Известия вузов. Математика *https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm*
2024, № 8, с. 94–99 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное Р.З. Даутовым

П.С. СОЛОВЬЁВ

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Аннотация. Исследуется симметричная дифференциальная задача на собственные значения в частных производных с нелинейной зависимостью от спектрального параметра, возникающая в физике плазмы. Предложены и обоснованы новые условия существования положительного собственного значения и соответствующей положительной собственной функции. Построена конечно-элементная аппроксимация задачи, сохраняющая свойство положительности решений. Установлены результаты о существовании и сходимости приближенных решений.

Ключевые слова: собственное значение, положительная собственная функция, задача на собственные значения, метод конечных элементов.

УДК: 519.63

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-94-99

Введение

Пусть Ω — открытое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$ с непрерывной по Липшицу границей Γ, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $n \geqslant 2$. Изучается задача нахождения наименьшего собственного значения $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda = [0, \infty)$, и соответствующей положительной собственной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, удовлетворяющих в обобщенном смысле однородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка и однородному граничному условию Дирихле:

$$\begin{aligned} &-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(\lambda s(x))\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) = r(\lambda s(x))u(x), \quad x \in \Omega, \\ &u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Предположим, что функции $p(\eta)$, $r(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, являются непрерывными положительными. Задачи такого вида применяются при моделировании баланса заряженных частиц высокочастотного индукционного разряда пониженного давления [1]–[3].

Поступила в редакцию 03.04.2024, после доработки 03.04.2024. Принята к публикации 26.06.2024.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

При фиксированном $\eta \in \Lambda$ через $\gamma(\eta)$ обозначим минимальное собственное значение параметрической задачи на собственные значения

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p(\eta s(x)) \frac{\partial w(x)}{\partial x_i} \right) = \gamma(\eta) r(\eta s(x)) w(x), \quad x \in \Omega, \\
&w(x) = 0, \quad x \in \Gamma.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Тогда минимальное собственное значение λ задачи на собственные значения (1) является корнем характеристического уравнения $\gamma(\lambda) = 1$, а соответствующая собственная функция u совпадает с собственной функцией w задачи (2) при $\eta = \lambda$. С помощью такой характеризации решений предложены и обоснованы новые необходимые и достаточные условия, а также упрощенные достаточные условия для существования минимального положительного собственного значения и соответствующей положительной собственной функции исходной задачи (1).

Дифференциальная задача (1) аппроксимирована сеточной схемой метода конечных элементов с линейными конечными элементами на регулярной сетке, сохраняющей свойство положительности. Установлены новые результаты существования и оценки скорости сходимости приближенных положительных решений. В работах [1]–[3] получены результаты существования решений задачи (1) при завышенных требованиях гладкости коэффициентов уравнения. Результаты настоящей статьи развивают и обобщают результаты работ [2], [4]–[10]. В отличие от работ [8]–[10] в статье не предполагается монотонная зависимость отношения Рэлея от спектрального параметра.

1. Постановка вариационной задачи

Через $W_2^1(\Omega)$ будем обозначать вещественное пространство Соболева ([11], с. 45) с нормой

$$
\|v\|_1 = \left(\sum_{i=0}^{1} |v|_i^2 \right)^{1/2}, \quad |v|_0 = \left(\int_{\Omega} (v(x))^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad |v|_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} |\partial_i v|_0^2 \right)^{1/2},
$$

при $\partial_i = \partial / \partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Через $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ обозначим пространство функций v из пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющих граничному условию $v(x) = 0$, $x \in \Gamma$. Через $W_2^\alpha(\Omega)$ для $\alpha \in (0, 2]$ обозначим пространство Соболева дробного порядка с нормой $\|.\|_\alpha$ ([11], с. 214). Введем симметричные билинейные формы

$$
a(\eta, u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} p(\eta s(x)) \partial_i u(x) \partial_i v(x) dx, \quad b(\eta, u, v) = \int_{\Omega} r(\eta s(x)) u(x) v(x) \, dx
$$

для произвольных функций $u, v \in V$ при фиксированном параметре $\eta \in \Lambda$. Вариационные задачи на собственные значения для дифференциальных задач (1) и (2) имеют вид:

$$
\lambda \in \Lambda, u \in V \setminus \{0\} : \quad a(\lambda, u, v) = b(\lambda, u, v) \quad \forall v \in V, \tag{3}
$$

$$
\gamma(\eta) \in \mathbb{R}, w \in V \setminus \{0\} : \quad a(\eta, w, v) = \gamma(\eta) b(\eta, w, v) \quad \forall v \in V. \tag{4}
$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

1) Функции $p(\eta)$, $r(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, являются непрерывными положительными.

