

А.С. УСТЮЖАНИНОВА

РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ МОДЕЛИ БИНГАМА

Аннотация. В работе на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий изучается предельное поведение решений периодической по пространственным переменным задачи для модели Бингама. Для рассматриваемой задачи устанавливаются необходимые экспоненциальные оценки, определяется пространство траекторий и доказывается существование минимального равномерного траекторного и равномерного глобального аттракторов.

Ключевые слова: модель Бингама, равномерный аттрактор, минимальный траекторный аттрактор, пространство траекторий, экспоненциальная оценка, слабое решение.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-65-80

ВВЕДЕНИЕ

Исследование задач неньютоновой гидродинамики является важной задачей в математике. Это обусловлено широким спектром применений этих моделей во многих областях, таких как нефтегазовая промышленность, фармацевтика, биомедицина и многих других. Модели неньютоновой гидродинамики описывают поведение многих реально на практике встречающихся жидкостей, таких как полимерные растворы, сплавы, смолы, эмульсии, суспензии и др.

В работе рассматривается одна из известных моделей неньютоновой гидродинамики, а именно модель движения жидкости Бингама. Она описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (x, t) \in Q_T = \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu_1 \mathcal{E}(v) + \mu_2 \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad (x, t) \in Q_T; \\ |\sigma| \leq \mu_2 & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \quad (x, t) \in Q_T. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\Omega = \prod_{i=1}^3 (0, l_i) \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$; $v(x, t)$ — вектор скорости частицы жидкости, $p(x, t)$ — давление в жидкости, $f(x, t)$ — плотность внешних сил (все они зависят от точки $x \in \Omega$ и момента времени t), $\operatorname{Div} \sigma$ — вектор, координаты которого являются дивергенцией столбцов девиатора тензора напряжений σ . Константа $\mu_1 > 0$ характеризует вязкость жидкости,

Поступила в редакцию 26.09.2023, после доработки 26.09.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00103).

$\mu_2 > 0$ — константа, описывающая порог текучести жидкости, а $\mathcal{E}(v) = (\nabla v + (\nabla v)^T)/2$ — тензор скоростей деформаций.

Для системы (1)–(2) рассмотрим периодическую по пространственным переменным задачу с начальным условием:

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Модель движения среды Бингама успешно применяется при описании движения вязкопластичных сред, например, различных гелей, суспензий, красок и т.д. Она достаточно подробно исследована с точки зрения разрешимости начально-краевых задач [1]–[3]. Для модели Бингама было также доказано существование оптимального решения задачи управления с обратной связью [4], а также изучено предельное поведение решений. А именно, в двумерном случае Г.А. Серёгиным в работе [5] доказано существование аттракторов. В работах [6], [7] на основе теории аттракторов неинвариантных пространств траекторий установлено существование траекторного и глобального аттракторов в двух и трехмерных случаях. Помимо этого в статье [8] доказано существование аттракторов аппроксимаций для рассматриваемой модели и их сходимости к аттракторам исходной модели в смысле полуотклонения в подходящих пространствах при стремлении параметра аппроксимации к нулю. В работе [9] установлено существование pullback-аттракторов для модели Бингама.

В данной работе устанавливается существование минимального равномерного траекторного и равномерного глобального аттракторов неавтономной модели Бингама, т.е. подразумевается, что правая часть системы (1)–(3) зависит от времени, а не постоянна как обычно предполагается в теории аттракторов. Доказательство проводится на основе теории траекторных аттракторов неинвариантных пространств траекторий [10], [11].

Отметим, что изначально теория траекторных аттракторов была предложена М.И. Вишиком и В.В. Чепыжовым в работах [12], [13]. Независимо от них Дж. Селл в своей статье [14] также предложил вариант этой теории. В дальнейшем теория траекторных аттракторов получила развитие в том числе в работах В.Г. Звягина и Д.А. Воротникова, которыми была создана теория траекторных аттракторов неинвариантных пространств траекторий [10]. Это позволило применить разработанную теорию к задачам невязкой гидродинамики [7], [15]–[19]. Принцип, лежащий в основе этого нового подхода, заключается в рассмотрении вместо полугруппы эволюционных операторов некоторого множества функций времени, принимающих значения в фазовом пространстве. Такое множество функций называют пространством траекторий, а отдельные принадлежащие ему функции — траекториями. Согласно своему смыслу, каждая траектория представляет собой некий сценарий развития системы. В самом общем случае на пространство траекторий накладываются только условия непустоты и принадлежности определенному классу функций, поэтому использования пространства траекторий является очень гибким способом описания динамики: например, из некоторой точки фазового пространства могут выходить несколько траекторий.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Для удобства приведем используемые в работе определения и утверждения.

1.1. Основные определения теории траекторных аттракторов. Подробнее приводимые утверждения могут быть найдены в [10], [20].

В дальнейшем через E , E_0 будут обозначаться два банаховых пространства, причем будем считать, что пространство E рефлексивно и непрерывно вложено в пространство E_0 . Обозначим через $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ пространство непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}_+$ и

принимающих значения в E_0 . Далее $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ всегда будем рассматривать как метрическое пространство. Отметим, что $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ полно и имеет место следующий результат.

Лемма 1. *Последовательность $\{u_m\} \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ сходится к функции $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0)$ тогда и только тогда, когда эта последовательность сходится к u равномерно на каждом отрезке, содержащемся в $\mathbb{R}_+$.*

Пусть Π_M ($M \geq 0$) — оператор сужения функций, заданных на $\mathbb{R}_+$, на отрезок $[0, M]$. Из леммы 1 следует, что оператор Π_M непрерывно отображает $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ в $C([0, M]; E_0)$.

