

Е.В. ЧИЖОНКОВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОПРОКИДЫВАНИЯ ПЛАЗМЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Аннотация. Предлагаемый способ оптимизации вычислений носит комбинированный характер. Сначала с использованием кусочно-равномерной сетки строится разностная схема второго порядка точности типа Мак-Кормака, а затем для ослабления условия устойчивости применяется неявная версия схемы, которая даже в нелинейном случае допускает безытерационную реализацию. При построении сетки требуется предварительное исследование, которое базируется на аналитических свойствах решения дифференциальной задачи. На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о потенциальном сокращении объема вычислений в десятки раз без заметной потери точности.

Ключевые слова: численное моделирование, релятивистские колебания, холодная плазма, эффект опрокидывания, кусочно-равномерная сетка, неявная схема Мак-Кормака.

УДК: 519.633

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-81-93

ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамическая модель холодной плазмы хорошо известна и достаточно подробно описана в учебниках и монографиях по физике плазмы [1]–[4]. В настоящее время внимание к этой модели обусловлено в первую очередь задачами, связанными с распространением сверхмощных лазерных импульсов в плазме [5], [6]. Подобные постановки напрямую связаны с приложением результатов, удостоенных Нобелевской премии по физике 2018 г. Приведем следующие примеры практически важных задач этой тематики: лазерное ускорение электронов и ионов, быстрое зажигание термоядерного синтеза, ядерные реакции в луче лазера, синхротронное и субмиллиметровое излучение и пр. [7]. Численному моделированию колебаний в холодной плазме, а также кильватерных волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом, посвящена монография [8].

В силу нелинейности рассматриваемой модели в качестве рабочего инструмента исследований на первом плане находятся численные методы, хотя трудности их применения представляются весьма серьезными. Главной причиной этого являются качественные свойства решений дифференциальных уравнений холодной плазмы (см., например, [9], [10]). Во-первых, даже гладкие периодические по времени решения характеризуются сильными изменениями, что выражается в абсолютных значениях производных на различных этапах одного периода (перепады значений могут достигать нескольких порядков). Во-вторых, может наблюдаться (при моделировании релятивистских колебаний с конечной энергией имеет место всегда!) хорошо и давно известный эффект опрокидывания колебаний [11]. В

терминах уравнений с частными производными гиперболического типа эффект опрокидывания имеет название „градиентная катастрофа“, т. е. когда из сколь угодно гладких начальных данных или правых частей формируется ограниченное разрывное решение, имеющее неограниченные пространственные производные. Вышесказанное означает необходимость применения достаточно подробных дискретизаций по пространству, что при использовании явных по времени расчетных схем в свою очередь порождает ограничение курантовского типа на временной шаг. Иными словами, численное моделирование плазменных колебаний, завершающихся эффектом опрокидывания, можно проводить с помощью соответствующих модификаций классических разностных схем [12], однако вычислительные затраты при этом представляются весьма обременительными.

Отметим также, что точное или приближенное решение классической задачи Римана (задачи Коши с кусочно постоянными начальными данными), которое является основой большинства современных алгоритмов численного решения для постановок задач близкого газодинамического типа [13], в рассматриваемой ситуации совершенно непригодно. Причина в том, что сама постановка классической задачи Римана здесь не имеет никакого физического смысла, так как начальная разрывная функция электрического поля уже означает бесконечную концентрацию заряда в точках разрыва (наличие градиентной катастрофы!).

В настоящей работе при моделировании эффекта опрокидывания плазменных колебаний с целью существенного сокращения объема вычислительной работы (без заметной потери точности!) предлагается использование кусочно-равномерных сеток (КРС): достаточно подробных в области больших градиентов решения и более грубых в области плавного изменения решения. Подобные сетки хорошо зарекомендовали себя при численном решении сингулярно возмущенных параболических и эллиптических уравнений [14], однако для систем первого порядка гиперболического типа, описывающих колебания холодной плазмы, их планируется применить, по-видимому, впервые. Заметим, что естественным дополнением КРС при моделировании колебаний должны быть неявные по времени разностные схемы, обладающими более слабыми, чем курантовские, ограничениями на устойчивость (вплоть до полного отсутствия ограничений!). В данном случае для ослабления требований на устойчивость предлагается использовать *неявную схему* Мак-Кормака [15], так как безытерационный способ ее реализации по объему вычислений незначительно отличается от классической *явной схемы* Мак-Кормака (переопубликована в [16]), но при этом схема является безусловно устойчивой (в линейном случае), т. е. вполне подходящей при применении КРС.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе приведена простейшая (плоская пространственно одномерная) система уравнений, описывающая релятивистские колебания холодной плазмы в эйлеровых переменных. Также здесь указаны аналитические свойства решения дифференциальной задачи: существование и единственность, закон сохранения энергии, нечетность решения при нечетных начальных данных, а также — соответствующая формула электронной плотности на оси симметрии области. Во втором разделе приведена модификация неявной схемы Мак-Кормака для расчета релятивистских колебаний и ее основные свойства для численного решения линейного уравнения переноса. В третьем разделе описана процедура оптимизации вычислений, включающая выбор подобластей с различными пространственными шагами, и приведены результаты расчетов, иллюстрирующие эффективность вычислительного алгоритма на основе КРС и неявной схемы при моделировании эффекта опрокидывания. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ СВОЙСТВА