2) Функции $p(\eta)$, $r(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, являются неубывающими.

3) Справедливо соотношение $\lim\limits_{\eta \to \infty} \dfrac{p(\eta)}{r(\eta)} = 0$.

4) При $c \in (1,\infty)$ существует по крайней мере один конечный предел
$$\lim_{\eta\to\infty}\frac{p(c\eta)}{p(\eta)} = K_p(c), \quad \lim_{\eta\to\infty}\frac{r(c\eta)}{r(\eta)} = K_r(c).$$

Обозначим
$$s_1 = \min_{x\in\overline{\Omega}} s(x), \quad s_2 = \max_{x\in\overline{\Omega}} s(x), \quad R(\eta,v) = \frac{a(\eta,v,v)}{b(\eta,v,v)}, \quad S(v) = \frac{|v|_1^2}{|v|_0^2},$$
$$\overline{Q} = \prod_{i=1}^n [\alpha_i,\beta_i] \subseteq \overline{\Omega}, \quad \varkappa_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi}{\beta_i-\alpha_i}\right)^2,$$
где $v \in V\setminus\{0\}$, $\alpha_i,\beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1,2,\ldots,n$. Тогда справедливы ([12], с. 98) соотношения
$$\gamma(\eta) = R(\eta,w) = \min_{v\in V\setminus\{0\}} R(\eta,v), \quad 0 < \varkappa_0 \leqslant \varkappa = \min_{v\in V\setminus\{0\}} S(v). \tag{5}$$

Согласно условию 1) и ([13], с. 204) минимальное собственное значение $\gamma(\eta)$ задачи (4) является положительным простым и соответствует единственной нормированной положительной почти всюду в Ω собственной функции w, $b(\eta,w,w) = 1$. Кроме того, по условию 1) функция $\gamma(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, является непрерывной [9]. Применяя далее условия 1)–4) и соотношения (5), получаем предельное соотношение на бесконечности
$$\gamma(\mu) = \min_{v\in V\setminus\{0\}} R(\mu,v) \leqslant \frac{p(\mu s_2)}{r(\mu s_1)}\varkappa = \frac{p(c\eta)}{p(\eta)}\,\frac{p(\eta)}{r(\eta)}\varkappa \to 0$$
при $\mu\to\infty$, $\eta = \mu s_1 \to \infty$, $c = s_2/s_1 \in (1,\infty)$, если существует конечный предел $K_p(c)$. В случае существования конечного предела $K_r(c)$ аналогично при $\mu\to\infty$ выводим
$$\gamma(\mu) = \min_{v\in V\setminus\{0\}} R(\mu,v) \leqslant \frac{p(\mu s_2)}{r(\mu s_1)}\varkappa = \frac{r(c\eta)}{r(\eta)}\,\frac{p(c\eta)}{r(c\eta)}\varkappa \to 0.$$
Учитывая, что $\gamma(0) = \varkappa p(0)/r(0) \geqslant \varkappa_0 p(0)/r(0)$ согласно (5), приходим к следующему результату существования положительных решений задачи (3).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)–4) *и одно из следующих условий*: a) $\gamma(\xi) > 1$ *для некоторого* $\xi \in \Lambda$, b) $\varkappa p(0)/r(0) > 1$, c) $\varkappa_0 p(0)/r(0) > 1$. *Тогда существует минимальное простое положительное собственное значение* λ *задачи* (3), *отвечающее единственной нормированной положительной почти всюду в* Ω *собственной функции* u, $b(\lambda,u,u) = 1$. *При этом собственное значение* λ *является корнем уравнения* $\gamma(\lambda) = 1$, *а собственная функция* u *совпадает с собственной функцией* w *задачи* (4) *при* $\eta = \lambda$.

Заметим, что условие a) теоремы 1 является не только достаточным, но и необходимым условием существования положительных решений задачи (3).

2. Конечно-элементная аппроксимация задачи

Пусть Ω — открытый политоп в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Определим регулярное семейство разбиений $\mathcal{T}_h$ множества $\overline{\Omega}$ на симплициальные конечные элементы. Предположим, что выполнены следующие требования ([14], сс. 48, 55, 61, 127, 128; [15], [16]).