Лемма 2. *Для того чтобы множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0)$ было относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $M > 0$ множество $\Pi_M P$ было относительно компактно в $C([0, M], E_0)$.*

Через $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ обозначим пространство функций u , определенных почти всюду на $\mathbb{R}_+$ и принимающих значения в E , для которых найдется число α_u такое, что $\|u(t)\|_E \leq \alpha_u$ при почти всех t (такие функции называются существенно ограниченными). Норма в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ определяется формулой $\|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \operatorname{vrai} \max_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E$. Здесь $\operatorname{vrai} \max_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E$ — это нижняя грань множества $\left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}_+ \setminus M} \|u(t)\|_E \right\}$, где M пробегает все подмножества $\mathbb{R}_+$ нулевой меры. Для всякой функции $u \in L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ при почти всех $t \geq 0$ имеет место неравенство $\|u(t)\|_E \leq \|u\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; E)}$. Пространство $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, снабженное указанной нормой, является банаховым (см. [21], теорема 1.12).

Определение 1. Пусть J — конечный или бесконечный интервал вещественной оси и $\bar{J}$ — его замыкание. Далее, пусть Y — банахово пространство. Функция $u : \bar{J} \rightarrow Y$ называется слабо непрерывной если из $t_n \rightarrow t$, $t_n \in \bar{J}$, следует, что $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$ слабо в Y . Множество слабо непрерывных функций $u : \bar{J} \rightarrow Y$ мы будем обозначать $C_w(\bar{J}, Y)$.

Также нам потребуется одна известная теорема (см., например, [22], с. 211).

Теорема 1. *Пусть E и E_0 — два банаховых пространства таких, что $E \subset E_0$, причем вложение непрерывно. Если функция v принадлежит $L_\infty(0, T; E)$ и непрерывна как функция со значениями в E_0 , то v слабо непрерывна как функция со значениями в E , т. е. $v \in C_w([0, T], E)$.*

Из этой теоремы получаем, что функции, принадлежащие классу $C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, слабо непрерывны со значениями в E (и потому их значения принадлежат пространству E при всех $t \in \mathbb{R}_+$); они ограничены со значениями в E , и для $u \in C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ верно равенство

$$\|u\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)} = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|u(t)\|_E.$$

Рассмотрим операторы сдвигов $T(h)$ ($h \geq 0$), каждый из которых функции f ставит в соответствие такую функцию $T(h)f$, что $T(h)f(t) = f(t + h)$. Отметим, что имеет место тождество $T(h_1)T(h_2) = T(h_1 + h_2)$, а также что $T(0)$ — тождественный оператор.

1.2. Основные определения теории равномерных аттракторов. Переходим к теории равномерных аттракторов, подробнее см. в работе [20].

Рассмотрим абстрактное неавтономное эволюционное дифференциальное уравнение:

$$u'(t) = A_{\psi(t)}(u(t)), \quad u(t) \in E. \quad (4)$$

Здесь ψ — некоторый функциональный параметр. Мы будем называть его символом уравнения (4) и будем предполагать, что ψ принадлежит некоторому множеству параметров

Σ , которое называется пространством символов. Отметим, что обычно Σ — это подмножество некоторого пространства функций, зависящих от времени. Часто в приложениях Σ состоит из всех зависящих от времени коэффициентов и правых частей рассматриваемого уравнения.

Будем предполагать, что для каждого $\psi \in \Sigma$ определено непустое множество

$$\mathcal{H}_\psi^+ \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$$

решений (сильных, слабых и других) уравнения (4), определенных на полуоси. Множества $\mathcal{H}_\psi^+$ будем называть траекторными пространствами, а их элементы траекториями. Рассмотрим объединенное траекторное пространство

$$\mathcal{H}_\Sigma^+ = \bigcup_{\psi \in \Sigma} \mathcal{H}_\psi^+.$$

Отметим, что так как каждое $\mathcal{H}_\psi^+$ непусто, то и $\mathcal{H}_\Sigma^+$ непусто.

Определение 2. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерно (относительно $\psi \in \Sigma$) притягивающим (для уравнения (4)), если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, выполняется условие

$$\sup_{u \in B} \inf_{v \in P} \|T(h)u - v\|_{C(\mathbb{R}_+; E_0)} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow \infty.$$

Определение 3. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерно поглощающим, если для всякого множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$, ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$, существует такое $h \geq 0$, что при всех $t \geq h$ имеет место включение $T(t)B \subset P$.

Непосредственно из определения следует, что любое равномерно поглощающее множество является равномерно притягивающим.

Определение 4. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным траекторным полуаттрактором (для уравнения (4)), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) множество P компактно в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$;
- (ii) имеет место включение $T(t)P \subset P$ для всех $t \geq 0$;
- (iii) множество P является равномерно притягивающим.

Определение 5. Множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; E_0) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ называется равномерным (относительно $\psi \in \Sigma$) траекторным аттрактором (для уравнения (4)), если оно удовлетворяет условиям (i), (iii) определения 4, а также условию

- (ii') имеет место равенство $T(t)P = P$ для всех $t \geq 0$.

Определение 6. Минимальным траекторным аттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}_\Sigma^+$ называется наименьший по включению траекторный аттрактор.

Определение 7. Множество $\mathcal{A} \subset E$ называется равномерным (относительно $\psi \in \Sigma$) глобальным аттрактором (в E_0) для уравнения (4), если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) множество $\mathcal{A}$ компактно в E_0 и ограничено в E ;
- (ii) для всякого ограниченного в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ множества $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ выполняется условие притягивания

$$\sup_{u \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|u(t) - y\|_{E_0} \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty;$$

- (iii) множество $\mathcal{A}$ является наименьшим по включению, удовлетворяющим условиям (i) и (ii).

Замечание 1. Если семейство траекторных пространств имеет минимальный траекторный аттрактор или глобальный аттрактор, то он единственный.

Замечание 2. Пространство символов Σ , вообще говоря, может состоять даже из одного элемента ψ_* , соответствующего рассматриваемому уравнению. Однако в приложениях теории, чтобы оправдать слово "равномерный", обычно предполагают, что $\Sigma \supset \Sigma_0$, где $\Sigma_0 = \{T(t)\psi_*, t \geq 0\}$.

