

И. В. РАХМЕЛЕВИЧ

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОРОДНЫМ ПОЛИНОМОМ

Аннотация. Исследуются двумерные нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, левая часть которых представляет собой однородный полином второй степени по искомой функции и ее производным. Рассматривается множество линейных мультипликативных преобразований неизвестной функции, сохраняющих вид исходного уравнения. Аналогично линейным уравнениям, инварианты Лапласа определяются как инварианты этого преобразования. Получены выражения для инвариантов Лапласа через коэффициенты уравнения и их первые производные. Для рассматриваемых уравнений найдены эквивалентные системы уравнений первого порядка, содержащие инварианты Лапласа. Показано, что если один из инвариантов Лапласа равен нулю, то соответствующая система сводится к одному уравнению первого порядка. Также в этом случае при выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты может быть получено решение исходного уравнения в квадратурах. Исследования проведены для гиперболического уравнения со смешанной производной и для нелинейного уравнения второго порядка общего вида с однородным полиномом второй степени по искомой функции и ее производным. Для этих случаев получены выражения для инвариантов Лапласа и приведены соответствующие эквивалентные системы.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, гиперболическое уравнение, инвариант Лапласа, линейное мультипликативное преобразование, однородный полином.

УДК: 517.956

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-55-64

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании свойств симметрии и классификации линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами весьма эффективным является подход, основанный на использовании инвариантов Лапласа ([1], с. 66–67; [2], с. 175–180). Как известно, инварианты Лапласа — это функции коэффициентов уравнения и их производных, которые являются инвариантными относительно линейного мультипликативного преобразования, которое переводит исходное дифференциальное уравнение в уравнение того же вида. Первоначально эти инварианты были найдены для двумерного линейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами:

$$u''_{xy} + a(x, y)u'_x + b(x, y)u'_y + c(x, y)u = 0,$$

для которого инварианты Лапласа имеют вид:

$$h = a'_x + ab - c, \quad k = b'_y + ab - c.$$

В дальнейшем инварианты Лапласа были найдены для различных типов линейных уравнений второго и более высоких порядков, а также систем линейных уравнений [3]–[10]. Также в ряде работ инварианты Лапласа и их обобщения применялись к исследованию некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных [11]–[17]. Целью данной работы является нахождение инвариантов Лапласа для двумерных нелинейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, содержащих однородный полином второй степени от искомой функции и ее производных.

1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u = u(x, y)$:

$$uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_x u'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2 = 0. \quad (1.1)$$

Левая часть уравнения (1.1) представляет собой однородный полином специального вида по неизвестной функции и ее производным.

Применим к уравнению (1.1) мультипликативное преобразование искомой функции, которое имеет вид:

$$u(x, y) = \lambda(x, y)v(x, y). \quad (1.2)$$

Подставив (1.2) в уравнение (1.1), после дифференцирования и элементарных преобразований получим уравнение относительно новой неизвестной функции $v(x, y)$:

$$vv''_{xy} + \tilde{b}_{12}(x, y)v'_x v'_y + \tilde{b}_{01}(x, y)vv'_x + \tilde{b}_{02}(x, y)vv'_y + \tilde{c}(x, y)v^2 = 0. \quad (1.3)$$

Здесь и всюду далее знаком "тильда" отмечены величины, относящиеся к преобразованному уравнению. Найдем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнений (1.1), (1.3), чтобы одно из этих уравнений можно было привести к другому с помощью преобразования (1.2).

