

С.С. ВОЛОСИВЕЦ

ТЕОРЕМЫ ТИПА БОАСА И УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ

Аннотация. Получены достаточные условия весовой интегрируемости обобщенного преобразования Фурье–Бесселя функций из обобщенных интегральных классов Липшица. Эти условия являются аналогами известных условий Морица для классического преобразования Фурье. Также доказан результат типа Боаса, связывающий поведение функции и гладкость ее обобщенного преобразования Фурье–Бесселя.

Ключевые слова: обобщенное преобразование Фурье–Бесселя, обобщенный сдвиг Фурье–Бесселя, весовая интегрируемость, обобщенное сжатие.

УДК: 517.518.362

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-9-3-15

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ — интегрируемая в смысле Лебега функция на $\mathbb{R}$ ($f \in L^1(\mathbb{R})$). Тогда преобразование Фурье f задается равенством

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В случае $1 < p \leq 2$ преобразование Фурье функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ определяется как предел $(2\pi)^{-1/2} \int_a^b f(x) e^{-itx} dx$ по норме $L^q(\mathbb{R})$, где $1/p + 1/q = 1$, $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$.

В частности, $\widehat{f} \in L^q(\mathbb{R})$ и справедливо следующее неравенство типа Хаусдорфа–Юнга:

$$\|\widehat{f}\|_q \leq C \|f\|_p := C \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}), \quad 1 < p \leq 2. \quad (1)$$

При $p = 2$ неравенство (1) заменяется на равенство Планшереля. Подробнее об этих результатах можно узнать в ([1], гл. III, IV, или [2], гл. 5).

Для $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, рассмотрим модуль гладкости порядка $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$$\omega_k(t, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|\Delta_h^k f\|_p, \quad \Delta_h^k f(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} f(x + (k - 2j)h/2).$$

Обозначим через Φ множество непрерывных и возрастающих на $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ функций ω таких, что $\omega(0) = 0$. Если $\omega \in \Phi$ и $\int_0^\delta t^{-1} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$, $\delta \geq 0$, то ω принадлежит

классу Бари B ; если же $\omega \in \Phi$ и $\delta^m \int_{\delta}^{\infty} t^{-m-1} \omega(t) dt = O(\omega(\delta))$ для некоторого $m > 0$ и всех $\delta > 0$, то ω принадлежит классу Бари–Стечкина B_m ([3]). Будем говорить, что $\omega \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2 -условию ($\omega \in \Delta_2$), если $\omega(2x) \leq C\omega(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

По определению $H^{\omega, m} = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \omega_m(f, t) \leq C\omega(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ и $h^{\omega, m} = \{f \in C_0(\mathbb{R}) : \omega_m(f, t) = o(\omega(t)), t \rightarrow 0\}$ для $\omega \in \Phi$. Ф. Мориц [4] установил следующий результат.

Предложение 1. (i) Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Если для некоторого $\alpha \in (0, m]$, $m = 1, 2$, верно соотношение

$$\int_{|x| < y} |x^m f(x)| dx = O(y^{m-\alpha}), \quad y > 0, \quad (2)$$

то $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $\widehat{f} \in H^{\omega_{\alpha}, m}$, где $\omega_{\alpha}(t) = t^{\alpha}$.

(ii) Обратно, предположим, что $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x^m f(x) \geq 0$ н.в. на $\mathbb{R}$, $m = 1, 2$. Если $\widehat{f} \in H^{\omega_{\alpha}, m}$ для некоторого $\alpha \in (0, m]$, то справедливо соотношение (2).

Хорошо известен следующий результат Е. Титчмарша ([1], гл. 4, теорема 84).

Предложение 2. Пусть $1 < p \leq 2$, $0 < \alpha \leq 1$, $f \in \text{Lip}(\alpha, p)$. Тогда $\widehat{f}(t) \in L^{\beta}(\mathbb{R})$ при всех β , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{p}{p + \alpha p - 1} < \beta \leq q = \frac{p}{p - 1}.$$

Будем писать, что неотрицательная измеримая функция $\lambda(t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ принадлежит классу A_{γ} , $\gamma \geq 1$, если существует $C(\gamma) \geq 1$ такая, что

$$\left(\int_{2^i}^{2^{i+1}} \lambda^{\gamma}(t) dt \right)^{1/\gamma} \leq C(\gamma) 2^{i(1-\gamma)/\gamma} \int_{2^{i-1}}^{2^i} \lambda(t) dt, \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

С помощью неравенства Гёльдера легко видеть, что $A_{\gamma_1} \subset A_{\gamma_2}$ при $1 \leq \gamma_2 < \gamma_1$. В работе автора и С.А. Краюхина [5] доказано, что это вложение является строгим. Ясно, что измеримая функция $\lambda(t) \geq 0$ со свойством

$$\sup\{\lambda(t) : 2^i \leq t < 2^{i+1}\} \leq c \inf\{\lambda(t) : 2^{i-1} \leq t < 2^i\}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

содержится во всех классах A_{γ} , $\gamma \geq 1$. Далее полагаем, что $\lambda(t) = \lambda(-t)$ при $t > 0$.

Аналог условия (3) для последовательностей был введен Л.Д. Гоголадзе и Р. Месхиа [6]. Само условие (3) было предложено Ф. Морицем [7], который доказал следующий результат.