1.1. Уравнения и начальные условия. Будем считать плазму релятивистской электронной жидкостью, пренебрегая рекомбинационными эффектами и движением ионов. Тогда в рамках модели холодной плазмы ее плоские одномерные колебания можно описать безразмерной системой уравнений

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho} + E = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \theta} + V \frac{\partial E}{\partial \rho} - V = 0, \quad \gamma = \sqrt{1 + P^2}, \quad V = \frac{P}{\gamma}, \quad (1)$$

где P, V — импульс и скорость электронов, γ — фактор Лоренца, E — электрическое поле, ρ и θ — безразмерные координаты по пространству и времени соответственно. К системе (1) обычно добавляют уравнение

$$N(\rho, \theta) = 1 - \frac{\partial E(\rho, \theta)}{\partial \rho}, \quad (2)$$

характеризующее безразмерную плотность электронов N . Формула (2) является частным случаем теоремы Гаусса [17], которая в дифференциальной размерной форме имеет вид $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n - n_0)$. Подробный вывод уравнений (1),(2) можно найти в различных источниках (см., например, [8], с. 19; [12]).

Ниже в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \rho \in \mathbb{R}, \theta > 0\}$ нас будет интересовать решение задачи Коши для (1) с начальными условиями

$$P(\rho, 0) = P_0(\rho), \quad E(\rho, 0) = E_0(\rho), \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Наиболее естественным выбором начальных условий (3) является имитация возмущений электрического поля, которые порождаются в разреженной плазме коротким мощным лазерным импульсом при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы, см. детали в [18]):

$$E_0(\rho) = \left(\frac{a_*}{\rho_*}\right)^2 \rho \exp\left\{-2\frac{\rho^2}{\rho_*^2}\right\}, \quad P_0(\rho) = 0, \quad (4)$$

где a_*, ρ_* — амплитуда и ширина импульса.

Система (1) относится к гиперболическому типу. Хорошо известно, что для таких систем существует локально по времени единственное решение задачи Коши того же класса, что и начальные данные, в нашем случае это C^2 . Также известно, что для таких систем потеря решением гладкости происходит по одному из следующих сценариев: либо сами компоненты решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность, либо они остаются ограниченными, но в бесконечность обращаются их производные [19]. Последняя возможность реализуется, например, для однородных законов сохранения, к которым относятся уравнения газовой динамики, где возникновение особенности соответствует образованию ударной волны.

1.2. Свойства решения. Напомним основные свойства решения задачи (1), (3), впервые полученные в работе [9] (подробные доказательства приведены в [10]).

Из системы характеристик для уравнений (1) следует

$$2\gamma + E^2 = 2\gamma(\rho_0) + E^2(\rho_0) = C_1(\rho_0) \geq 2$$

вдоль характеристики, стартующей из точки ρ_0 , поэтому само решение остается всегда ограниченным. Период $T(\rho_0)$ может быть вычислен как

$$\frac{T}{2} = \int_{P_-}^{P_+} \frac{dP}{\sqrt{C_1 - 2\gamma}}, \quad P_{\pm} = \pm \frac{\sqrt{C_1^2 - 4}}{2},$$

аргумент ρ_0 здесь для краткости опущен. Период стремится к 2π при $C_1 \rightarrow 2$, но с ростом C_1 увеличивается. В отличие от нерелятивистского случая, когда вдоль каждой характеристики период одинаков и равен 2π (см. [9]), в релятивистском случае период на каждой характеристике свой, поэтому решение не обязано быть периодическим.

Свойства решения существенно зависят от выполнения для начальных данных условия

$$C_1(\rho_0) \neq \text{const.} \quad (5)$$

Для физических приложений это условие можно считать выполненным (см., например, (4)).

Рассмотрим вопрос о локальном существовании решения во времени. Имеет место

Теорема 1. Пусть начальные данные (3) принадлежат классу $C^2(\mathbb{R})$ и (5) выполнено. Тогда если существует хотя бы одна точка ρ_0 , для которой выполняется неравенство

$$K_- (P'_0(\rho_0))^2 + 2 E'_0(\rho_0) - 1 \geq 0, \quad K_- = 8/C_1^3(\rho_0),$$

то производные решения задачи (1), (3) в течение конечного времени, не превышающего период колебания $T(\rho_0)$, обращаются в бесконечность.

Выполнение для всех ρ условия

$$(P'_0(\rho))^2 + 2 E'_0(\rho) - 1 < 0 \quad (6)$$

обеспечивает сохранение гладкости решения по крайней мере в течение одного периода $T(\rho)$ на каждой характеристике, т. е. до момента времени $t_* = \min_{\rho \in \mathbb{R}} T(\rho)$, $t_* \geq 2\pi$.

Кроме того, имеет место результат о несуществовании глобального во времени решения, а именно: справедлива

Теорема 2. При выполнении условия (5) у любого решения задачи Коши (1), (3), являющегося сколь угодно малым гладким отклонением от положения равновесия $P = E = 0$, производные решения в течение конечного времени обращаются в бесконечность.