Коэффициенты преобразованного уравнения (1.3) определяются выражениями

$$\tilde{b}_{12} = b_{12}, \quad \tilde{b}_{01} = b_{01} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}(1 + b_{12}), \quad \tilde{b}_{02} = b_{02} + \frac{\lambda'_x}{\lambda}(1 + b_{12}). \quad (1.4)$$

$$\tilde{c} = c + \frac{\lambda'_x}{\lambda}b_{01} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}b_{02} + \frac{\lambda'_x \lambda'_y}{\lambda^2}b_{12} + \frac{\lambda''_{xy}}{\lambda}. \quad (1.5)$$

Из формул (1.4) получаем

$$\lambda'_x = \frac{\tilde{b}_{02} - b_{02}}{1 + b_{12}}\lambda, \quad \lambda'_y = \frac{\tilde{b}_{01} - b_{01}}{1 + b_{12}}\lambda. \quad (1.6)$$

Первое из соотношений (1.6) дифференцируя по y , а второе — по x , находим смешанные производные

$$\lambda''_{xy} = \left((\tilde{A}_2 - A_2)'_y + (\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2) \right) \lambda, \quad (1.7a)$$

$$\lambda''_{yx} = \left((\tilde{A}_1 - A_1)'_x + (\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2) \right) \lambda. \quad (1.7b)$$

Здесь введены обозначения:

$$A_1 = \frac{b_{01}}{1 + b_{12}}, \quad A_2 = \frac{b_{02}}{1 + b_{12}}, \quad \tilde{A}_1 = \frac{\tilde{b}_{01}}{1 + \tilde{b}_{12}}, \quad \tilde{A}_2 = \frac{\tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}}. \quad (1.8)$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (1.7а,б) следует

$$(\tilde{A}_1 - A_1)'_x = (\tilde{A}_2 - A_2)'_y.$$

Далее, подставляя (1.6), (1.7б) в (1.5) и учитывая (1.8), получаем

$$\tilde{c} - c = (\tilde{A}_1 - A_1)'_x + (1 + b_{12})(\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{01}(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{02}(\tilde{A}_1 - A_1). \quad (1.9)$$

После некоторых элементарных преобразований (1.9) приводится к виду

$$\tilde{c} - c = (\tilde{A}_1 - A_1)'_x + (1 + b_{12})(\tilde{A}_1 \tilde{A}_2 - A_1 A_2). \quad (1.10)$$

Преобразуем (1.10) так, чтобы в левой части были только слагаемые, относящиеся к преобразованному уравнению, а в правой части — относящиеся только к исходному уравнению, тогда с учетом (1.8) и первой формулы (1.4) находим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{b}_{01}}{1 + \tilde{b}_{12}} \right) + \frac{\tilde{b}_{01} \tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}} - \tilde{c} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_{01}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c. \quad (1.11)$$

Из (1.11) следует, что функция

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b_{01}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c \quad (1.12)$$

не изменяется при преобразовании (1.2) и поэтому является инвариантом уравнения (1.1) относительно данного преобразования.

Для нахождения второго инварианта, подставляя (1.6), (1.7а) в (1.5) и учитывая (1.8), получаем

$$\tilde{c} - c = (\tilde{A}_2 - A_2)'_y + (1 + b_{12})(\tilde{A}_1 - A_1)(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{01}(\tilde{A}_2 - A_2) + b_{02}(\tilde{A}_1 - A_1). \quad (1.13)$$

В результате рассуждений, аналогичных приведенным выше, (1.13) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}} \right) + \frac{\tilde{b}_{01} \tilde{b}_{02}}{1 + \tilde{b}_{12}} - \tilde{c} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_{02}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c. \quad (1.14)$$

Из (1.14) следует, что функция

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{b_{02}}{1 + b_{12}} \right) + \frac{b_{01} b_{02}}{1 + b_{12}} - c \quad (1.15)$$

также является инвариантом уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2).

Используя соотношения (1.6), нетрудно выразить функцию $\lambda(x, y)$, определяющую вид преобразования (1.2), через коэффициенты уравнений (1.1), (1.3):

$$\lambda(x, y) = \lambda_0 \exp \left(\int \frac{\tilde{b}_{02} - b_{02}}{1 + b_{12}} dx + \int \frac{\tilde{b}_{01} - b_{01}}{1 + b_{12}} dy \right), \quad (1.16)$$

где λ_0 — произвольная постоянная.