Предложение 3. Пусть $1 < p \leq 2$ и $f \in L^p(\mathbb{R})$. Если $1/p + 1/q = 1$, $0 < r < q$, $\lambda \in A_{p/(p-rp+r)}$, то

$$\int_{|t| \geq 2} \lambda(t) |\widehat{f}(t)|^r dt \leq \int_1^{\infty} \lambda(t) t^{-r/q} \omega^r(f, \pi/t)_p dt.$$

Более общий результат и доказательство его неумлучшаемости можно найти в [5].

Отметим также следующее утверждение Р.П. Боаса [8].

Предложение 4. Если f и g — четные непрерывные 2π -периодические функции с косинус-коэффициентами Фурье c_n и d_n соответственно, $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$ при всех

$$\begin{aligned}
& x, y \in \mathbb{R}, |d_n| \leq \gamma_n, n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty \text{ и} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 \gamma_k^2 \right)^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \left(\sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \right)^{1/2} < \infty, \\
& \text{то } \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty.
\end{aligned} \tag{4}$$

Целью настоящей работы является получение аналогов и обобщений предложений 1, 3, 4 для обобщенных преобразований Фурье–Бесселя. Отметим, что аналог предложения 2 для преобразования Фурье–Бесселя (иногда называемый преобразованием Ганкеля) доказан С.С. Платоновым [9]. Условие типа Титчмарша для интегрируемости преобразований Фурье–Якоби и его обобщение на случай пространств типа Соболева–Никольского представлено в [10]. Аналоги предложения 3 для преобразований Фурье–Данкля и Фурье–Якоби представлены в работах [11] и [12]. Отметим также, что аналоги теорем эквивалентности Р.П. Боаса и Е. Титчмарша для обобщенных преобразований Фурье–Бесселя получены недавно автором [13].

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$B_{n,\nu}(f)(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{2\nu + 1}{x} \frac{df(x)}{dx} - \frac{4n(n + \nu)}{x^2} f(x),$$

где $\nu > -1/2$ и $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$. Для $n = 0$ мы получаем классический оператор Бесселя $B_\nu(f)(x)$.

Обозначим через M_n отображение $M_n(f)(x) = x^{2n} f(x)$ и через $L_\nu^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\nu > -1/2$, — пространство всех измеримых действительныхзначных функций на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ таких, что

$$\|f\|_{p,\nu} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\nu+1} dx \right)^{1/p} < \infty$$

при $1 \leq p < \infty$ и $\|f\|_{\infty,\nu} = \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f(x)| < \infty$ при $p = \infty$. Будем рассматривать также пространство $L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, которое состоит из всех измеримых функций f на $\mathbb{R}_+$ таких, что

$$\|f\|_{p,n,\nu} = \|M_n^{-1}(f)\|_{p,\nu+2n} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\nu+1+2n(2-p)} dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Далее будем использовать меру $d\mu_\nu(x) = (2^\nu \Gamma(\nu + 1))^{-2} x^{2\nu+1} dx$.

Пусть $j_\nu(x)$ является нормализованной функцией Бесселя первого рода и порядка $\nu > -1/2$, заданной равенством

$$j_\nu(x) = \Gamma(\nu + 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \nu + 1)} (x/2)^{2n}.$$

Эта функция удовлетворяет уравнению $B_\nu g = -g$ с начальными условиями $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, также она является четной и бесконечно дифференцируемой. Для функции $\varphi_{n,\nu,y}(x) = \varphi_y(x) = x^{2n} j_{\nu+2n}(yx)$ справедливо равенство $B_{n,\nu}(\varphi_{n,\nu,y}) = -y^2 \varphi_{n,\nu,y}$. Поскольку $|j_\nu(x)| \leq 1$ для всех $\nu > -1/2$ и $x \in \mathbb{R}_+$ (см. утверждение 1) леммы 2), находим,

что $|\varphi_y(x)| \leq x^{2n}$ для $x \geq 0$. Обобщенное преобразование Фурье–Бесселя $\mathcal{F}_{n,\nu}(f)$ для $f \in L_{n,\nu}^1(\mathbb{R}_+)$ определено равенством

$$\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y) = \int_0^\infty f(x) \varphi_y(x) x^{2\nu+1} dx, \quad y \geq 0.$$

Как отмечено в ([14], замечание 2.2 (ii)), функция $\mathcal{F}_{n,\nu}(f)$ принадлежит $C_0(\mathbb{R}_+)$ (т.е. она непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и стремится к нулю в бесконечности) и

$$\|\mathcal{F}_{n,\nu}(f)\|_{\infty, \nu+2n} \leq \|f\|_{1, \nu, n}. \quad (5)$$

Также в ([14], теорема 3.2) доказано, что для $f \in L_{n,\nu}^1(\mathbb{R}_+) \cap L_{n,\nu}^2(\mathbb{R}_+)$ верно равенство

$$\|\mathcal{F}_{n,\nu}(f)\|_{2, \nu+2n} = \|f\|_{2, \nu} = \|M_n^{-1}(f)\|_{2, \nu+2n} = \|f\|_{2, \nu, n} \quad (6)$$

и для $f \in L_{n,\nu}^2(\mathbb{R}_+)$ также справедливо (6).