Если условие (5) не выполнено, то в терминах начальных данных может быть получен критерий образования особенностей за конечное время и существуют решения типа бегущей с постоянной скоростью волны [20]. Такие решения могут быть сколь угодно малыми отклонениями от положения равновесия.

Следует отметить, что в силу соотношения (2) из (6) вытекает строгая положительность и отделенность от нуля функции электронной плотности на этапе существования:

$$N(\rho, \theta) > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, из приведенной информации следует, что решение задачи (1) с начальными условиями (3) полностью характеризуется поведением функций $P(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$ и их пространственных производных (градиентов).

1.3. Закон сохранения энергии. Дифференциальная форма записи закона сохранения полной энергии электрического поля и электронов плазмы в рассматриваемом случае имеет вид [12], [21]

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{E^2}{2} + N(\gamma - 1) \right] + \frac{\partial}{\partial \rho} [N V (\gamma - 1)] = 0.$$

После интегрирования этого соотношения по области $\rho \in (-\infty, \infty)$ при использовании однородных условий на бесконечности получим сохранение во времени величины

$$En(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{E^2(\rho, \theta)}{2} + N(\rho, \theta) (\gamma(\rho, \theta) - 1) \right] d\rho \equiv \text{const.} \quad (7)$$

1.4. О нечетном решении. Предположим, что начальные условия (3) нечетны относительно оси симметрии области, т.е. прямой $\rho = 0$. Покажем, что в этом случае решение системы (1) будет оставаться нечетным в течение всего времени его существования.

Рассмотрим решение $P(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$ задачи (1) с нечетными начальными условиями (3). Одновременно с ним рассмотрим пару функций $\hat{P}(\rho, \theta) = -P(\rho, \theta)$, $\hat{E}(\rho, \theta) = -E(\rho, \theta)$. При $\theta = 0$ в силу нечетности (3) справедливы равенства

$$\hat{P}(\rho, 0) = -P(-\rho, 0) = P(\rho, 0), \quad \hat{E}(\rho, 0) = -E(-\rho, 0) = E(\rho, 0).$$

Кроме того, функции $\hat{P}(\rho, \theta)$, $\hat{E}(\rho, \theta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \rho} + \hat{E} = 0, \quad \frac{\partial \hat{E}}{\partial \theta} + \hat{V} \frac{\partial \hat{E}}{\partial \rho} - \hat{V} = 0, \quad \hat{\gamma} = \sqrt{1 + \hat{P}^2}, \quad \hat{V} = \frac{\hat{P}}{\hat{\gamma}},$$

что несложно проверяется непосредственной подстановкой в (1).

В результате имеем, что пары функций $P(\rho, \theta)$, $E(\rho, \theta)$ и $\hat{P}(\rho, \theta)$, $\hat{E}(\rho, \theta)$ удовлетворяют одинаковым уравнениям и одинаковым начальным условиям. Отсюда в силу теоремы 1 о локальном существовании и единственности решения системы (1) с начальными условиями (3) (вторая часть утверждения) получаем совпадение функций в произвольный момент времени θ

$$\hat{P}(\rho, \theta) = P(\rho, \theta), \quad \hat{E}(\rho, \theta) = E(\rho, \theta).$$

Теперь, вспоминая определения функций $\hat{P}$, $\hat{E}$, получаем нечетность решения P , E для любого θ на этапе его существования, если начальные данные были нечетными.

Это свойство решения исходной задачи позволяет уменьшить область определения решения в два раза (было $\rho \in (-\infty, \infty)$, стало $\rho \in (0, \infty)$). При этом вследствие свойства нечетности на оси $\rho = 0$ симметрии формируются граничные условия

$$P(0, \theta) = E(0, \theta) = 0 \quad \forall \theta.$$

1.5. Формула для плотности на оси симметрии. В рассматриваемом частном случае нечетного решения системы (1) можно выписать явную формулу для электронной плотности на прямой $\rho = 0$, воспользовавшись тем, что $\gamma(0, \theta) \equiv 1$. Для модельных начальных условий (4) имеем (см. [22])

$$N(\rho = 0, \theta) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha(1 - \cos \theta)}, \quad \alpha = E'_0(\rho = 0) = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2. \quad (8)$$

Функция электронной плотности N традиционно является очень важной для описания процессов в холодной плазме, при этом наиболее сильно изменяющейся в сравнении с P и E . Формулы (7) и (8) обычно используются для анализа точности численных методов решения задачи (1), (3).