Итак, в результате проведенных рассуждений доказана

Теорема 1. Уравнение (1.1) и уравнение (1.3) того же вида могут быть связаны с помощью преобразования (1.2) в том и только том случае, если инварианты I_1, I_2 , определяемые формулами (1.12), (1.15), одинаковы для обоих уравнений и если выполнено условие $\tilde{b}_{12} = b_{12}$. При этом коэффициент $\lambda(x, y)$ преобразования (1.2) определяется формулой (1.16).

Следствие. Если для уравнения (1.1) $I_1 = I_2 = 0$, то это уравнение с помощью преобразования (1.2) может быть приведено к виду

$$vv''_{xy} + b_{12}(x, y)v'_x v'_y = 0. \quad (1.17)$$

Данное утверждение следует из того факта, что для уравнения (1.17) оба инварианта равны нулю, а коэффициент b_{12} такой же, как у исходного уравнения (1.1).

Теорема 2. Уравнение (1.1) эквивалентно следующим системам уравнений относительно неизвестных функций $u(x, y), w(x, y)$:

$$\begin{aligned} uu'_y + \frac{b_{01}}{1 + b_{12}}u^2 &= w; \\ w'_x + \left(b_{02} + (b_{12} - 1)\frac{u'_x}{u} \right) w &= I_1 u, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} uu'_x + \frac{b_{02}}{1 + b_{12}}u^2 &= w; \\ w'_y + \left(b_{01} + (b_{12} - 1)\frac{u'_y}{u} \right) w &= I_2 u. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Доказательство. 1. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$P[u] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_2 + p_3 \frac{u'_x}{u} \right) \left(u \frac{\partial}{\partial y} + p_1 u \right) u, \quad (1.20)$$

где $p_{1,2,3}(x, y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. Раскрывая скобки, преобразуем оператор (1.20):

$$P[u] = uu''_{xy} + (1 + p_3)u'_x u'_y + p_1(2 + p_3)uu'_x + p_2uu'_y + (p_1 p_2 + (p_1)'_x)u^2. \quad (1.21)$$

Определим коэффициенты p_1, p_2, p_3 так, чтобы выполнялись соотношения

$$1 + p_3 = b_{12}, \quad p_1(2 + p_3) = b_{01}, \quad p_2 = b_{02}. \quad (1.22)$$

Из (1.22) находим, что эти коэффициенты определяются выражениями

$$p_1 = \frac{b_{01}}{1 + b_{12}}, \quad p_2 = b_{02}, \quad p_3 = b_{12} - 1. \quad (1.23)$$

Используя (1.21)–(1.23) и учитывая (1.12), имеем

$$P[u] = (uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_x u'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2) + I_1 u^2. \quad (1.24)$$

Выражение в скобках в (1.24) совпадает с левой частью уравнения (1.1). Тогда если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то (1.24) сводится к следующему:

$$P[u] = I_1 u^2. \quad (1.25)$$

Далее, вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = uu'_y + p_1 u^2,$$

получаем из (1.20), (1.22) и (1.25), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (1.18).

2. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Q[u] = \left(\frac{\partial}{\partial y} + q_2 + q_3 \frac{u'_y}{u} \right) \left(u \frac{\partial}{\partial x} + q_1 u \right) u. \quad (1.26)$$

Проводя рассуждения, аналогичные п. 1 доказательства, находим

$$q_1 = \frac{b_{02}}{1 + b_{12}}, \quad q_2 = b_{01}, \quad q_3 = b_{12} - 1. \quad (1.27)$$

Поэтому $Q[u]$ можно представить в виде:

$$Q[u] = (uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_xu'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2) + I_2u^2. \quad (1.28)$$

Аналогично п. 1, если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то (1.28) сводится к следующему:

$$Q[u] = I_2u^2. \quad (1.29)$$

Далее, вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = uu'_x + q_1u^2,$$

получаем из (1.26), (1.27) и (1.29), что функции $u(x, y)$, $w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (1.19). $\square$

Используя системы (1.18), (1.19), можно получить общее решение уравнения (1.1) в квадратурах в некоторых частных случаях, которые приведем ниже.