Замечание 3. Минимальный равномерный траекторный аттрактор и равномерный глобальный аттрактор зависят от выбора множества Σ . Для двух пространств символов $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ имеем соответствующие минимальные равномерные траекторные $\mathcal{U}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{U}_{\Sigma_2}$ и равномерные глобальные $\mathcal{A}_{\Sigma_1} \subset \mathcal{A}_{\Sigma_2}$ аттракторы. Более того, при расширении пространства символов возможны случаи, когда равномерных аттракторов не существует. Подробный пример описан в ([10], замечание 4.3.3).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть существует равномерный траекторный полуаттрактор P для уравнения (4). Тогда существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для уравнения (4).

Теорема 3. Пусть существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ для уравнения (4). Тогда существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ для уравнения (4).

Приведем еще одно утверждение [10], которое нам понадобится при доказательстве основного результата.

Лемма 3. Пусть P — относительно компактное в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченное в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ притягивающее (соответственно поглощающее) множество для уравнения (4). Тогда его замыкание $\bar{P}$ в пространстве $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ является компактным в $C(\mathbb{R}_+; E_0)$ и ограниченным в $L_\infty(\mathbb{R}_+; E)$ притягивающим (соответственно поглощающим) множеством для уравнения (4). Если, кроме того, имеет место включение $T(t)P \subset P$ при всех $t \geq 0$, то $\bar{P}$ — полуаттрактор.

1.3. Функциональные пространства. Через $C_{per}^\infty(\Omega)^3$ обозначим пространство периодических вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^3$ и с периодами l_i , $i = 1, 2, 3$. Введем множество

$$\Phi = \left\{ \phi \in C_{per}^\infty(\Omega)^3 : \int_{\Omega} \phi \, dx = 0, \operatorname{div} \phi = 0 \right\}.$$

Через V^1, V^2, V^0 обозначим пополнение Φ по нормам $W_2^1(\Omega)^3, W_2^2(\Omega)^3, L_2(\Omega)^3$ соответственно. Через $(\cdot, \cdot)$ мы будем обозначать скалярное произведение в $L_2(\Omega)^3$, через V^{-1} — сопряженное к V^1 пространство. Пусть $D(A) = V^2$. Рассмотрим на $D(A)$ оператор A , определенный по формуле $Au = -\pi \Delta u$. Тогда A — монотонный линейный самосопряженный оператор, и для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ можно определить A^α с областью определения $D(A^\alpha) \subset V^0$. Обозначим $V^\alpha = D(A^{\alpha/2})$. Оператор A является изоморфизмом из $V^{\alpha+2}$ в V^α . Подробное определение пространств, а также их свойства могут быть найдены в [23].

Для двух матриц $C = (c_{ij})$, $B = (b_{ij})$ обозначим $C : B = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}b_{ij}$.

Для определения слабого решения на отрезке введем следующие пространства:

$$\begin{aligned} W[0, T] &= \{v : v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), v' \in L_2(0, T; V^{-2})\}; \\ W_1[0, T] &= \{v : v \in L_2(0, T; V^4), v' \in L_2(0, T; V^{-2})\} \end{aligned}$$

с соответствующими нормами

$$\begin{aligned} \|v\|_{W[0, T]} &= \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^{-2})}; \\ \|v\|_{W_1[0, T]} &= \|v\|_{L_2(0, T; V^4)} + \|v'\|_{L_2(0, T; V^{-2})}. \end{aligned}$$

В работе используется следующая теорема о компактности вложения [24]:

Теорема 4. Пусть $X \subset E \subset Y$ — банаховы пространства, вложение $X \subset E$ вполне непрерывно, а вложение $E \subset Y$ непрерывно. Пусть $F \subset L_p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq \infty$, и для любого $f \in F$ его обобщенная производная в пространстве $D'(0, T; Y)$ принадлежит $L_r(0, T; Y)$, $1 \leq r \leq \infty$. Далее, пусть множество F ограничено в $L_p(0, T; X)$, а $\{f' : f \in F\}$ ограничено в $L_r(0, T; Y)$. Тогда при $p < \infty$ множество F относительно компактно в $L_p(0, T; E)$, а при $p = \infty$ и $r > 1$ множество F относительно компактно в $C([0, T], E)$.

2. СЛАБАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И АППРОКСИМАЦИЯ

В системе (1)–(2) среди известных величин только функция f зависит от времени, поэтому ее следует рассматривать в качестве символа. Введем пространство $\mathcal{X}$, которое состоит из всех элементов $\mathcal{X} = L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^0)$, для которых конечна следующая норма:

$$\|h\|_{\mathcal{X}} = \sup_{t \geq 0} \|h\|_{L_2(t, t+1; V^0)}. \quad (5)$$

Будем предполагать, что $a \in V^0$, $f \in \mathcal{X}$.

Определение 8. Слабым решением задачи (1)–(3) будем называть пару функций (v, σ) , где $v \in W[0, T]$, $\sigma \in L_2(Q_T)^9$, таких, что для всех $\varphi \in V^2$ и почти всех $t \in (0, T)$ имеет место тождество

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

почти всюду в Q_T имеет место реологическое соотношение

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu_1 \mathcal{E}(v) + \mu_2 \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} & \text{для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0; \\ |\sigma| \leq \mu_2 & \text{для } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases}$$

и функция v удовлетворяет начальному условию

$$v(0) = a.$$

Определение 9. Слабым решением задачи (1)–(3) на полуоси $\mathbb{R}_+$ будем называть функцию $v \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)$ с производной $v' \in L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-2})$, если для любого $T > 0$ существует $\sigma \in L_2(Q_T)^9$ такое, что пара $(v|_{[0, T]}, \sigma)$ является слабым решением задачи (1)–(3) на $[0, T]$.

Непрерывное вложение пространств $V^1 \subset V^0$ соответствует неравенству Пуанкаре

$$\|u\|_{V^0} \leq \gamma \|u\|_{V^1}. \quad (6)$$

Введем постоянную

$$\alpha = \frac{\mu_1}{2\gamma^2}. \quad (7)$$

Для доказательства разрешимости в слабом смысле исследуемой задачи используется аппроксимационно-топологический подход к исследованию гидродинамики [25]–[27]. А именно реологическое соотношение (2) аппроксимируется следующим образом:

$$\sigma = 2\mu_1 \mathcal{E}(v) + \mu_2 \frac{\mathcal{E}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}}, \quad \delta > 0.$$

Это позволит исключить в постановке задачи неизвестную σ и рассматривать задачу только о нахождении скорости v .