2. НЕЯВНАЯ СХЕМА МАК-КОРМАКА НА КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

2.1. Расчетные формулы. Приведем систему (1) к удобной в рассматриваемом случае недивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} + A(V) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho} = \mathbf{S}(\mathbf{U}),$$

где оператор $A(V)$ является линейным и диагональным: $A = V(\rho, \theta) I$, I — единичная 2×2 -матрица, $V = P/\sqrt{1+P^2}$, $\mathbf{U} = (P, E)^T$, $\mathbf{S} = (-E, V)^T$ — вектор-функции, рассматриваемые в полуплоскости $\{(\rho, \theta) : \theta \geq 0, \rho \in \mathbb{R}\}$.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянного параметра τ и переменных пространственных шагов сетки h_+ и h_- , ассоциированных с каждым узлом ρ_i так, что

$$\theta^n = n\tau, n \geq 0, \quad \rho_{i+1} = \rho_i + h_+, \quad \rho_{i-1} = \rho_i - h_-, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и обозначим зависимую переменную $\mathbf{U}(\rho, \theta)$ в узле сетки (ρ_i, θ^n) через $\mathbf{U}_i^n$. Напомним, что сетка предполагается кусочно-равномерной, т. е. величины $h_{\pm}$ принимают значения из очень ограниченного набора; типичной является ситуация с двумя различными шагами: мелким — h_1 и более крупным — h_2 .

Введем полезные обозначения для операторов разностей „вперед“ D^+ и „назад“ D^- :

$$D^+ \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i, \quad D^- \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_{i-1},$$

и запишем неявную схему Мак-Кормака [15] в традиционной форме „предиктор – корректор“:

1) предиктор с результатом $\mathbf{U}_i^p$ —

положим $V_{i+1/2}^n = (V_{i+1}^n + V_i^n)/2$ и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_i^n &= -\frac{\tau}{h_+} A(V_{i+1/2}^n) D^+ \mathbf{U}_i^n + \tau \mathbf{S}_i^n, \\ \left(I - \lambda \frac{\tau}{h_+} A(|V_{i+1/2}^n|) D^+ \right) \delta \mathbf{U}_i^n &= \Delta \mathbf{U}_i^n, \\ \mathbf{U}_i^p &= \mathbf{U}_i^n + \delta \mathbf{U}_i^n, \quad V_i^p = P_i^p / \left[1 + (P_i^p)^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \tag{9}$$

2) корректор с результатом $\mathbf{U}_i^c$ —

положим $V_{i-1/2}^p = (V_i^p + V_{i-1}^p)/2$ и последовательно вычислим

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{U}_i^p &= -\frac{\tau}{h_-} A(V_{i-1/2}^p) D^- \mathbf{U}_i^p + \tau \mathbf{S}_i^p, \\ \left(I + \lambda \frac{\tau}{h_-} A(|V_{i-1/2}^p|) D^- \right) \delta \mathbf{U}_i^p &= \Delta \mathbf{U}_i^p, \\ \mathbf{U}_i^c &= \mathbf{U}_i^p + \delta \mathbf{U}_i^p. \end{aligned} \tag{10}$$

В формулах (9), (10) верхний индекс p (или c) обозначает шаг предиктор (или корректор) или n — временной слой θ^n , λ — постоянный параметр схемы, который будет определен ниже.

Окончательные формулы, формирующие решение на следующем временном слое с номером $(n+1)$, имеют вид

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = [\mathbf{U}_i^p + \mathbf{U}_i^c]/2, \quad V_i^{n+1} = P_i^{n+1} / \left[1 + (P_i^{n+1})^2 \right]^{1/2}. \tag{11}$$

Для вычисления приближенного значения электронной плотности $N(\rho, \theta)$, определяемой точно соотношением (2), используется простейшая формула второго порядка точности [23]

$$N_i^n = 1 - \left[\frac{h_-}{h_+(h_- + h_+)} E_{i+1}^n + \frac{h_+ - h_-}{h_- h_+} E_i^n - \frac{h_+}{h_-(h_- + h_+)} E_{i-1}^n \right].$$

2.2. Свойства схемы для линейного скалярного уравнения на равномерной сетке. Следуя оригинальной идее [15], напомним основные свойства неявной схемы Мак-Кормака, построенной на равномерной сетке с постоянными шагами τ и h для простейшего уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const.} \quad (12)$$

Схема (9)–(11) пригодна для (12), если взять скалярную функцию u вместо векторной $\mathbf{U}$, постоянную a вместо оператора $A(V)$ и положить $\mathbf{S}(\mathbf{U}) \equiv 0$.

Отметим, что если положить $\lambda = 0$, то неявная схема трансформируется в обычную явную схему Мак-Кормака с условием устойчивости $\omega = |a|\tau/h \leq 1$ (условие Куранта) и первым дифференциальным приближением [24] вида

$$u_t + au_x = \frac{ah^2}{6} (\omega^2 - 1) u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3).$$

Если же выбирать λ из условия

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \max \left\{ |a| - \frac{h}{\tau}, 0 \right\},$$

то неявная схема (при $\lambda > 0$) будет безусловно устойчивой, а в правую часть первого дифференциального приближения добавится слагаемое [25]

$$- \tau^2 a \lambda \left(\lambda + \frac{h}{\tau} \right) u_{xxx}.$$

Иными словами, на гладких решениях погрешность аппроксимации неявной схемы асимптотически не хуже, чем погрешность явной схемы.

Обратим также внимание на особенность схемы, связанной с реализацией „неявности“. Например, на этапе „предиктор“ соотношение

$$\left(1 - \lambda \frac{\tau}{h} |a| D^+ \right) \delta v_i^p = \Delta v_i^n$$

приводится к виду

$$\left(1 + \lambda \frac{\tau}{h} |a| \right) \delta v_i^p = \Delta v_i^n + \lambda \frac{\tau}{h} |a| \delta v_{i+1}^p$$

и может быть устойчиво реализовано последовательными вычислениями в сторону уменьшения индекса: $i = \dots, K+1, K, K-1, \dots$.