Случай 1. $I_1 = 0$, $b_{12} = 1$. Тогда, решая второе уравнение системы (1.18), находим

$$w(x, y) = w_0(y) \exp \left(- \int b_{02} dx \right), \quad (1.30)$$

где $w_0(y)$ — произвольная функция. Подставляя (1.30) в первое уравнение системы (1.18), получим общее решение уравнения (1.1)

$$u(x, y) = \left\{ \left[u_0(x) + 2 \int w_0(y) \exp \left(\int b_{01} dy - \int b_{02} dx \right) dy \right] \exp \left(- \int b_{01} dy \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $u_0(x)$, $w_0(y)$ — произвольные функции.

Случай 2. $I_2 = 0$, $b_{12} = 1$. Аналогично случаю 1, решая второе уравнение системы (1.19), находим

$$w(x, y) = w_0(x) \exp \left(- \int b_{01} dy \right), \quad (1.31)$$

где $w_0(x)$ — произвольная функция. Подставляя (1.31) в первое уравнение системы (1.19), получим общее решение уравнения (1.1):

$$u(x, y) = \left\{ \left[u_0(y) + 2 \int w_0(x) \exp \left(- \int b_{01} dy + \int b_{02} dx \right) dx \right] \exp \left(- \int b_{02} dx \right) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $u_0(y)$, $w_0(x)$ — произвольные функции.

2. ИНВАРИАНТЫ УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА. АНАЛИЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим двумерное уравнение второго порядка общего вида, содержащее однородный полином от искомой функции и ее производных

$$u (a_{11}u''_{xx} + a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy}) + b_{11}(u'_x)^2 + b_{12}u'_xu'_y + b_{22}(u'_y)^2 + b_{01}uu'_x + b_{02}uu'_y + cu^2 = 0. \quad (2.1)$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (2.1) являются функциями независимых переменных: $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$, $b_{ij} = b_{ij}(x, y)$, $c = c(x, y)$. Применим к уравнению (2.1) линейное мультипликативное преобразование (1.2), в результате чего (2.1) приводится к виду

$$v (\tilde{a}_{11}v''_{xx} + \tilde{a}_{12}v''_{xy} + \tilde{a}_{22}v''_{yy}) + \tilde{b}_{11}(v'_x)^2 + \tilde{b}_{12}v'_xv'_y + \tilde{b}_{22}(v'_y)^2 + \tilde{b}_{01}vv'_x + \tilde{b}_{02}vv'_y + \tilde{c}v^2 = 0. \quad (2.2)$$

Коэффициенты уравнений (2.1) и (2.2) связаны соотношениями

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}, \quad \tilde{a}_{12} = a_{12}, \quad \tilde{a}_{22} = a_{22}, \quad \tilde{b}_{11} = b_{11}, \quad \tilde{b}_{12} = b_{12}, \quad \tilde{b}_{22} = b_{22}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{b}_{01} = b_{01} + 2(a_{11} + b_{11})\frac{\lambda'_x}{\lambda} + (a_{12} + b_{12})\frac{\lambda'_y}{\lambda}, \quad (2.4a)$$

$$\tilde{b}_{02} = b_{02} + 2(a_{22} + b_{22})\frac{\lambda'_y}{\lambda} + (a_{12} + b_{12})\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \quad (2.4б)$$

$$\tilde{c} = c + a_{11}\frac{\lambda''_{xx}}{\lambda} + b_{11}\left(\frac{\lambda'_x}{\lambda}\right)^2 + a_{12}\frac{\lambda''_{xy}}{\lambda} + b_{12}\frac{\lambda'_x\lambda'_y}{\lambda^2} + a_{22}\frac{\lambda''_{yy}}{\lambda} + b_{22}\left(\frac{\lambda'_y}{\lambda}\right)^2 + b_{01}\frac{\lambda'_x}{\lambda} + b_{02}\frac{\lambda'_y}{\lambda}. \quad (2.5)$$

Решая систему уравнений (2.4a,б) относительно $\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \frac{\lambda'_y}{\lambda}$ и учитывая соотношения (2.3), находим

$$\lambda'_x = (\tilde{B}_1 - B_1)\lambda, \quad \lambda'_y = (\tilde{B}_2 - B_2)\lambda, \quad (2.6)$$