Из интерполяционной теоремы Рисса–Торина ([15], гл. 1, теорема 1.1.1), (5) и (6) выводится неравенство типа Хаусдорфа–Юнга для $f \in L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$

$$\|\mathcal{F}_{n,\nu}(f)\|_{q, \nu+2n} \leq C(p) \|f\|_{p, n, \nu}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad 1/p + 1/q = 1. \quad (7)$$

Оператор сдвига, связанный с преобразованием Фурье–Бесселя определяется так:

$$T_y^\nu(f)(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\right) (\sin\theta)^{2\nu} d\theta,$$

где $x, y \geq 0$. Известно, что для $f \in L_\nu^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, сдвиг $T_y^\nu(f)$ также принадлежит $L_\nu^p(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|T_y^\nu f\|_{p, \nu} \leq \|f\|_{p, \nu}, \quad f \in L_\nu^p(\mathbb{R}_+)$$

(см. [16], гл. 4, предложение 4.II.2). Будем рассматривать обобщенный оператор сдвига

$$T_y^{n,\nu}(f)(x) = (yx)^{2n} T_y^{\nu+2n}(M_n^{-1}f)(x).$$

Если $f \in L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, то $T_y^{n,\nu}(f)$ также принадлежит $L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$ и

$$\|T_y^{n,\nu}(f)\|_{p, n, \nu} \leq y^{2n} \|f\|_{p, n, \nu} \quad (8)$$

(см. [14], предложение 3.2 (i)). Так же в ([14], предложение 3.2 (ii)) доказано, что для $f \in L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$, $p = 1, 2$, равенство

$$\mathcal{F}_{n,\nu}(T_y^{n,\nu}(f))(x) = \varphi_x(y) \mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x) \quad (9)$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}_+$ в случае $p = 1$ и п.в. на $\mathbb{R}_+$, если $p = 2$. Используя метод доказательства (8) в [14], находим, что это равенство справедливо для $1 < p < 2$ и п.в. $x \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$, I — тождественный оператор. По определению

$$\Delta_{h,n,\nu}^m f = (h^{2n} I - T_h^{n,\nu})^m f,$$

а m -й модуль гладкости вводится равенством

$$\omega_m(f, \delta)_{p, n, \nu} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} h^{-2mn} \|\Delta_{h,n,\nu}^m f\|_{p, n, \nu}, \quad \delta \geq 0.$$

Если $m \in \mathbb{N}$, $\omega(t)$ — неубывающая непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$ такая, что $\omega(0) = 0$ и $\nu > -1/2$, $n \in \mathbb{N}$, то $H_{p,n,\nu}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$ состоит из всех измеримых функций $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $\omega_m(f, \delta)_{p, n, \nu} = O(\omega(\delta))$, $\delta \geq 0$. Через $h_{p,n,\nu}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$ обозначим множество $f \in H_{p,n,\nu}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$ таких, что $\omega_m(f, \delta)_{p, n, \nu} = o(\omega(\delta))$ при $\delta \rightarrow 0+$. Будем писать $\Delta_{h,\nu}^m f$, $\omega_m(f, \delta)_{p, \nu}$ и $H_{\infty,\nu}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$ вместо $\Delta_{h,0,\nu}^m f$, $\omega_m(f, \delta)_{p, 0, \nu}$ и $H_{\infty,0,\nu}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\gamma \geq 1$, $\nu > -1/2$. Скажем, что измеримая п.в. положительная на $\mathbb{R}_+$ функция λ принадлежит классу $A_{\gamma,\nu}$, если для $S_i = [2^i, 2^{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}$, верно

$$\left(\int_{S_i} \lambda^\gamma(t) d\mu_\nu(t) \right)^{1/\gamma} \leq C(\gamma) 2^{i(1-\gamma)(2\nu+2)/\gamma} \int_{S_{i-1}} \lambda(t) d\mu_\nu(t).$$

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Утверждение леммы 1 можно найти в ([17], (2.15)).

Лемма 1. Пусть $x, y, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда $T_y^\nu j_\nu(\lambda \cdot)(x) = j_\nu(\lambda y) j_\nu(\lambda x)$. Как следствие, при $m \in \mathbb{N}$

$$\Delta_{y,\nu}^m j_\nu(\lambda \cdot)(x) = (I - T_y^\nu)^m j_\nu(\lambda \cdot)(x) = (1 - j_\nu(\lambda y))^m j_\nu(\lambda x).$$

Лемма 2 содержит ряд необходимых свойств функции Бесселя j_ν .

Лемма 2. Пусть $\nu > -1/2$. Тогда

- 1) $|j_\nu(x)| \leq 1$ при $x \geq 0$ и $j_\nu(x) < 1$ при $x > 0$;
- 2) $1 - j_\nu(x) \geq C > 0$ при $x \geq 1$;
- 3) для некоторых $C_2 > C_1 > 0$ и всех $x \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$C_1 x^2 \leq 1 - j_\nu(x) \leq C_2 x^2.$$

Доказательство. Утверждение 1) можно найти в [17], тогда как 2) доказано в ([18], лемма 3.3). Правое неравенство в 3) хорошо известно (см., например, [19]), а левое неравенство доказано, например, в [20] при $0 \leq x \leq \eta$, где $\eta > 0$. В силу 1) и непрерывности $j_\nu(x)$ имеем также ограниченность снизу частного $(1 - j_\nu(x))/x^2$ некоторой положительной константой на $[\eta, 1]$, откуда следует 3). $\square$

Леммы 3 и 4 доказаны в [20]. Если χ_E — индикатор множества E и $f\chi_{[0,a]} \in L_\nu^p(\mathbb{R}_+)$ при всех $a > 0$, то будем писать $f \in L_{\nu,\text{loc}}^p(\mathbb{R}_+)$.