Также добавим в уравнение движения слагаемое $-\delta \Delta^3 v$ для того, чтобы получить необходимые нам свойства решений аппроксимационной задачи. Тогда получим задачу (для фиксированного $\delta > 0$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \left(2\mu_1 \mathcal{E}(v) + \mu_2 \frac{\mathcal{E}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \right) - \delta \Delta^3 v + \nabla p = f, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (9)$$

$$v|_{t=0}(x) = a(x), \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

Пусть $a \in V^1, f \in \mathcal{X}$.

Определение 10. Решением аппроксимационной задачи (8)–(10) на отрезке $[0, T]$ назовем функцию $v \in W_1[0, T]$, которая для любого $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle + \mu_1 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \\ + \mu_2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \, dx + \delta \int_{\Omega} A^2 v A \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \end{aligned}$$

и начальному условию

$$v(0) = a. \quad (11)$$

Введем операторы при помощи равенств (везде предполагается, что $\varphi \in V^2$)

$$\langle Av(t), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi \, dx, \quad A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1});$$

$$\langle K(v)(t), \varphi \rangle = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \, dx, \quad K : L_4(0, T; L_4(\Omega)^3) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1});$$

$$\langle A^3 v(t), \varphi \rangle = \int_{\Omega} A^2 v(t) A \varphi \, dx, \quad A^3 : L_2(0, T; V^4) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2});$$

$$\langle B_\delta(v)(t), \varphi \rangle = \mu_2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx, \quad B_\delta : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}).$$

Тогда разрешимость аппроксимационной задачи эквивалентна существованию решения $v \in W_1[0, T]$ операторного уравнения

$$v' + \mu_1 Av + B_\delta(v) - K(v) + \delta A^3 v = f, \quad (12)$$

удовлетворяющего начальному условию (11).

Определение 11. Функцию $v \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^4)$ с производной $v' \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-2})$ назовем решением аппроксимационной задачи (8)–(10) на $\mathbb{R}_+$, если для любого $T > 0$ ограничение v на отрезок $[0, T]$ является решением (8)–(10) на $[0, T]$.

Ниже приведем свойства операторов, которые понадобятся нам в дальнейшем. Доказательство этих свойств можно найти в [4].

Лемма 4. *Справедливы утверждения.*

- 1) Для любой функции $u \in L_2(0, T; V^1)$ функция $Au \in L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен и для любого отрезка $[t, t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|Au\|_{L_2(t, t+1; V^{-1})} \leq \|u\|_{L_2(t, t+1; V^1)}. \quad (13)$$

- 2) Для любой функции $u \in L_2(0, T; V^4)$ функция $A^3 u \in L_2(0, T; V^{-2})$, оператор $A^3 : L_2(0, T; V^4) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывен и для любого отрезка $[t, t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|A^3 u\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} \leq \|u\|_{L_2(t, t+1; V^4)}. \quad (14)$$

- 3) Для любой функции $u \in L_2(0, T; L_4(\Omega)^3)$ отображение $K : W_1[0, T] \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ компактно и для любого отрезка $[t, t+1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\|K(u)\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} \leq C_2 \|u\|_{L_2(t, t+1; V^1)} \|u\|_{L_\infty(t, t+1; V^0)}. \quad (15)$$

- 4) Для любой функции $u \in L_2(0, T; V^1)$ функция $B_\delta(u) \in L_2(0, T; V^{-2})$ и оператор $B_\delta : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывный и имеет место неравенство

$$\|B_\delta(u)(t)\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} \leq \mu_2 C_3, \quad (16)$$

где C_3 — константа, не зависящая от δ и функции u .

Теорема 5. Для любой правой части $f \in L_2(0, T; V^{-2})$ и начального условия $a \in V^1$ задача

$$\begin{aligned} u' + \alpha A^3 u + \mu_1 Au &= f, \\ u(0) &= a \end{aligned}$$

имеет единственное слабое решение $u \in L_2(0, T; V^4)$ с производной $u' \in L_2(0, T; V^{-2})$, непрерывно зависящее от f и a . Для решения u на любом отрезке $[t, t+1] \subset [0, T]$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \alpha \|u\|_{L_2(t, t+1; V^4)} &\leq \sqrt{2\alpha} \|a\|_{V^1} + \|f\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})}, \\ \sqrt{\alpha} \|u\|_{L_\infty(t, t+1; V^1)} &\leq \sqrt{2\alpha} \|a\|_{V^1} + \|f\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})}. \end{aligned} \quad (17)$$

3. ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Для доказательства существования равномерных аттракторов рассматриваемой модели нам потребуются оценки специального вида.

Лемма 5. Пусть v — решение уравнения (12) на отрезке $[0, T]$, $T > 0$. Тогда для любого отрезка $[\tau; \tau + 1] \subset [0, T]$ имеют место оценки

$$\|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^0)} \leq 1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_5 \|f\|_{\mathcal{X}}^2, \quad (18)$$

$$\sqrt{\mu_1} \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} \leq 1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_6 \|f\|_{\mathcal{X}}^2, \quad (19)$$

$$\delta \|v\|_{L_2(t, t+1; V^4)} \leq \sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1} + C_8 (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_9 \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2, \quad (20)$$

$$\|v'\|_{L_2(t, t+1; V^{-2})} \leq \sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1} + C_{11} (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_{12} \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2. \quad (21)$$

Доказательство. Применим обе части (12) к функции $v \in W_1[0, T]$. Имеем

$$\langle v' + \delta A^3 v + \mu_1 A v - K(v) + B_\delta(v), v \rangle = \int_{\Omega} f v dx.$$