где

$$B_1 = \frac{2b_{01}(a_{22} + b_{22}) - b_{02}(a_{12} + b_{12})}{\Delta}, \quad B_2 = \frac{2b_{02}(a_{11} + b_{11}) - b_{01}(a_{12} + b_{12})}{\Delta}, \quad (2.7)$$

$$\Delta = 4(a_{11} + b_{11})(a_{22} + b_{22}) - (a_{12} + b_{12})^2, \quad (2.7a)$$

$$\tilde{B}_1 = \frac{2\tilde{b}_{01}(\tilde{a}_{22} + \tilde{b}_{22}) - \tilde{b}_{02}(\tilde{a}_{12} + \tilde{b}_{12})}{\tilde{\Delta}}, \quad \tilde{B}_2 = \frac{2\tilde{b}_{02}(\tilde{a}_{11} + \tilde{b}_{11}) - \tilde{b}_{01}(\tilde{a}_{12} + \tilde{b}_{12})}{\tilde{\Delta}}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\Delta} = 4(\tilde{a}_{11} + \tilde{b}_{11})(\tilde{a}_{22} + \tilde{b}_{22}) - (\tilde{a}_{12} + \tilde{b}_{12})^2. \quad (2.8a)$$

Первое из соотношений (2.6) дифференцируя по y , а второе — по x , получаем

$$\lambda''_{xy} = \left((\tilde{B}_1 - B_1)'_y + (\tilde{B}_1 - B_1)(\tilde{B}_2 - B_2) \right) \lambda, \quad (2.9a)$$

$$\lambda''_{yx} = \left((\tilde{B}_2 - B_2)'_x + (\tilde{B}_1 - B_1)(\tilde{B}_2 - B_2) \right) \lambda. \quad (2.9б)$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (2.9a,б) находим

$$(\tilde{B}_1 - B_1)'_y = (\tilde{B}_2 - B_2)'_x. \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) можно переписать в виде

$$\tilde{B}'_{1y} - \tilde{B}'_{2x} = B'_{1y} - B'_{2x}. \quad (2.10a)$$

В свою очередь, из (2.10a) следует, что при преобразовании (1.2) для уравнения (2.1) величина

$$I_1 = B'_{1y} - B'_{2x} \quad (2.11)$$

является инвариантом.

Далее подставим в (2.5) выражения (2.6) для $\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \frac{\lambda'_y}{\lambda}$ с учетом (2.7), (2.7a), (2.8), (2.8a). Тогда после дифференцирования и некоторых преобразований получаем выражение для второго инварианта

$$I_2 = a_{11}B'_{1x} + a_{12}B'_{1y} + a_{22}B'_{2y} + \frac{(a_{22} + b_{22})b_{01}^2 + (a_{11} + b_{11})b_{02}^2 - (a_{12} + b_{12})b_{01}b_{02}}{\Delta}. \quad (2.12)$$

Справедлива

Теорема 3. Уравнение (2.1) и уравнение (2.2) того же вида могут быть связаны с помощью преобразования (1.2) в том и только том случае, если инварианты I_1, I_2 , определяемые формулами (2.11), (2.12), одинаковы для обоих уравнений и если выполнены условия (2.3) для коэффициентов обоих уравнений.

Замечание. Для сравнения с результатами п.1 вместо I_1, I_2 будем использовать инварианты $J_1 = I_2 - a_{12}I_1, J_2 = I_2$, так что для J_2 справедливо выражение (2.12),

$$J_1 = a_{11}B'_{1x} + a_{12}B'_{2x} + a_{22}B'_{2y} + \frac{(a_{22} + b_{22})b_{01}^2 + (a_{11} + b_{11})b_{02}^2 - (a_{12} + b_{12})b_{01}b_{02}}{\Delta}. \quad (2.13)$$

Нетрудно проверить, что в частном случае $a_{11} = b_{11} = a_{22} = b_{22} = 0, a_{12} = 1$ инварианты (2.13), (2.12) сводятся к инвариантам (1.12), (1.15), соответственно, полученным в п.1 для гиперболического уравнения со смешанной производной.