Лемма 3. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\nu > -1/2$.

- 1) Если $\omega \in B_m$, $g(t)$ — неотрицательная измеримая функция и

$$\int_y^\infty g(t) d\mu_\nu(t) = O(\omega(1/y)), \quad y > 0, \quad (10)$$

то $t^m g(t) \in L_{\nu,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ и

$$\int_0^y t^m g(t) d\mu_\nu(t) = O(y^m \omega(1/y)), \quad y > 0. \quad (11)$$

- 2) Если $\omega \in B \cap \Delta_2$, $g(t)$ — неотрицательная измеримая функция и $t^m g(t) \in L_{\nu,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, то (11) влечет (10).

Лемма 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\nu > -1/2$.

- 1) Если $\omega \in B_m$, $g(t)$ — неотрицательная измеримая функция и на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая (10), и

$$\int_y^\infty g(t) d\mu_\nu(t) = o(\omega(1/y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad (12)$$

то $t^m g(t) \in L_{\nu,\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ и

$$\int_0^y t^m g(t) d\mu_\nu(t) = o(y^m \omega(1/y)), \quad y \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

2) Если $\omega \in B \cap \Delta_2$, $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — измеримая функция такая, что $t^m g(t) \in L_{\nu, \text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, и имеет место (13), то справедливо (12).

Равенство леммы 5 вытекает из (8) и определений $\varphi_y(x)$ и $\Delta_{h,n,\nu}^m f$.

Лемма 5. Пусть $\nu > -1/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда

$$\mathcal{F}_{n,\nu}(\Delta_{h,n,\nu}^m f)(x) = h^{2mn}(1 - j_{\nu+2n}(xh))^m \mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x)$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+$ в случае $p = 1$ и для почти всех $x \in \mathbb{R}_+$ в случае $1 < p \leq 2$.

3. ДВОЙСТВЕННЫЕ ТЕОРЕМЫ ТИПА БОАСА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\nu > -1/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_\nu^1(\mathbb{R}_+)$, $\omega \in B \cap \Delta_2$.

1) Если f удовлетворяет условию

$$\int_0^y x^{2m} |M_n^{-1} f(x)| d\mu_{\nu+2n}(x) = O(y^{2m}\omega(1/y)), \quad y > 0, \quad (14)$$

то $\mathcal{F}_{n,\nu}(f) \in H_{\infty,\nu+2n}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$.

2) Если $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$ и $\mathcal{F}_\nu(f) \in H_{\infty,\nu+2n}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$, то имеет место (14).

Доказательство. 1) По определению и лемме 1 для $y \in \mathbb{R}_+$ и $h > 0$ имеем

$$\Delta_{h,\nu+2n}^m \varphi_y(x) = x^{2n} \Delta_{h,\nu+2n}^m j_{\nu+2n}(x \cdot)(y) = x^{2n} (1 - j_{\nu+2n}(hx))^m j_{\nu+2n}(xy),$$

$$\begin{aligned} |\Delta_{h,\nu+2n}^m \mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y)| &= \left| \int_0^\infty f(x) \Delta_{h,\nu+2n}^m \varphi_y(x) x^{2\nu+1} dx \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty f(x) x^{2n} (1 - j_{\nu+2n}(hx))^m j_{\nu+2n}(xy) x^{2\nu+1} dx \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty M_n^{-1} f(x) (1 - j_{\nu+2n}(hx))^m j_{\nu+2n}(xy) x^{2(\nu+2n)+1} dx \right| = \\ &=: C_1 \left| \int_0^\infty \Phi_{m,h,n,\nu}(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right| \leq \\ &\leq C_1 \left(\int_0^{1/h} + \int_{1/h}^\infty \right) |\Phi_{m,h,y,\nu}(x)| d\mu_{\nu+2n}(x) = I_1(y) + I_2(y). \end{aligned}$$

В силу леммы 2 и условия (14) получаем

$$\begin{aligned} I_1(y) &\leq C_2 \int_0^{1/h} (xh)^{2m} |M_n^{-1} f(x)| |j_{\nu+2n}(xy)| d\mu_{\nu+2n}(x) = \\ &= C_2 h^{2m} \int_0^{1/h} x^{2m} |M_n^{-1} f(x)| d\mu_{\nu+2n}(x) \leq C_3 h^{2m} (1/h)^{2m} \omega(h) = C_3 \omega(h). \end{aligned} \quad (15)$$

С другой стороны, в силу (14) и леммы 3 находим

$$I_2(y) \leq C_4 \int_{1/h}^\infty |M_n^{-1} f(x)| d\mu_\nu(x) \leq C_5 \omega(h). \quad (16)$$

Из (15) и (16) выводим

$$|\Delta_{h,\nu+2n}^m \mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y)| \leq C_6 \omega(h) \text{ и } \omega_m(\mathcal{F}_{n,\nu}(f), \delta)_{\infty,\nu+2n} \leq C_6 \omega(\delta), \quad \delta \geq 0,$$

т. е. $\mathcal{F}_{n,\nu}(f) \in H_{\infty,\nu+2n}^{m,\omega}(\mathbb{R}_+)$.