В силу определений операторов получаем равенство

$$\begin{aligned} \langle v', v \rangle + \delta \int_{\Omega} A^2 v A v dx + \mu_1 \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v dx - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx + \\ + \mu_2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} dx = \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} \langle v'(t), v(t) \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2, \\ \delta \int_{\Omega} A^2 v(t) A v(t) dx &= -\delta \int_{\Omega} \pi \Delta(A v(t)) A v(t) dx = \delta \int_{\Omega} \nabla(A v(t)) : \nabla(A v(t)) dx = \delta \|v(t)\|_{V^3}^2, \\ \mu_1 \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla v(t) dx &= \mu_1 \|v(t)\|_{V^1}^2, \\ - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} v_i(t) v_j(t) \frac{\partial v_j(t)}{\partial x_i} dx &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} v_i(t) \frac{\partial(v_j(t) v_j(t))}{\partial x_i} dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial v_i(t)}{\partial x_i} v_j(t) v_j(t) dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \operatorname{div} v v_j(t) v_j(t) dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + \delta \|v(t)\|_{V^3}^2 + \mu_1 \|v(t)\|_{V^1}^2 + \mu_2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}^2(v(t))}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v(t))|\}} dx = \int_{\Omega} f(t) v(t) dx. \quad (22)$$

Воспользуемся в правой части неравенствами Юнга, Коши и непрерывностью вложения $V^1 \subset V^0$:

$$\left| \int_{\Omega} f(t)v(t)dx \right| \leq \|f(t)\|_{V^0} \|v(t)\|_{V^0} \leq C_4 \|f(t)\|_{V^0} \|v(t)\|_{V^1} \leq \frac{C_4^2 \|f(t)\|_{V^0}^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_1}{2} \|v(t)\|_{V^1}^2.$$

Заметим, что

$$\mu_2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}^2(v(t))}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v(t))|\}} dx \geq 0, \quad \delta \|v(t)\|_{V^3}^2 \geq 0.$$

Тогда из (22) получаем оценку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + \frac{\mu_1}{2} \|v(t)\|_{V^1}^2 \leq \frac{C_4^2}{2\mu_1} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Умножим обе части неравенства на два

$$\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V^0}^2 + \mu_1 \|v(t)\|_{V^1}^2 \leq \frac{C_4^2}{\mu_1} \|f(t)\|_{V^0}^2. \quad (23)$$

Сделаем замену $\bar{v}(t) = e^{\alpha t} v(t)$ (константа α определяется (7)). Получим

$$\frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)e^{-\alpha t}\|_{V^0}^2 + \mu_1 \|\bar{v}(t)e^{-\alpha t}\|_{V^1}^2 \leq \frac{C_4^2}{\mu_1} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Далее,

$$-2\alpha e^{-2\alpha t} \|\bar{v}(t)\|_{V^0}^2 + e^{-2\alpha t} \frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)\|_{V^0}^2 + \mu_1 e^{-2\alpha t} \|\bar{v}(t)\|_{V^1}^2 \leq \frac{C_4^2}{\mu_1} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Умножив последнее неравенство на $e^{2\alpha t}$, имеем

$$-2\alpha \|\bar{v}(t)\|_{V^0}^2 + \frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)\|_{V^0}^2 + \mu_1 \|\bar{v}(t)\|_{V^1}^2 \leq \frac{C_4^2}{\mu_1} e^{2\alpha t} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

В силу неравенства (6) и определения константы α

$$\mu_1 \|\bar{v}(t)\|_{V^1}^2 - 2\alpha \|\bar{v}(t)\|_{V^0}^2 \geq \mu_1 \|\bar{v}(t)\|_{V^1}^2 - \frac{2\mu_1}{2\gamma^2} \gamma^2 \|\bar{v}(t)\|_{V^1}^2 = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \|\bar{v}(t)\|_{V^0}^2 \leq \frac{C_4^2}{\mu_1} e^{2\alpha t} \|f(t)\|_{V^0}^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t от 0 до τ , $\tau \in [0, T]$, получим

$$\|\bar{v}(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \|\bar{v}(0)\|_{V^0}^2 + \int_0^\tau \frac{C_4^2}{\mu_1} e^{2\alpha t} \|f(t)\|_{V^0}^2 dt.$$

Используя (см. [11]) тот факт, что

$$\int_0^t a^s \phi(s) ds \leq \frac{a^{t+2}}{a-1} \sup_{s \in [0, t-1]} \int_s^{s+1} |\phi(\xi)| d\xi,$$

где $a > 1$ и $\phi(s)$ — скалярная функция, получаем

$$\|\bar{v}(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \|\bar{v}(0)\|_{V^0}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \frac{e^{2\alpha(\tau+2)}}{e^{2\alpha} - 1} \sup_{s \in [0, \tau-1]} \int_s^{s+1} \|f(\xi)\|_{V^0}^2 d\xi.$$

Делая обратную замену, получаем

$$e^{2\alpha\tau}\|v(\tau)\|_{V^0}^2 \leq \|v(0)\|_{V^0}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \frac{e^{2\alpha(\tau+2)}}{e^{2\alpha} - 1} \sup_{s \in [0, \tau-1]} \int_s^{\tau+1} \|f(\xi)\|_{V^0}^2 d\xi.$$

Умножая последнее неравенство на $e^{-2\alpha\tau}$ и используя определение нормы (5), получаем

$$\begin{aligned} \|v(\tau)\|_{V^0}^2 &\leq e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \frac{e^{4\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} \sup_{s \in [0, \tau-1]} \int_s^{\tau+1} \|f(\xi)\|_{V^0}^2 d\xi \leq \\ &\leq e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \frac{e^{4\alpha}}{e^{2\alpha} - 1} \|f\|_{\mathcal{X}}^2 \leq e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_5 \|f\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда, переходя к существенному супремуму по интервалу $(\tau; \tau+1) \subset [0, T]$ и используя неравенство $b \leq 1 + b^2$ для всех $b \in \mathbb{R}$, получаем оценку

$$\|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^0)} \leq 1 + \|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^0)}^2 \leq 1 + e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_5 \|f\|_{\mathcal{X}}^2.$$

Докажем неравенство (19). Проинтегрируем по отрезку $[\tau, \tau+1]$ неравенство (23)

$$\|v(\tau+1)\|_{V^0}^2 + \mu_1 \int_{\tau}^{\tau+1} \|v(t)\|_{V^1}^2 dt \leq \|v(\tau)\|_{V^0}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \int_{\tau}^{\tau+1} \|f(t)\|_{V^0}^2 ds.$$