5) Множество $\overline{\Omega}$ разбито на замкнутые n-симплексы e, $\overline{\Omega} = \bigcup_{e\in\mathcal{T}_h} e$.

6) Любая грань каждого n-симплекса e_1 является подмножеством границы Γ или гранью соседнего n-симплекса e_2, если e_1, $e_2 \in \mathcal{T}_h$.

7) Величины внутренних двугранных углов n-симплекса из $\mathcal{T}_h$ не превышают $\pi/2$.

8) Существует не зависящая от h постоянная σ такая, что

$$\frac{h_e}{\rho_e} \leqslant \sigma \quad \forall e \in \bigcup_h \mathcal{T}_h, \quad h_e = \mathrm{diam}(e), \quad \rho_e = \sup_{B \in \mathcal{B}(e)} \mathrm{diam}(B),$$

где $\mathrm{diam}(e)$ — диаметр множества e, $\mathcal{B}(e)$ — множество всех замкнутых шаров из e.

9) Имеет место сходимость $h = \max\limits_{e \in \mathcal{T}_h} h_e \to 0$.

Заметим, что разбиение любого политопа в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее свойствам 5)–9), существует [16] при $2 \leqslant n \leqslant 6$.

Определим конечномерные подпространства V_h пространства V размерности $N = N_h$ как множества непрерывных функций из пространства V, которые на каждом элементе $e \in \mathcal{T}_h$ являются полиномами степени не выше 1. В этом случае справедливо ([14], с. 137) требование предельной плотности семейства подпространств V_h в пространстве V, т. е. для любой функции v из V имеет место сходимость $\varepsilon_h(v) \to 0$ при $h \to 0$, где

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} |v - v^h|_1. \tag{6}$$

Вариационные задачи на собственные значения (3) и (4) будем аппроксимировать следующими конечномерными схемами:

$$\lambda^h \in \Lambda, u^h \in V_h \setminus \{0\}: \quad a(\lambda^h, u^h, v^h) = b(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h, \tag{7}$$

$$\gamma^h(\eta) \in \mathbb{R}, w^h \in V_h \setminus \{0\}: \quad a(\eta, w^h, v^h) = \gamma^h(\eta) b(\eta, w^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{8}$$

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ — базисные функции подпространства V_h ([14], с. 98). Обозначим через $A(\eta)$ и $B(\eta)$ симметричные положительно определенные матрицы размера N с элементами $a_{ij}(\eta) = a(\eta, \varphi_i, \varphi_j)$, $b_{ij}(\eta) = b(\eta, \varphi_i, \varphi_j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда задача (8) сводится к матричной задаче $A(\eta)^{-1} B(\eta) z = (\gamma^h(\eta))^{-1} z$. Из свойства 7) следует неотрицательность [16] обратной матрицы $A(\eta)^{-1} \geqslant 0$. Кроме того, так как $B(\eta) \geqslant 0$, то $A(\eta)^{-1} B(\eta) \geqslant 0$. Поэтому из ([17], с. 344) выводим существование неотрицательного собственного вектора $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N)^\top$. Следовательно, минимальное собственное значение $\gamma^h(\eta)$ задачи (8) является положительным и соответствует нормированной неотрицательной в $\overline{\Omega}$ собственной функции $w^h = \sum\limits_{i=1}^N z_i \varphi_i$, $b(\eta, w^h, w^h) = 1$, поскольку $z_i \geqslant 0$, $\varphi_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Кроме того, по условию 1) функция $\gamma^h(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, является непрерывной [9].

Имеют место ([12], с. 98) соотношения, аналогичные (5):

$$\gamma(\eta) \leqslant \gamma^h(\eta) = R(\eta, w^h) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\eta, v^h), \quad 0 < \varkappa_0 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa^h = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} S(v^h). \tag{9}$$

Предельное свойство $\gamma^h(\eta) \to 0$ при $\eta \to \infty$ устанавливается согласно условиям 1)–6) с помощью одного из двух соотношений:

$$\gamma^h(\mu) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) \leqslant \frac{p(\mu s_2)}{r(\mu s_1)} \varkappa^h = \frac{p(c\eta)}{p(\eta)} \frac{p(\eta)}{r(\eta)} \varkappa^h \to 0,$$

$$\gamma^h(\mu) = \min_{v^h \in V_h \setminus \{0\}} R(\mu, v^h) \leqslant \frac{p(\mu s_2)}{r(\mu s_1)} \varkappa^h = \frac{r(c\eta)}{r(\eta)} \frac{p(c\eta)}{r(c\eta)} \varkappa^h \to 0$$