В свою очередь, на этапе „корректор“ соотношение

$$\left(1 + \lambda \frac{\tau}{h} |a| D^- \right) \delta v_i^c = \Delta v_i^p$$

приводится к виду

$$\left(1 + \lambda \frac{\tau}{h} |a| \right) \delta v_i^c = \Delta v_i^p + \lambda \frac{\tau}{h} |a| \delta v_{i-1}^c$$

и может быть устойчиво реализовано последовательными вычислениями в сторону увеличения индекса: $i = \dots, K-1, K, K+1, \dots$.

Вышесказанное иллюстрирует факт, что замена явной схемы на неявную в данном случае требует увеличения вычислительной работы в пределах 10%, причем неявная процедура носит безытерационный характер, что серьезно увеличивает ее привлекательность.

Сделаем замечание о переключении пространственных шагов в неявной схеме при использовании КРС. С формальной точки зрения, в узле ρ_i , который окружают неравные шаги ($h_- \neq h_+$), асимптотический порядок аппроксимации по пространству ухудшается с второго до первого. Однако в окрестности таких узлов, фактически ограничивающих „пограничный слой“, т.е. области значимого изменения решения, как само решение, так и его производные уже достаточно малы, поэтому реальные погрешности аппроксимации (а не асимптотическая оценка!) не в состоянии ухудшить качество получаемого приближенного решения. Более того, при построении КРС локации подобных узлов выбираются изначально так, чтобы погрешности решения в их окрестности были пренебрежимо малы по сравнению с погрешностями в „пограничном слое“.

3. ПРОЦЕДУРА ОПТИМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

3.1. Сценарий процесса. Положим для определенности и преемственности с результатами [26] величины a_* и ρ_* , равными 3.105 и 4.5 соответственно. В результате в формуле (8) получим $\alpha = 0.4761$. Обратим внимание, что условия (4) нечетные и удовлетворяют теореме 1 о локальном существовании, поэтому электронная плотность является четной функцией и при $\rho = 0$ колеблется в диапазоне $[0.52, 10.96]$ (границы указаны с двумя верными знаками после десятичной точки), т.е. изменяется на периоде примерно в двадцать раз.

Краткое изложение эффекта опрокидывания многопериодных колебаний в рамках релятивистской гидродинамической модели холодной плазмы состоит в следующем. Начальное пространственное распределение электронной плотности N , имеющее один глобальный минимум в качестве следствия формул (2) и (4), приводит к избытку положительного заряда в начале координат (при $\rho = 0$). По этой причине начинается движение электронов в направлении центра области, что через половину периода колебаний (π безразмерных единиц времени) порождает распределение плотности с глобальным максимумом также при $\rho = 0$. В свою очередь, сформировавшийся избыток электронов в центре области приводит к их движению в обратном направлении и примерно через половину периода пространственное распределение электронной плотности приближается к исходному.

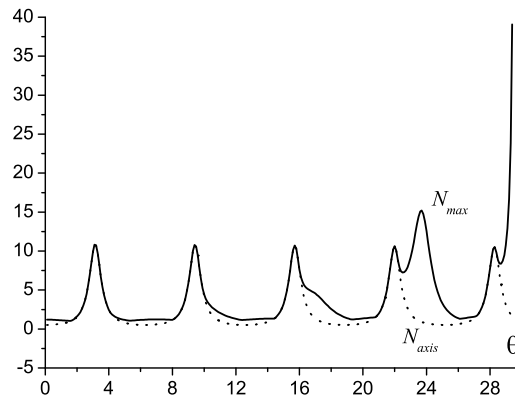


Рис. 1. Динамика плотности плазмы: сплошная линия N_{max} — максимум по области, пунктирная линия N_{axis} — ось симметрии

Если бы релятивистские плазменные колебания сохраняли во времени свою пространственную форму, то описанные распределения плотности электронов регулярно меняли бы друг друга через каждую половину периода, порождая в центре области строго периодическую последовательность экстремумов с неизменными амплитудами. Однако периоды вдоль характеристик различны, поэтому с течением времени происходит постепенное формирование абсолютных максимумов плотности, расположенных вне оси и сравнимых по величине с осевыми. После того, как внеосевые максимумы становятся заметными, наблюдается их резкое возрастание по величине и достаточно быстро (часто через период — другой) на их месте возникает сингулярность электронной плотности. Напомним, что бесконечное значение плотности в эйлеровых переменных соответствует пересечению траекторий частиц (характеристик) в лагранжевых переменных. Численному моделированию этого процесса посвящена монография [8], физическое обоснование представлено в [27].