Оценивая левую часть неравенства снизу, а правую часть сверху при помощи (24), имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 \int_{\tau}^{\tau+1} \|v(t)\|_{V^1}^2 dt &\leq \|v(\tau)\|_{V^0}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \int_{\tau}^{\tau+1} \|f(t)\|_{V^0}^2 dt \leq \\ &\leq e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_5 \|f\|_{\mathcal{X}}^2 + \frac{C_4^2}{\mu_1} \|f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^0)}^2 \leq e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_6 \|f\|_{\mathcal{X}}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получили оценку

$$\mu_1 \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)}^2 \leq e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_6 \|f\|_{\mathcal{X}}^2.$$

Откуда в силу неравенства $b \leq 1 + b^2$ получим

$$\sqrt{\mu_1} \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} \leq 1 + e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_6 \|f\|_{\mathcal{X}}^2.$$

Для получения неравенств (20) и (21) заметим, что если $v \in W_1[0, T]$ является решением операторного уравнения (12), то для любого отрезка $[\tau, \tau+1] \subset [0, T]$

$$\|v' + \delta A^3 v + \mu_1 A\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} = \|-B_\delta(v) + K(v) + f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})}. \quad (25)$$

В силу (17) левую часть можно оценить снизу:

$$\|v' + \delta A^3 v + \mu_1 A\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} \geq \delta \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^4)} - \sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1}. \quad (26)$$

Воспользовавшись (15) и (16), а также уже доказанными оценками (18) и (19), оценим правую часть (25):

$$\begin{aligned} \|-B_\delta(v) + K(v) + f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} &\leq \|B_\delta(v)\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} + \|K(v)\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} + \\ &+ \|f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} \leq \mu_2 C_3 + C_2 \|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^0)} \|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + C_7 \|f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^0)} \leq \\ &\leq \mu_2 C_3 + \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} (1 + e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_5 \|f\|_{\mathcal{X}}^2) \times \\ &\times (1 + e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_6 \|f\|_{\mathcal{X}}^2) + C_7 \|f\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^0)} \leq C_8 (1 + e^{-2\alpha\tau}\|v(0)\|_{V^0}^2 + C_9 \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2. \end{aligned}$$

Отсюда и из (26) получаем оценку (20).

Аналогично предыдущему, используя оценки (13) и (14), имеем

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(t,t+1;V^{-2})} &= \|\delta A^3 v - \mu_1 A v - B_\delta(v) + K(v) + f\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-2})} \leq \\ &\leq \delta \|v\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^4)} + \mu_1 C_{10} \|v\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^1)} + \|-B_\delta(v) + K(v) + f\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-2})} \leq \\ &\leq \sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1} + C_8 (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_9 \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2 + \\ &+ \mu_1 C_{10} (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_6 \|f\|_{\mathcal{X}}^2) + C_8 (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_9 \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2 \leq \\ &\leq \sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1} + C_{11} (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_{12} \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получена последняя из требуемых оценок. $\square$

Теорема 6. Пусть $f \in \mathcal{X}, a \in V^1$. Тогда аппроксимационная задача (8)–(10) имеет решение на отрезке $[0, T]$ ($T > 0$) и для любого отрезка $[\tau, \tau + 1] \subset [0, T]$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|v\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(\tau,\tau+1;V^0)} + \|v'\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-2})} &\leq \\ &\leq \sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1} + C_{13} (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2 + C_{14} \|f\|_{\mathcal{X}}^2)^2. \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство. Существование решения аппроксимационной задачи (8)–(10) при $f \in L_2(0, T; V^0), a \in V^1$ на отрезке $[0, T]$ ($T > 0$) доказано в работе [4]. Оценка (27) непосредственно следует из оценок (18), (19) и (21). $\square$

Далее нам понадобятся

Теорема 7. При любом $a \in V^1$ аппроксимационная задача (8)–(10) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 8. При любом $a \in V^0$ задача (1)–(3) имеет решение на полуоси $\mathbb{R}_+$, при всех $\tau > 0$ удовлетворяющее неравенству

$$\|v\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(\tau,\tau+1;V^0)} + \|v'\|_{L_2(\tau,\tau+1;V^{-2})} \leq C_{15} (1 + e^{-2\alpha\tau} \|v(0)\|_{V^0}^2)^2. \quad (28)$$

Доказательство разрешимости задач (1)–(3) и (8)–(10) на полуоси $\mathbb{R}_+$ может быть найдено в работе [8]. Оценка (28) получается из неравенства (27) при предельном переходе при $\delta \rightarrow 0$ в силу полунепрерывности снизу нормы относительно слабой и *-слабой топологии. Отметим, что при предельном переходе δ выбирается специальным образом, чтобы слагаемое $\sqrt{2\delta} \|v(0)\|_{V^1}$ оценивалось сверху (подробнее см. [8]).

4. РАВНОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ

Пусть $E_0 = V^{-\varkappa}, 0 < \varkappa < 1, E = V^0$. В качестве пространства символов Σ системы (1)–(2) для фиксированного $f \in \mathcal{X}$ выберем произвольное множество Σ , содержащее функцию f , для которого выполнено $\|\psi\|_{\mathcal{X}} \leq \|f\|_{\mathcal{X}}$ ($\psi \in \Sigma$).

Определим семейство траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$.

Определение 12. Пространство траекторий $\mathcal{H}_\psi^+$ системы (1)–(2), соответствующее символу $\psi \in \Sigma$, — это множество функций v , удовлетворяющих следующим условиям:

(i) функции v принадлежат пространствам

$$v \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^1) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0), \quad v' \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}_+; V^{-2});$$

(ii) ограничение v на любой отрезок $[0, T]$ является слабым решением задачи (1)–(2) на этом отрезке;

(iii) при всех $\tau \geq 0$ функция v удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^0)} + \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} \leq C_{15} \left(1 + e^{-2\alpha\tau} \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^0)}^2\right)^2. \quad (29)$$

Покажем корректность определения семейства пространств траекторий. Для этого установим включение $\mathcal{H}_\psi^+ \subset C(\mathbb{R}_+; V^{-\infty}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)$.