2) Предположим, что $f \in L^1_{n,\nu}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{F}_\nu(f) \in H^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$. Тогда для $y > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty (1 - j_{\nu+2n}(hx))^m j_{\nu+2n}(xy) M_n^{-1} f(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right| = \\ & = |\Delta_{h,\nu}^m \mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y)| \leq C_7 \omega(h), \quad h > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Подинтегральное выражение в левой части (17) мажорируется функцией $2^m |M_n^{-1} f(x)|$ из $L^1_{\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$. Устремляя y к $0+$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$0 \leq \int_0^\infty (1 - j_{\nu+2n}(hx))^m M_n^{-1} f(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \leq C_7 \omega(h), \quad h \geq 0.$$

В силу утверждения 3) леммы 2 и условия $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$ находим

$$\int_0^{1/h} (xh)^{2m} M_n^{-1} f(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \leq C_8 \omega(h).$$

С помощью замены $1/h = y$ получаем (14). $\square$

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > -1/2$, $f \in L^1_{n,\nu}(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap B_{2m}$.

1) Если f удовлетворяет условию

$$\int_y^\infty |M_n^{-1} f(x)| d\mu_{\nu+2n}(x) = O(\omega(1/y)), \quad y > 0, \quad (18)$$

то $\mathcal{F}_\nu(f) \in H^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$.

2) Если $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}_\nu(f) \in H^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$, то справедливо соотношение (18).

Доказательство. В силу утверждения 1) леммы 3 и условия $\omega \in B_{2m}$ из (18) выводим (14). По теореме 1 получаем утверждение 1). Если условия 2) выполнены, то по теореме 1 справедливо (14). В силу леммы 3 и условия $\omega \in B \cap B_{2m} \subset B \cap \Delta_2$ следует выполнение (18). $\square$

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > -1/2$, $f \in L^1_{n,\nu}(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap B_{2m}$ и $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$. Тогда условия (14), (18) и $\mathcal{F}_\nu(f) \in H^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$ равносильны.

Теорема 2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > -1/2$, $f \in L^1_{n,\nu}(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap \Delta_2$.

1) Если выполнены условия (14) и

$$\int_0^y x^{2m} |M_n^{-1} f(x)| d\mu_{\nu+2n}(x) = o(y^{2m} \omega(1/y)), \quad y \rightarrow +\infty, \quad (19)$$

то $\mathcal{F}_{n,\nu}(f) \in h^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$.

2) Если $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{F}_{n,\nu}(f) \in h^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$, то имеет место (19).

Доказательство. Используя лемму 4 вместо леммы 3 и следуя рассуждениям из доказательства теоремы 1, устанавливаем теорему 2. $\square$

Аналогично следствию 2 получаем

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $\nu > -1/2$, $f \in L^1_{n,\nu}(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in B \cap B_{2m}$ и $f(x) \geq 0$ на $\mathbb{R}_+$. Тогда условия

1) (14) и (19),

2) $\mathcal{F}_{n,\nu}(f) \in h^{m,\omega}_{\infty,\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$,

3) (18) и

$$\int_y^\infty |M_n^{-1} f(x)| d\mu_\nu(x) = o(\omega(1/y)), \quad y \rightarrow +\infty,$$

равносильны.

4. ВЕСОВАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ–БЕССЕЛЯ

Теорема 3. Пусть $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Если

$$\lambda \in A_{p/(p-pr+r), \nu+2n} = A_{q/(q-r), \nu+2n}$$

для некоторого $r \in (0, q)$, $\lambda \in L_{\nu+2n}^{q/(q-r)}[0, 1]$ и сходится интеграл

$$\int_1^\infty \lambda(t) t^{-r(2\nu+4n+2)/q} \omega_m^r(f, t^{-1})_{p,n,\nu} d\mu_\nu(t),$$

то $\lambda(t) |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^r \in L_{\nu+2n}^1(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Пусть $M_i = [2^i, 2^{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}_+$ и $h = 2^{-i}$. В силу утверждения 2) леммы 2, леммы 5 и неравенства типа Хаусдорфа–Юнга (7) имеем

$$\begin{aligned} C_1 \int_{M_i} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y)|^q d\mu_{\nu+2n}(y) &\leq \int_{M_i} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y)|^q (1 - j_{\nu+2n}(2^{-i}y))^{mq} d\mu_{\nu+2n}(y) \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(y)|^q (1 - j_{\nu+2n}(2^{-i}y))^{mq} d\mu_{\nu+2n}(y) \leq \\ &\leq C_2 \|\mathcal{F}_{n,\nu}(\Delta_{h,n,\nu}^m f)\|_{q,\nu+2n}^q h^{-2mnq} \leq C_3 \|\Delta_{h,n,\nu}^m f\|_{p,n,\nu}^q h^{-2mnq} \leq C_4 \omega_m^q(f, 2^{-i})_{p,n,\nu}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера и условие $\lambda \in A_{q/(q-r), \nu+2n}$, при $0 < r < q$ получаем

$$\begin{aligned} &\int_{M_i} \lambda(t) |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^r d\mu_{\nu+2n}(t) \leq \\ &\leq \left(\int_{M_i} |\lambda(t)|^{q/(q-r)} d\mu_{\nu+2n}(t) \right)^{1-r/q} \left(\int_{M_i} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^q d\mu_{\nu+2n}(t) \right)^{r/q} \leq \\ &\leq C_5 \omega_m^r(f, 2^{-i})_{p,n,\nu} 2^{-ir(2\nu+4n+2)/q} \int_{M_{i-1}} \lambda(t) d\mu_{\nu+2n}(t) \leq \\ &\leq C_6 \int_{M_{i-1}} \lambda(t) \omega_m^r(f, t^{-1})_{p,n,\nu} (1/t)^{r(2\nu+4n+2)/q} d\mu_{\nu+2n}(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Суммируя неравенства (20) по $i \in \mathbb{Z}_+$, находим

$$\int_1^\infty \lambda(t) |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^r d\mu_{\nu+2n}(t) \leq C_6 \int_{1/2}^\infty \lambda(t) \omega_m^r(f, t^{-1})_{p,n,\nu} t^{-r(2\nu+4n+2)/q} d\mu_{\nu+2n}(t). \quad (21)$$