Теорема 4. Пусть коэффициенты уравнения (2.1)

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = -1, \quad a_{12} = 0, \quad (2.14)$$

что соответствует гиперболическому уравнению канонического вида. Тогда

1. если выполнено дополнительное условие

$$b_{12} = -b_{11} - b_{22}, \quad (2.15)$$

то уравнение (2.1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} u(u'_x - u'_y) + \frac{b_{01} + b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}}u^2 &= w, \\ w'_x + w'_y + \left(\frac{b_{01}(1 - b_{22}) - b_{02}(1 + b_{11})}{2 + b_{11} - b_{22}} + (b_{11} - 1)\frac{u'_x}{u} - (b_{22} + 1)\frac{u'_y}{u} \right) w &= H_1 u; \end{aligned} \quad (2.16)$$

2. если выполнено дополнительное условие

$$b_{12} = b_{11} + b_{22}, \quad (2.17)$$

то уравнение (2.1) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} u(u'_x + u'_y) + \frac{b_{01} - b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}}u^2 &= w, \\ w'_x - w'_y + \left(\frac{b_{01}(1 - b_{22}) + b_{02}(1 + b_{11})}{2 + b_{11} - b_{22}} + (b_{11} - 1)\frac{u'_x}{u} + (b_{22} + 1)\frac{u'_y}{u} \right) w &= H_2 u. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь H_1, H_2 — инварианты уравнения (2.1), которые для рассматриваемого случая определяются выражениями

$$H_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{b_{01} + b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} + \frac{b_{01}^2(1 - b_{22}) - b_{02}^2(1 + b_{11}) + b_{01}b_{02}b_{12}}{(2 + b_{11} - b_{22})^2} - c, \quad (2.19)$$

$$H_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{b_{01} - b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} + \frac{b_{01}^2(1 - b_{22}) - b_{02}^2(1 + b_{11}) + b_{01}b_{02}b_{12}}{(2 + b_{11} - b_{22})^2} - c. \quad (2.20)$$

Доказательство. Пусть нелинейный дифференциальный оператор

$$P[u] = \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x} + p_2 \frac{\partial}{\partial y} + p_3 + p_4 \frac{u'_x}{u} + p_5 \frac{u'_y}{u} \right) \left(q_1 u \frac{\partial}{\partial x} + q_2 u \frac{\partial}{\partial y} + q_3 u \right) u, \quad (2.21)$$

где $p_{1,2,3,4,5}(x, y)$, $q_{1,2,3}(x, y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. В результате элементарных преобразований выражение (2.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P[u] = & p_1 q_1 u u''_{xx} + (p_1 q_2 + p_2 q_1) u u''_{xy} + p_2 q_2 u u''_{yy} + (p_1 + p_4) q_1 (u'_x)^2 + (p_2 + p_5) q_2 (u'_y)^2 + \\ & + (p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_4 q_2 + p_5 q_1) u'_x u'_y + (p_1 q'_{1x} + p_2 q'_{1y} + 2p_1 q_3 + p_3 q_1 + p_4 q_3) u u'_x + \\ & + (p_1 q'_{2x} + p_2 q'_{2y} + 2p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_5 q_3) u u'_y + (p_1 q'_{3x} + p_2 q'_{3y} + p_3 q_3) u^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Определим p_i, q_i так, чтобы коэффициенты во всех слагаемых в (2.22), кроме последнего, совпадали с соответствующими коэффициентами уравнения (2.1). Тогда, учитывая условия (2.14), получаем систему уравнений относительно p_i, q_i :

$$p_1 q_1 = 1, \quad p_1 q_2 + p_2 q_1 = 0, \quad p_2 q_2 = -1, \quad (2.23a)$$

$$(p_1 + p_4) q_1 = b_{11}, \quad (p_1 + p_4) q_2 + (p_2 + p_5) q_1 = b_{12}, \quad (p_2 + p_5) q_2 = b_{22}, \quad (2.23б)$$

$$p_1 q'_{1x} + p_2 q'_{1y} + 2p_1 q_3 + p_3 q_1 + p_4 q_3 = b_{01}, \quad (2.23в)$$

$$p_1 q'_{2x} + p_2 q'_{2y} + 2p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_5 q_3 = b_{02}. \quad (2.23г)$$