Действительно, по определению семейства траекторных пространств каждая функция $v \in \mathcal{H}_\psi^+$ принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)$. В силу неравенства (29) для v имеем, что $\Pi_T v \in L_\infty(0, T; V^0)$, $\Pi_T v' \in L_2(0, T; V^{-2})$ для некоторого отрезка $[0, T]$. Используя теорему 4 для тройки пространств $V^0 \subset V^{-\infty} \subset V^{-2}$, получаем, что $\Pi_T v$ принадлежит пространству $C([0, T], V^{-\infty})$ для любого $T \geq 0$. Отсюда в силу леммы 2 получаем, что $v \in C(\mathbb{R}_+, V^{-\infty})$.

Покажем теперь, что $\mathcal{H}_\psi^+$ непусто. Имеет место

Теорема 9. Пусть $\psi \in \Sigma$ — некоторый символ. Тогда для любого $a \in V^0$ существует траектория $v \in \mathcal{H}_\psi^+$, для которой

$$v(0) = a.$$

Доказательство. По теореме 8 существует решение $v \in W_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ задачи (1)–(3) на полуоси $\mathbb{R}_+$ для любых $a \in V^0$ и $f \in \mathcal{X}$. Покажем, что эта функция удовлетворяет оценке (29), т. е. является траекторией. Поскольку функция v удовлетворяет оценке (28), нам достаточно показать выполнение неравенства

$$\|v(0)\|_{V^0} \leq \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+, V^0)}. \quad (30)$$

Из оценки (28) следует, что функция принадлежит $L_\infty(\mathbb{R}_+, V^0)$, а v' принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}_+, V^{-2})$. Повторяя рассуждения, используемые выше, имеем $v \in C(\mathbb{R}_+, V^{-2})$. Таким образом, $v \in C(\mathbb{R}_+, V^{-2}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+, V^0)$, и в силу теоремы 1 получаем, что $v \in C_w(\mathbb{R}_+, V^0)$. Откуда для любого $t \in \mathbb{R}_+$ определено значение $v(t) \in V^0$. Из определения нормы в $L_\infty(\mathbb{R}_+, V^0)$ вытекает справедливость неравенства (30). $\square$

Из теоремы 9 непосредственно следует, что пространство $\mathcal{H}_\psi^+$ содержит "достаточно" большое число траекторий. А именно, для любого $a \in V^0$ существует выходящая через него траектория $v \in \mathcal{H}_\psi^+$.

Основным результатом работы являются нижеследующие теоремы.

Теорема 10. Существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2).

Доказательство. В силу теоремы 2 для доказательства достаточно построить полуаттрактор семейства пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$. Заметим, что из свойства (iii) определения 12 следует, что каждая траектория v каждого из пространств $\mathcal{H}_\psi^+$ удовлетворяет неравенству (29).

Рассмотрим множество $P \subset C(\mathbb{R}_+; V^{-\infty}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)$, которое удовлетворяет условиям

- 1) множество P состоит из функций $v \in C(\mathbb{R}_+; V^{-\infty}) \cap L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)$,
- 2) для функций v при всех $\tau \geq 0$ выполняется неравенство

$$\|v\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau, \tau+1; V^{-2})} + \|v\|_{L_\infty(\tau, \tau+1; V^0)} \leq 4C_{15}. \quad (31)$$

Так как при каждом $h \geq 0$ оператор $T(h) : C(\mathbb{R}_+; V^{-\infty}) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; V^{-\infty})$ непрерывен, то $T(t)P \subset P$ при $t \geq 0$. Значит, множество P трансляционно инвариантно.

Покажем, что P относительно компактно в $C(\mathbb{R}_+; V^{-\kappa})$. В силу леммы 2 достаточно показать, что множество $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0, T], V^{-\kappa})$ для любого $T > 0$. Из неравенства (31) следует, что множество $\Pi_T P$ ограничено в $L_\infty(0, T; V^0)$ при любом $T > 0$, а множество $\{v' : v \in \Pi_T P\}$ ограничено в $L_2(0, T; V^{-2})$. Согласно теореме 4 $\Pi_T P$ относительно компактно в $C([0, T], V^{-\kappa})$. В силу произвольности T по лемме 2 получаем относительную компактность P в $C(\mathbb{R}_+; V^{-\kappa})$.

Покажем, что P является равномерно поглощающим множеством. Пусть множество $B \subset \mathcal{H}_\Sigma^+$ ограничено в $L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)$, т. е. $\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)} \leq R$ для $v \in B$.

Пусть число $t_B \geq 0$ такое, что $R^2 e^{-2\alpha t_B} \leq 1$. Согласно неравенству (29) для $h \geq t_B$ и $\tau \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|T(h)v\|_{L_2(\tau; \tau+1; V^1)} + \|T(h)v'\|_{L_2(\tau; \tau+1; V^{-2})} + \|T(h)v\|_{L_\infty(\tau; \tau+1; V^0)} = \\ & = \|v\|_{L_2(\tau+h; \tau+1+h; V^1)} + \|v'\|_{L_2(\tau+h; \tau+1+h; V^{-2})} + \|v\|_{L_\infty(\tau+h; \tau+1+h; V^0)} \leq \\ & \leq C_{15} \left(1 + e^{-2\alpha(\tau+h)} \|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+; V^0)}^2\right)^2 \leq C_{15} \left(1 + R^2 e^{-2\alpha h} e^{-2\alpha \tau}\right)^2 \leq 4C_{15}, \end{aligned}$$

и неравенство (31) выполняется для функции $T(h)$ при всех $\tau \geq 0$. Следовательно, $T(h)B \subset P$ при $h \geq t_B$, P — поглощающее множество.