Хорошей иллюстрацией к этому описанию являются рис. 1 и 2. На рис. 1 пунктиром изображено для электронной плотности изменение во времени в начале координат N_{axis} , а сплошной линией — динамика максимального по области значения N_{max} . На рис. 2 представлены пространственные распределения электронной плотности в моменты времени $\theta = \pi$ и $\theta = 23.6$, где второй из моментов соответствует формированию пары внеосевых максимумов (N — четная функция!), локальных во времени и глобальных в пространстве. Обратим внимание, что пространственные координаты внеосевых максимумов заранее неизвестны. Аналитическая теория в слабо-нелинейном приближении позволяет лишь приблизительно оценить координаты их локализации как $\rho_{br} = \pm \rho_*/(2\sqrt{3}) \approx \pm 0.3\rho_*$ [27], однако при численном моделировании колебаний даже с большими амплитудами выход этих координат за границы области $|\rho_{br}| \leq \rho_*$ никогда не наблюдался.

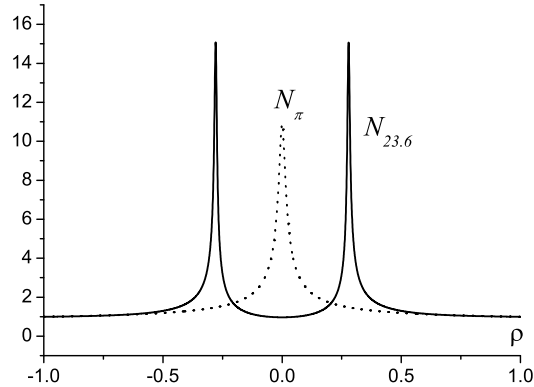


Рис. 2. Пространственные распределения плотности плазмы: сплошная линия $N_{23.6}$ — момент времени $\theta = 23.6$, пунктирная линия N_{π} — $\theta = \pi$

3.2. Построение КРС. Заметим, что на больших расстояниях от прямой $\rho = 0$ в силу начального условия (4) плазменные колебания не возбуждаются. Поэтому будем считать, что выполнены следующие условия:

$$P(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0, \quad E(\rho \rightarrow \pm\infty, \theta) = 0.$$

Однако в целях численного моделирования плазменных колебаний расчетную область необходимо ограничить; определим ее по переменной ρ как отрезок $[-d, d]$, на концах которого следует задать искусственные граничные условия. Обсуждению их построения посвящен раздел 3.6 в [8]; здесь же мы ограничимся „обрезанием“ бесконечной области с помощью однородных граничных условий первого рода:

$$P(\pm d, \theta) = E(\pm d, \theta) = 0.$$

Главной причиной такого выбора является необходимость расщепления граничных условий на вычислительных этапах предиктор – корректор используемой неявной схемы, что представляет собой самостоятельную проблему. В случае процедуры „обрезания“ трудности отсутствуют, так как используются однородные условия как для самих неизвестных функций $\mathbf{U}_i^{n+1}$, так и для их вариаций $\delta \mathbf{U}_i^p$, $\delta \mathbf{U}_i^c$ на обоих этапах.

Конечно, параметр d следует выбирать достаточно большим. В силу экспоненциального затухания функции $E_0(\rho)$, достаточно положить $d = 4.5\rho_*$. В этом случае имеем $\exp^2\{-d^2/\rho_*^2\} \approx 2.5768 \cdot 10^{-18}$. Это означает, что при вычислениях с двойной точностью величина скачка начальной функции E_0 в точках $\rho = \pm d$ соизмерима с машинной точностью, т.е. с обычной погрешностью округления данных. Иными словами, при численном моделировании колебаний эффект обрезания начальных условий не приведет к градиентной катастрофе и совершенно не будет замечен в расчетах, что полностью соответствует понятию „искусственной границы“. Учитывая сказанное, параметр d , характеризующий искусственную границу, положим $d = 4.5\rho_*$.

Другим важным моментом при построении КРС является выбор подобласти, где требуется измельчение сетки. Область локализации внеосевых максимумов, т.е. $|\rho_{br}| \leq \rho_*$, является хорошим ориентиром. Однако требуется учесть дополнительные обстоятельства. Рассмотрим с этой целью рис. 3, на котором представлены пространственные распределения функций P и E в момент опрокидывания колебаний ($\theta_{br} \approx 29.5$). В силу нечетности обеих функций на рисунке для большей наглядности изображена только область $\rho \geq 0$. Графики наглядно иллюстрируют традиционные атрибуты эффекта опрокидывания: разрыв (скачок значений) у функции электрического поля E и разрыв у производной функции импульса P ; координата разрыва ρ_{br} в данном случае примерно равна 0.135. В отличие от электронной плотности функции, характеризующие импульс и электрическое поле, изменяются в пространстве не так резко, однако область их значимого изменения более „размазана“. Вполне приемлемой подобластью, в которой необходимо детально отслеживать эти функции, является отрезок $[-b, b]$, $b = 2\rho_*$. Отметим, что при построении различных искусственных граничных условий для плоских релятивистских колебаний (см. раздел 3.6 в [8]), был сделан такой же вывод о размерах подобласти, в которой происходят значимые для моделирования изменения функций.

