k) be an increasing sequence and M be any sequence. We prove that there exists a positive constant C such that

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\substack{n_k \le m < n_{k+1} \\ m \in M}} \|A_m(T)f - A_{n_k}(T)f\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{1/2} \le C\|f\|_{\mathcal{H}}$$

for all $f \in \mathcal{H}$.

Keywords: Hilbert space, contraction, oscillation inequality.

Sakin Demir

Agri Ibrahim Cecen University,
Ağrı, 04100 Turkey,

`e-mail:` sakin.demir@gmail.com