В силу условия $\lambda \in A_{q/(q-r), \nu+2n}$, (8) и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} &\int_{1/2}^1 \lambda(t) \omega_m^r(f, t^{-1})_{p,n,\nu} t^{-r(2\nu+4n+2)/q} d\mu_{\nu+2n}(t) \leq C_7 \|f\|_{p,n,\nu}^r \int_{1/2}^1 \lambda(t) d\mu_{\nu+2n}(t) \leq \\ &\leq C_8 \left(\int_0^1 |\lambda(t)|^{q/(q-r)} d\mu_{\nu+2n}(t) \right)^{1-r/q} \left(\int_0^1 t^{2\nu+4n+1} dt \right)^{r/q} < \infty. \end{aligned}$$

Теперь можно заключить, что правая и левая части (21) конечны. Наконец, в силу условия $\lambda \in L_{\nu+2n}^{q/(q-r)}[0, 1]$ видим, что

$$\int_0^1 \lambda(t) |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^r d\mu_{\nu+2n}(t) \leq$$

$$\leq \left(\int_0^1 |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^q d\mu_{\nu+2n}(t) \right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_0^1 |\lambda(t)|^{q/(q-r)} d\mu_{\nu+2n}(t) \right)^{1-\frac{r}{q}} < \infty. \quad (22)$$

Из (21) и (22) выводится утверждение теоремы 3. $\square$

Будем писать $A(i) \asymp B(i)$, если $A(i) = O(B(i))$ и $B(i) = O(A(i))$, $i \in \mathbb{Z}$.

Следствие 4. Пусть $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\nu > -1/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_{n,\nu}^p(\mathbb{R}_+)$, $r \in (0, q)$, $m \in \mathbb{N}$. Если $\alpha > (r/q - 1)(2\nu + 4n + 2)$ и сходится интеграл

$$\int_1^\infty t^{\alpha - r(2\nu + 4n + 2)/q} \omega_m^r(f, t^{-1})_{p,n,\nu} d\mu_{\nu+2n}(t), \quad (23)$$

то $t^\alpha |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^r \in L_{\nu+2n}^1(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. Для $\lambda(t) = t^\alpha$ условие $\lambda \in L_{\nu+2n}^{q/(q-r)}[0, 1]$ равносильно сходимости интеграла $\int_0^1 t^{q\alpha/(q-r)} t^{2\nu+4n+1} dt$ или неравенству $\alpha > (r/q - 1)(2\nu + 4n + 2)$. По определению легко получить

$$I_1 = \left(\int_{2^i}^{2^{i+1}} t^{q\alpha/(q-r)} d\mu_{\nu+2n}(t) \right)^{1-r/q} \asymp 2^{i(2\nu+4n+2+q\alpha/(q-r))(1-r/q)} \asymp 2^{i((2\nu+4n+2)(1-r/q)+\alpha)},$$

тогда как

$$I_2 = \int_{M_{i-1}} t^\alpha d\mu_{\nu+2n}(t) \asymp 2^{i(2\nu+4n+2+\alpha)},$$

т. е. $I_1 \leq C_1 2^{-i(2\nu+4n+2)r/q} I_2$. Таким образом, $\lambda(t) = t^\alpha \in A_{q/(q-r), \nu+2n}$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Используя теорему 3, получаем следствие 4. $\square$

Следствие 5. Пусть p, q, m, n, ν и r такие же, как в следствии 4, $f \in H_{p,\nu}^{m,w_\beta}(\mathbb{R}_+)$, где $w_\beta(t) = t^\beta$, $\beta > 0$. Если $\alpha > (r/q - 1)(2\nu + 2)$ и

$$q > r > \frac{\alpha + 2\nu + 4n + 2}{\frac{2\nu + 4n + 2}{q} + \beta} = \frac{q(\alpha + 2\nu + 4n + 2)}{2\nu + 4n + 2 + q\beta}, \quad (24)$$

то $t^\alpha |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t)|^r \in L_{\nu+2n}^1(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. При выполнении условий следствия 5 интеграл (23) сходится, если

$$\alpha - r(2\nu + 4n + 2)/q - r\beta + 2\nu + 4n + 1 < -1, \quad r < q.$$

Легко видеть, что эти условия равносильны (24). $\square$

Следствие 6. Пусть p, q, m, n, ν, r такие же, как в следствии 4, $f \in H_{p,\nu}^{m,w_\beta}(\mathbb{R}_+)$, где $w_\beta(t) = t^\beta$, $\beta > 0$. Если

$$q \geq r > \frac{(2\nu + 4n + 2)q}{2\nu + 4n + 2 + q\beta},$$

то $\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(t) \in L_{\nu+2n}^r(\mathbb{R}_+)$.