при $\mu \to \infty$, $\eta = \mu s_1 \to \infty$, $c = s_2/s_1 \in (1, \infty)$, в зависимости от существования конечного предела $K_p(c)$ или $K_r(c)$ из условия 4). В результате, применяя соотношения $\gamma^h(0) = \varkappa^h p(0)/r(0) \geqslant \gamma(0) = \varkappa p(0)/r(0) \geqslant \varkappa_0 p(0)/r(0)$ согласно (9), получаем следующий результат существования положительных решений конечномерной задачи (7).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *а также условия* 5)–7). *Тогда существует минимальное положительное собственное значение* λ^h *задачи* (7), *отвечающее нормированной неотрицательной в* $\overline{\Omega}$ *собственной функции* u^h, $b(\lambda^h, u^h, u^h) = 1$. *При этом собственное значение* λ^h *является корнем уравнения* $\gamma^h(\lambda^h) = 1$, *а собственная функция* u^h *совпадает с собственной функцией* w^h *задачи* (8) *при* $\eta = \lambda^h$.

Одним и тем же символом c будем обозначать разные константы, не зависящие от h, и считать h достаточно малым. Для $\mu, \eta \in \Lambda$ обозначим $\Delta(\mu, \eta) = (\gamma(\mu) - \gamma(\eta))/(\mu - \eta)$.

Введем дополнительные условия.

10) Существует $\nu > 0$ такое, что $\gamma(\eta) < 1$ при любом $\eta \in (\lambda, \lambda + \nu)$.

11) Существует $\nu > 0$ такое, что $-\Delta(\lambda, \eta) \geqslant c_0 > 0$ при любом $\eta \in (\lambda, \lambda + \nu)$.

12) Существуют положительные числа σ, δ, c_p и c_r такие, что $|p(\mu) - p(\eta)| \leqslant c_p|\mu - \eta|^\sigma$, $|r(\mu) - r(\eta)| \leqslant c_r|\mu - \eta|^\sigma$, $\mu, \eta \in [\lambda, \lambda + \delta)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и условие* 9), λ *и* u *— решения задачи* (3), λ^h *и* u^h *— решения задачи* (7).

a) *Если вместе с тем выполнено условие* 10), *то* $\lambda^h \geqslant \lambda$ *и имеет место сходимость* $\lambda^h \to \lambda$, $|u^h - u|_1 \to 0$, *при* $h \to 0$.

b) *Если дополнительно выполнено условие* 11), $u \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1]$, *то справедлива оценка погрешности* $0 \leqslant \lambda^h - \lambda \leqslant c\,h^{2\alpha}$.

c) *Если, кроме того, выполнены условия* 11), 12), $u \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0, 1]$, *то справедлива оценка погрешности* $|u^h - u|_1 \leqslant c\,h^\beta$ *при* $\beta = \min\{\alpha, 2\alpha\sigma\}$.

Результат сходимости a) теоремы 3 установлен аналогично [5] с помощью (6). Для функции $u \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ имеет место оценка $\varepsilon_h(u) \leqslant c\,h^\alpha$ ([18], с. 379). Следовательно, применяя [7], [9], получаем результат о погрешности b) теоремы 3: $0 \leqslant \lambda^h - \lambda \leqslant c\,\varepsilon_h^2(u) \leqslant c\,h^{2\alpha}$. С помощью [9] выводим результат о погрешности c) теоремы 3: $|u^h - u|_1 \leqslant c\,\varepsilon_h(u) + c(\lambda^h - \lambda)^\sigma \leqslant c\,h^\beta$ при $\beta = \min\{\alpha, 2\alpha\sigma\}$. Из ([19], с. 48) вытекает существование $\alpha \in (0, 1]$, для которого при достаточно гладких функциях $p(\eta)$, $r(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, справедливо включение $u \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$. Согласно условию 10) функция $\gamma(\mu)$ меняет знак в точке λ, которая является изолированным собственным значением задачи (3). Из условия 11) следует, что функция $y = \gamma(\mu)$ пересекает прямую $y = 1$ в точке λ под ненулевым углом. Если функции $p(\eta)$, $r(\eta)$, $\eta \in \Lambda$, $s(x)$, $x \in \overline{\Omega}$, являются непрерывно дифференцируемыми, то непрерывно дифференцируемой будет [4] и функция $\gamma(\mu)$, $\eta \in \Lambda$. Тогда условие 11) можно заменить на условие $-\gamma'(\lambda) \geqslant c_0 > 0$, а условие 12) будет выполнено при $\sigma = 1$. Если дополнительно предположить выпуклость множества $\overline{\Omega}$, то будет выполняться ([20], с. 147) включение $u \in W_2^{1+\alpha}(\Omega)$ при $\alpha = 1$. Поэтому оценки погрешности теоремы 3 примут следующий вид: $0 \leqslant \lambda^h - \lambda \leqslant c\,h^2$, $|u^h - u|_1 \leqslant c\,h$. Заметим, что функции, удовлетворяющие условию 4), имеют важные приложения в теории функций, теории вероятностей и теории дифференциальных уравнений. Свойства таких функций исследуются, например, в [21].