Таким образом, зафиксируем ограниченную область для численного моделирования как $[-d, d]$, $d = 4.5\rho_*$, а также подобласть $[-b, b]$, $b = 2\rho_*$, в которой следует выбирать достаточно подробный (мелкий) постоянный пространственный шаг h_1 . Вне этой подобласти постоянный пространственный шаг h_2 можно выбирать значительно большим, так как это не повлечет за собой влияния на решения по причине малой погрешности аппроксимации. Кроме того, с целью преодоления технических сложностей будем считать сеточные аналоги подобластей с различными шагами, согласованными между собой, т.е. точки $\rho = \pm b$ должны являться узлами обеих сеток: как крупной, так и мелкой. Иными словами, именно эти узлы (и только они!) являются точками переключения, т.е. только для них справедливо $h_- \neq h_+$.

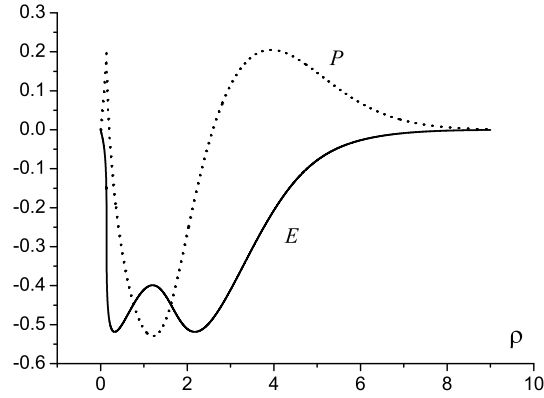


Рис. 3. Пространственные распределения функций в момент опрокидывания колебаний: сплошная линия — электрическое поле E , пунктирная линия — импульс P

На практике удобно выбрать сначала равномерную сетку с шагом h_1 на отрезке $[-b, b]$, чтобы граничные точки были ее узлами; затем на отрезке $[b, d]$ также построить равномерную сетку с шагом h_2 , чтобы граничные точки также были ее узлами, и, наконец, построенную на $[b, d]$ сетку симметрично отобразить на отрезок $[-d, -b]$.

3.3. Конкретный вычислительный пример. Проведем сначала расчеты по явной схеме Мак-Кормака, построенной на равномерной сетке во всей расчетной области. Определим характерный шаг сетки h_0 так, чтобы относительная погрешность осевого максимума электронной плотности в момент $\theta = \pi$ не превышала 1%. Эта информация является достаточно надежной в плане аппроксимации, так как плотность N (ср. рис. 2 и рис. 3) является наименее гладкой из наблюдаемых функций. Непосредственными экспериментами с явной схемой (при $\lambda = 0$) получим $h_0 = 0.25 \cdot 10^{-3}$, что на равномерной сетке во всей области $[-d, d]$, $d = 20.25$ порождает примерно 162000 узлов. Учитывая, что максимальное по модулю значение скорости электронов $|V|_{\max}$ не превышало величины 0.6, то выполнение условия Куранта для устойчивости приводило к величине шага по времени $\tau_0 = h_0 = 0.25 \cdot 10^{-3}$. Попытка увеличить шаг по времени в два раза очень быстро ($\theta \approx 0.3$) приводила к разрушению сеточного решения по причине неустойчивости явной схемы.

С целью получения на КРС сеточного решения, близкого к полученному на полностью равномерной сетке, выберем в области $[-b, b]$, $b = 9$, равномерную сетку с таким же шагом $h_1 = h_0 = 0.25 \cdot 10^{-3}$, что дает в подобласти примерно 72000 узлов. В оставшейся части области, т. е. в $[-d, -b] \cup [b, d]$, введем сетку с шагом $h_2 = 10h_1 = 2.5 \cdot 10^{-3}$, что дополнительно порождает 9000 узлов. Итоговое (суммарное) количество узлов КРС примерно в два раза меньше, чем количество узлов полностью равномерной сетки с шагом h_0 . Теперь воспользуемся абсолютной устойчивостью неявной разностной схемы ($\lambda = 1/2$) и проведем расчеты с $\tau = 10h_1$. Полученные данные как о координатах точек опрокидывания, так и о самих вычисляемых функциях находятся в пределах теоретической погрешности $O(\tau_1^2 + h_1^2)$ по отношению к данным, полученным с помощью равномерной сетки и явной схемы. В частности, относительная погрешность осевого максимума в момент $\theta = \pi$ не

превышала, как и ранее, 1%, что является замечательным результатом при десятикратном увеличении величины τ_0 . Данный вычислительный пример иллюстрирует сокращение объема вычислительной работы примерно в 20 раз без заметной потери точности.

Обратим внимание, что полностью равномерная сетка с крупным шагом $h_0 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ при использовании явной схемы приводит к значительно большим погрешностям (по порядку!). Например, величина абсолютного максимума электронной плотности при $\theta = 23.6$ отличается на 22%, а координата опрокидывания ρ_{br} — на 26%.