5. ОБОБЩЕННЫЕ СЖАТИЯ И РЕЗУЛЬТАТ ТИПА БОАСА

Последний из основных результатов работы связан с приложениями понятия сжатия к интегрируемости обобщенного преобразования Фурье–Бесселя. Близкие утверждения для классического преобразования Фурье можно найти, например, в работе М. Кинукавы [21].

Теорема 4. Пусть $\nu > -1/2$, $0 < r \leq 2$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $f, g \in L^2_{n,\nu}(\mathbb{R}_+)$ и справедливо неравенство

$$|\Delta^m_{h,n,\nu}g(x)| \leq A|\Delta^m_{h,n,\nu}f(x)| \quad (25)$$

для всех $h \in \mathbb{R}_+$ и п.в. $x \in \mathbb{R}_+$. Если

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty z^{-2mr-1+(1-r/2)(2\nu+4n+2)} \left(\int_0^z x^{4m} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz + \\ & + \int_1^\infty z^{-1+(1-r/2)(2\nu+4n+2)} \left(\int_z^\infty |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz < \infty, \end{aligned} \quad (26)$$

то $\mathcal{F}_{n,\nu}(g) \in L^r_{\nu+2n}(\mathbb{R}_+)$.

Доказательство. В силу условия (25) имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\Delta^m_{h,n,\nu}g(x)|^2 d\mu_\nu(x) \leq A^2 \int_{\mathbb{R}_+} |\Delta^m_{h,n,\nu}f(x)|^2 d\mu_\nu(x).$$

Применяя равенство Планшереля (6) и лемму 5, получаем

$$\int_{\mathbb{R}_+} (1-j_{\nu+2n}(xh))^{2m} |\mathcal{F}_{n,\nu}(g)(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \leq C_1 \int_{\mathbb{R}_+} (1-j_{\nu+2n}(xh))^{2m} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x).$$

Далее для краткости полагаем $\mathcal{F}_{n,\nu}(f) = \varphi$, $\mathcal{F}_{n,\nu}(g) = \psi$. Если $z > 0$ и $h = 1/z$, то согласно утверждению 3) леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^z (x/z)^{4m} |\psi(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \leq C_2 \int_{\mathbb{R}_+} (1-j_{\nu+2n}(x/z))^{2m} |\varphi(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x), \\ & \int_0^z x^{4m} |\psi(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \leq C_3 z^{4m} \int_0^\infty (1-j_{\nu+2n}\nu(x/z))^{2m} |\varphi(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x). \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть $0 < r < 2$ и $F(z) = \int_0^z (x^{2m} |\psi(x)|)^r d\mu_{\nu+2n}(x)$. Используя неравенство Гёльдера с показателями $2/r$ и $2/(2-r)$, находим

$$\begin{aligned} F(z) & \leq \left(\int_0^z 1 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{1-r/2} \left(\int_0^z (x^{2m} |\psi(x)|)^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} \leq \\ & \leq C_4 z^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)} \left(\int_0^z (x^{2m} |\psi(x)|)^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Применяя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_1^N |\mathcal{F}_{n,\nu}(g)(x)|^r d\mu_{\nu+2n}(x) = C_5 \int_1^N \frac{F'(x)}{x^{2mr+2\nu+4n+1}} d\mu_{\nu+2n}(x) = \\ & = \int_1^N \frac{F'(x)}{x^{2mr}} dx \leq \frac{F(N)}{N^{2mr}} + 2mr \int_1^N \frac{F(x)}{x^{2mr+1}} dx. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя (28) в (29), находим

$$\begin{aligned} \int_1^N |\mathcal{F}_{n,\nu}(g)(x)|^r d\mu_{\nu+2n}(x) &\leq C_4 \frac{N^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)}}{N^{2mr}} \left(\int_0^N x^{4m} |\psi(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} + \\ &+ 2mr C_4 \int_1^N \frac{\left(\int_0^z x^{4m} |\psi(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2}}{z^{2mr+1-(2\nu+4n+2)(1-r/2)}} dz = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Мы хотим показать, что A_1 и A_2 ограничены при $N \rightarrow \infty$. В силу леммы 2 и (27) имеем

$$\begin{aligned} A_1 &\leq C_6 \frac{N^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)}}{N^{2mr}} \left(N^{4m} \int_0^N (x/N)^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) + \right. \\ &+ \left. N^{4m} \int_N^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} \leq C_6 \frac{N^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)}}{N^{2mr}} \left(\int_0^N x^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} + \\ &+ C_6 N^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)} \left(\int_N^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} = C_6(A_{11} + A_{12}). \end{aligned}$$

Поскольку интеграл $\int_z^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x)$ убывает по z и в силу условия (26)

$$\int_{N/2}^N z^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)-1} \left(\int_z^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$, получаем

$$N^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)} \left(\int_N^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} \rightarrow 0$$

и $A_{12} = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

С другой стороны, интеграл $\int_0^z x^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x)$ возрастает по z и в силу условия (26)

$$\int_N^{2N} z^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)-2mr-1} \left(\int_0^z x^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$ и

$$N^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)-2mr} \left(\int_0^N x^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, $A_{11} = o(1)$ и $A_1 = o(1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Используя (27) и утверждения 1), 3) леммы 2, находим

$$\begin{aligned} A_2 &\leq C_7 \int_1^N z^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)-2mr-1} \times \\ &\times \left(z^{4m} \int_0^z (x/z)^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) + z^{4m} \int_z^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz \leq \\ &\leq C_7 \int_1^N z^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)-2mr-1} \left(\int_0^z x^{4m} \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz + \\ &+ C_7 \int_1^N z^{(2\nu+4n+2)(1-r/2)-1} \left(\int_z^\infty \varphi^2(x) d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} dz < \infty \end{aligned}$$