Литература

[1] Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф. *Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения* (Изд-во Казан. ун-та, Казань, 2000).

[2] Желтухин В.С. *О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления*, Изв. вузов. Матем. (5), 26–31 (1999).

[3] Желтухин В.С. *Об условиях разрешимости системы краевых задач теории высокочастотной плазмы пониженного давления*, Изв. вузов. Матем. (1), 52–57 (2005).

[4] Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С. *Аппроксимация наименьшего собственного значения нелинейной задачи Штурма–Лиувилля*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки **157** (2), 40–54 (2015).

[5] Zheltukhin V.S., Solov'ev S.I., Solov'ev P.S., Chebakova V.Yu. *Computation of the minimum eigenvalue for a nonlinear Sturm–Liouville problem*, Lobachevskii J. Math. **35** (4), 416–426 (2014).

[6] Solov'ev S.I., Solov'ev P.S. *Finite Element Approximation of the Minimal Eigenvalue of a Nonlinear Eigenvalue Problem*, Lobachevskii J. Math. **39** (7), 949–956 (2018).

[7] Korosteleva D.M., Solov'ev P.S., Solov'ev S.I. *Finite Element Approximation of the Minimal Eigenvalue and the Corresponding Positive Eigenfunction of a Nonlinear Sturm–Liouville problem*, Lobachevskii J. Math. **40** (11), 1959—1966 (2019).

[8] Solov'ev S.I. *Approximation of differential eigenvalue problems with a nonlinear dependence on the parameter*, Diff. Equat. **50** (7), 947–954 (2014).

[9] Solov'ev S.I. *Approximation of nonlinear spectral problems in a Hilbert space*, Diff. Equat. **51** (7), 934–947 (2015).

[10] Solov'ev S.I. *Eigenvibrations of a bar with elastically attached load*, Diff. Equat. **53** (3), 409–423 (2017).

[11] Adams R.A. *Sobolev spaces* (Academic Press, New York, 1975).

[12] Михлин С.Г. *Линейные уравнения в частных производных* (Высшая школа, М., 1977).

[13] Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка* (Наука, М., 1989).

[14] Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач* (Мир, М., 1980).

[15] Brandts J.H., Korotov S., Křížek M. *The discrete maximum principle for linear simplicial finite element approximations of a reaction-diffusion problem*, Linear Algebra Appl. **429** (10), 2344–2357 (2008).

[16] Vejchodský T. *The discrete maximum principle for Galerkin solutions of elliptic problems*, Cent. Eur. J. Math. **10** (1), 25–43 (2012).

[17] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (Наука, М., 1988).

[18] Brenner S.C., Scott L.R. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (Springer, New York, 2008).

[19] Dauge M. *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes Math. 1341 (Springer, Berlin, 1988).

[20] Grisvard P. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains* (Pitman, Boston, 1985).

[21] Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции* (Наука, М., 1985).

Павел Сергеевич Соловьёв

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: pavel.solovev.kpfu@mail.ru

P.S. Solov'ev

Approximation of positive solutions of symmetric eigenvalue problems with nonlinear dependence on the spectral parameter

Abstract. A symmetric partial differential eigenvalue problem with nonlinear dependence on the spectral parameter arising in plasma physics is studied. We propose and justify new conditions for the existence of a positive eigenvalue and the corresponding positive eigenfunction. A finite element approximation of the problem preserving the property of positivity of solutions is constructed. The existence and convergence of approximate solutions are established.

Keywords: eigenvalue, positive eigenfunction, eigenvalue problem, finite element method.

Pavel Sergeevich Solov'ev

Kazan Federal University,
18 Kremlevskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: pavel.solovev.kpfu@mail.ru