Подчеркнем, что подобное сокращение достигается за счет реализации двух идей одновременно: использование КРС и неявной схемы. При этом приведенный пример лишь иллюстрирует механизм оптимизации вычислений, а не преследует задачу получения максимального эффекта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе предлагается эффективный способ оптимизации вычислений при моделировании эффекта опрокидывания релятивистских колебаний холодной плазмы. Способ носит комбинированный характер: сначала с использованием кусочно-равномерной сетки строится разностная схема второго порядка точности типа Мак-Кормака, а затем для ослабления условия устойчивости применяется неявная версия схемы, которая даже в нелинейном случае допускает безытерационную реализацию. При построении КРС требуется предварительная работа как по определению области численного моделирования в целом, так и для определения подобласти, в которой применяется измельченная сетка. Указанный анализ базируется на аналитических свойствах решения дифференциальной задачи. На основании проведенных расчетов можно сделать вывод о потенциальном сокращении объема вычислений в десятки раз без заметной потери точности.

Результаты работы могут быть обобщены на постановки гиперболических задач большей размерности и учет дополнительных физических факторов в модели плазмы (вязкость, соударения, нагрев и пр.).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. *Основы электродинамики плазмы* (Высш. шк., М., 1978).
- [2] Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. *Волны в магнитоактивной плазме* (Наука, М., 1975).
- [3] Силин В.П. *Введение в кинетическую теорию газов* (Наука, М., 1971).
- [4] Силин В.П., Рухадзе А.А. *Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред* (Книжный дом „Либроком“, М., 2012).
- [5] Esarey E., Schroeder C.B., and Leemans W.P. *Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators*, Rev. Mod. Phys. **81** (3), 1229–1285 (2009).
- [6] Bulanov S.V., Esirkepov T.Zh., Hayashi Y. et al. *On some theoretical problems of laser wake-field accelerators*, J. Plasma Phys. **82** (3), 905820308 (2016).
- [7] Горбунов Л.М. *Зачем нужны сверхмощные лазерные импульсы?*, Природа (4), 11–20 (2007).
- [8] Чижонков Е.В. *Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме* (Физматлит, М., 2018).
- [9] Розанова О.С., Чижонков Е.В. *О существовании глобального решения одной гиперболической задачи*, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **492** (1), 97–100 (2020).
- [10] Rozanova O.S., Chizhonkov E.V. *On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma*, Z. angew. Math. Phys. **72** (13), 1–15 (2021).
- [11] Dawson J.M. *Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma*, Phys. Review **113** (2), 383–387 (1959).
- [12] Чижонков Е.В. *О схемах второго порядка точности для моделирования плазменных колебаний*, Вычисл. методы и программирование **21** (1), 115–128 (2020).

- [13] Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*, 2-е изд. (Физматлит, М., 2012).
- [14] Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений* (УрО РАН, Екатеринбург, 1992).
- [15] MacCormack R.W. *A Numerical Method for Solving the Equations of Compressible Viscous Flow*, AIAA J. **20** (9), 1275–1281 (1982).
- [16] MacCormack R.W. *The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering*, J. Spacecr. Rockets **40** (5), 757–763 (2003).
- [17] Davidson R.C. *Methods in nonlinear plasma theory* (Academic Press, New York, 1972).
- [18] Sheppard C.J.R. *Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review*, Appl. Optics **52** (4), 538–545 (2013).
- [19] Dafermos C.M. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, 4th edition (Springer, Berlin-Heidelberg, 2016).
- [20] Ахизер А.И., Половин Р.В. *К теории волновых движений электронной плазмы*, Ж. exper. и теор. физ. **30** (5), 915–928 (1956).
- [21] Фролов А.А., Чижонков Е.В. *О применении закона сохранения энергии в модели холодной плазмы*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **60** (3), 503–519 (2020).
- [22] Чижонков Е.В. *О схеме Рунге-Кутты третьего порядка точности для моделирования плазменных колебаний*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **63** (5), 864–878 (2023).
- [23] Бахвалов Н.С., Корнев А.А., Чижонков Е.В. *Численные методы. Решения задач и упражнения*, 2-е изд. (Лаборатория знаний, М., 2016).
- [24] Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. *Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике* (Наука, Новосибирск, 1985).
- [25] Fürst J., Furmánek P. *An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculations*, Computers & Fluids **46** (1), 231–236 (2011).
- [26] Фролов А.А., Чижонков Е.В. *О релятивистском опрокидывании электронных колебаний в плазменном слое*, Вычисл. методы и программирование **15** (3), 537–548 (2014).
- [27] Frolov A.A., Chizhonkov E.V. *On the criteria for the breaking of Langmuir oscillations in a plasma*, Phys. Scripta **95** (6), 06 5604 (2020).

Евгений Владимирович Чижонков

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

E.V. Chizhonkov

Optimization of calculations in modeling the breaking of plasma oscillations

Abstract. The proposed method of optimization of calculations is of a combined nature. First, using a piecewise uniform grid, a difference scheme of the second order of accuracy of the McCormack type is constructed, and then — to weaken the stability condition — an implicit version of the scheme is used, which even in the nonlinear case allows an iteration-free implementation. When constructing a grid, a preliminary study is required, which is based on the analytical properties of the solution of the differential problem. Based on the calculations carried out, it can be concluded that the potential reduction in the amount of calculations is dozens of times without a noticeable loss of accuracy.

Keywords: numerical modeling, relativistic oscillations, cold plasma, breaking effect, piecewise uniform grid, implicit McCormack scheme.

Evgeniy Vladimirovich Chizhonkov

Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, Moscow, 119991 Russia,

e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su