Согласно лемме 3 замыкание $\bar{P}$ множества P в пространстве $C(\mathbb{R}_+; V^{-\kappa})$ является траекторным полуаттрактором пространства траекторий $\mathcal{H}_\Sigma^+$, т. е. семейства $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$. По теореме 2 отсюда следует существование минимального равномерного траекторного аттрактора $\mathcal{U}$. $\square$

Теорема 11. *Существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2).*

Доказательство. По теореме 10 существует минимальный равномерный траекторный аттрактор $\mathcal{U}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2). Тогда в силу теоремы 3 существует равномерный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ семейства траекторных пространств $\{\mathcal{H}_\psi^+ : \psi \in \Sigma\}$ системы (1)–(2). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Shelukhin V.V. *Bingham Viscoplastic as a Limit of Non-Newtonian Fluids*, J. Math. Fluid Mech. **4** (2), 109–127 (2002), DOI: 10.1007/s00021-002-8538-7.
- [2] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике* (Наука, М., 1980).
- [3] Kim J.U. *On the Initial-Boundary Value Problem for a Bingham Fluid in a Three Dimensional Domain*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (2), 751–770 (1987), DOI: 10.1090/s0002-9947-1987-0911094-7.
- [4] Звягин В.Г., Звягин А.В., Турбин М.В. *Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным*, Зап. научн. сем. ПОМИ **477**, 54–86 (2018).
- [5] Серёгин Г.А. *О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама*, Зап. научн. сем. ЛОМИ **188**, 128–142 (1991).
- [6] Звягин В.Г., Корнев С.В. *Существование аттрактора для трехмерной модели движения среды Бингама*, Изв. вузов. Матем. (1), 74–79 (2016).
- [7] Zvyagin V. *Attractors theory for autonomous systems of hydrodynamics and its application to Bingham model of fluid motion*, Lobachevskii J. Math. **38** (4), 767–777 (2017), DOI: 10.1134/S1995080217040229.
- [8] Звягин В.Г., Турбин М.В. *О существовании аттракторов для аппроксимаций модели Бингама и их сходимости к аттрактору исходной модели*, Сиб. матем. журн. **63** (4), 842–859 (2022), DOI: 10.33048/smzh.2022.63.410.
- [9] Звягин В.Г., Устюжанинова А.С. *Обратные аттракторы модели Бингама*, Дифференц. уравнения **59** (3), 374–379 (2023), DOI: 10.31857/S0374064123030081.

- [10] Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. *Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics*, V. 12, *De Gruyter Ser. In Nonlinear Analysis and Applications* (Walter de Gruyter, Berlin — New York, 2008).
- [11] Vorotnikov D.A., Zvyagin V.G. *Uniform attractors for non-autonomous motion equations of viscoelastic medium*, J. Math. Anal. and Appl. **325** (1), 438–458 (2007), DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.01.078.
- [12] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Evolution equations and their trajectory attractors*, J. Math. Pures Appl. **76** (10), 913–964 (1997), DOI: 10.1016/S0021-7824(97)89978-3.
- [13] Chepyzhov V.V., Vishik M.I. *Attractors for Equations of Mathematical Physics* (American Math. Society, Providence, RI, 2002).
- [14] Sell G.R., You Y. *Dynamics of Evolutionary Equations* (Springer-Verlag, New York, 2002).
- [15] Звягин А.В. *Аттракторы для модели движения полимеров с объективной производной в реологическом соотношении*, ДАН **453** (6), 599–602 (2013), DOI: 10.7868/S0869565213360097.
- [16] Устюжанинова А.С., Турбин М.В. *Траекторные и глобальные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта*, Сиб. журн. индустр. матем. **24** (1), 126–137 (2021), DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.110.
- [17] Устюжанинова А.С. *Равномерные аттракторы для модифицированной модели Кельвина–Фойгта*, Дифференц. уравнения **57** (9), 1191–1202 (2021), DOI: 10.31857/S0374064121090053.
- [18] Турбин М.В., Устюжанинова А.С. *Сходимость аттракторов аппроксимации к аттракторам модифицированной модели Кельвина–Фойгта*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **62** (2), 330–341 (2022), DOI: 10.31857/S0044466922020120.
- [19] Устюжанинова А.С. *Pullback-аттракторы модифицированной модели Кельвина–Фойгта*, Изв. вузов. Матем. (5), 98–104 (2021), DOI: 10.26907/0021-3446-2021-5-98-104.
- [20] Звягин В.Г., Кондратьев С.К. *Аттракторы уравнений неньютонской гидродинамики*, УМН **69** (5(419)), 81–156 (2014), DOI: 10.4213/gm9615.
- [21] Гавский Х., Грёгер К., Захарнас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения* (Мир, М., 1978).
- [22] Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ* (Мир, М., 1981).
- [23] Temam R. *Navier–Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis* (SIAM, Philadelphia, 1995).
- [24] Simon J. *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Matem. Pura Appl. (146), 65–96 (1986), DOI: 10.1007/BF01762360.
- [25] Звягин В.Г. *Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики*, Современная матем. Фундамент. направления **46**, 93–119 (2012).
- [26] Звягин В.Г., Турбин М.В. *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред* (КРАСАНД, М., 2012).
- [27] Турбин М.В., Устюжанинова А.С. *Теорема существования слабого решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей движение слабых водных растворов полимеров*, Изв. вузов. Матем. (8), 62–78 (2019), DOI: 10.26907/0021-3446-2019-8-62-78.

Анастасия Сергеевна Устюжанинова

Воронежский государственный университет,

Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,

e-mail: nastyzhka@gmail.com

A.S. Ustiuzhaninova

Uniform attractors for the Bingham model

Abstract. In this paper, on the base of the theory of attractors for non-invariant trajectory spaces, the limiting behavior of solutions to a periodic in spatial variables problem for the Bingham model is investigated. For the considered problem, necessary exponential estimates are established, the trajectory space is determined, and the existence of a minimal uniform trajectory and uniform global attractors is proved.

Keywords: Bingham model, uniform attractor, minimal trajectory attractor, trajectory space, exponential estimate, weak solution.

Anastasiia Sergeevna Ustiuzhaninova

Voronezh State University,

1 Universitetskay sq., Voronezh, 394018 Russia,

e-mail: *nastyzhka@gmail.com*