благодаря условию (26). Поскольку $\psi = \mathcal{F}_\nu(g) \in L_\nu^2[0, 1] \subset L_\nu^r[0, 1]$, мы заканчиваем доказательство в случае $0 < r < 2$. Если же $r = 2$, то утверждение вытекает из равенства типа Планшереля (6). $\square$

Замечание. Условие (26) может быть переписано в

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty z^{-2mr-r(\nu+2n+1)} \left(\int_0^z x^{4m} |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} d\mu_{\nu+2n}(z) + \\ & + \int_1^\infty z^{-r(\nu+2n+1)} \left(\int_z^\infty |\mathcal{F}_{n,\nu}(f)(x)|^2 d\mu_{\nu+2n}(x) \right)^{r/2} d\mu_{\nu+2n}(z) < \infty. \end{aligned}$$

В этой форме оно аналогично (4).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье* (ГИТТЛ, М.-Л., 1948).
- [2] Butzer P.L., Nessel R.J. *Fourier analysis and approximation* (Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1971).
- [3] Бари Н. К., Стечкин С. Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций*, Тр. Моск. матем. об-ва **5**, 483–522 (1956).
- [4] Móricz F. *Best possible sufficient conditions for the Fourier transform to satisfy the Lipschitz or Zygmund conditions*, Studia Math. **199** (2), 199–205 (2010).
- [5] Krayukhin S.A., Volosivets S.S. *Functions of bounded p-variation and weighted integrability of Fourier transforms*, Acta Math. Hung. **159** (2), 374–399 (2019).
- [6] Gogoladze L., Meskhia R. *On the absolute convergence of trigonometric Fourier series*, Proc. A Razmadze Math. Inst. **141** (5), 29–40 (2006).
- [7] Móricz F. *Sufficient conditions for the Lebesgue integrability of Fourier transforms*, Anal. Math. **36** (2), 121–129 (2010).
- [8] Boas R.P. *Beurling's test for absolute convergence of Fourier series*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1), 24–27 (1960).
- [9] Platonov S.S. *On the Hankel transform of functions from Nikol'skii classes*, Integral Transforms Spec. Funct. **32** (10), 823–838 (2021).
- [10] Daher R., Tyr O. *Integrability of the Fourier–Jacobi transform of functions satisfying Lipschitz and Dini–Lipschitz-type estimates*, Integral Transforms Spec. Funct. **33** (2), 115–126 (2023).
- [11] Volosivets S. *Weighted integrability of Fourier–Dunkl transforms and generalized Lipschitz classes*, Anal. Math. Phys. **12** (5), 115 (2022).
- [12] Volosivets S.S. *Weighted integrability of Fourier–Jacobi transforms*, Integral Transforms Spec. Funct. **34** (6), 431–443 (2023).
- [13] Volosivets S.S. *Boas type and Titchmarsh type theorems for generalized Fourier–Bessel transform*, J. Math. Sci. **271** (2), 115–125 (2023).
- [14] Al Subaie R.F., Mourou M.A. *The continuous wavelet transform for a Bessel type operator on the half line*, Math. Stat. **1** (4), 196–203 (2013).
- [15] Берг Й., Лефстрем Й. *Интерполяционные пространства. Введение* (Мир, М., 1980).
- [16] Trimeche K. *Generalized harmonic analysis and wavelet packets* (CRC Press, Boca-Raton, 2018).
- [17] Платонов С.С. *Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полупрямой*, Изв. РАН. Сер. матем. **71** (5), 149–196 (2007).
- [18] Платонов С.С. *Обобщенные сдвиги Бесселя и некоторые проблемы теории приближений в метрике L_2* , II, Тр. ПГУ. Сер. матем. (8), 20–36 (2001).
- [19] Абилов В.А., Абилова Ф.В. *Приближение функций суммами Фурье–Бесселя*, Изв. вузов. Матем. (8), 3–9 (2001).
- [20] Volosivets S.S. *Fourier–Bessel transforms and generalized uniform Lipschitz classes*, Integral Transforms Spec. Funct. **33** (7), 559–569 (2022).
- [21] Kinukawa M. *Contraction of Fourier coefficients and Fourier integrals*, J. Anal. Math. **8**, 377–406 (1960).

Сергей Сергеевич Волосивец

*Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410012, Россия,*

e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

S.S. Volosivets

Integrability and Boas type results for a generalized Fourier–Bessel transform

Abstract. We obtain sufficient conditions for weighted integrability of a generalized Fourier–Bessel transform of functions from generalized integral Lipschitz classes. These conditions are analogues of the well known Moricz conditions for classical Fourier transform. Also a Boas type result connecting the behavior of a function and the smoothness of its generalized Fourier–Bessel transform is proved.

Keywords: generalized Fourier–Bessel transform, generalized Fourier–Bessel translation, weighted integrability, generalized contraction.

Sergey Sergeevich Volosivets

*Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,*

e-mail: volosivetsss@mail.ru