Из уравнений (2.23a) нетрудно получить

$$p_2/p_1 = \pm 1. \quad (2.24)$$

Далее, из уравнений (2.23a,б) следует

$$p_4/p_1 = b_{11} - 1, \quad p_5/p_2 = -b_{22} - 1. \quad (2.25)$$

Подставляя (2.25) во второе из уравнений (2.23б) и учитывая (2.24), получаем

$$\frac{p_2}{p_1} (b_{11} + b_{22}) = -b_{12}. \quad (2.26)$$

На основании (2.24) рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $p_2/p_1 = 1$. Без ограничения общности положим $p_1 = 1$, тогда с учетом (2.23a), (2.25) имеем

$$p_2 = q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_4 = b_{11} - 1, \quad p_5 = -b_{22} - 1. \quad (2.27)$$

Кроме того, из (2.26) в этом случае следует условие (2.15). Подставляя (2.27) в (2.23в,г), получаем систему линейных уравнений относительно p_3, q_3 :

$$\begin{aligned} p_3 + (1 + b_{11}) q_3 &= b_{01}; \\ -p_3 + (1 - b_{22}) q_3 &= b_{02}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Из (2.28) находим

$$p_3 = \frac{b_{01}(1 - b_{22}) - b_{02}(1 + b_{11})}{D}, \quad q_3 = \frac{b_{01} + b_{02}}{D}, \quad D = 2 + b_{11} - b_{22}. \quad (2.29)$$

Учитывая (2.27) и (2.29), выражение (2.22) преобразуется к виду

$$P[u] = (u u''_{xx} - u u''_{yy} + b_{11} (u'_x)^2 + b_{22} (u'_y)^2 + b_{12} u'_x u'_y + b_{01} u u'_x + b_{02} u u'_y + c u^2) + H_1 u^2, \quad (2.30)$$

где H_1 определяется выражением (2.19). Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.14)

$$H_1 = I_1 + I_2,$$

где I_1, I_2 определяются выражениями (2.11), (2.12); поэтому H_1 также является инвариантом Лапласа.

Если при условиях данной теоремы функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то выражение в скобках в правой части (2.30) тождественно равно нулю, и (2.30) сводится к следующему:

$$P[u] = H_1 u^2. \quad (2.31)$$

Далее, вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = q_1 u u'_x + q_2 u u'_y + q_3 u^2, \quad (2.32)$$

из (2.21), (2.27), (2.29), (2.31) получаем, что функции $u(x, y)$, $w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.16).

Случай 2. $p_2/p_1 = -1$. Без ограничения общности положим $p_1 = 1$, тогда с учетом (2.23а), (2.25) имеем

$$p_2 = -1, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_4 = b_{11} - 1, \quad p_5 = b_{22} + 1. \quad (2.33)$$

Аналогично случаю 1 из (2.26) следует условие (2.17). Подставляя (2.33) в (2.23в,г), получаем систему линейных уравнений относительно p_3, q_3 :

$$\begin{aligned} p_3 + (b_{11} + 1)q_3 &= b_{01}; \\ p_3 + (b_{22} - 1)q_3 &= b_{02}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Из (2.34) находим

$$p_3 = \frac{b_{01}(1 - b_{22}) + b_{02}(1 + b_{11})}{D}, \quad q_3 = \frac{b_{01} - b_{02}}{D}, \quad D = 2 + b_{11} - b_{22}. \quad (2.35)$$

Проводя рассуждения, аналогичные случаю 1, получаем, что если при условиях данной теоремы функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то

$$P[u] = H_2 u^2, \quad (2.36)$$

где H_2 определяется выражением (2.20). Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.14)

$$H_2 = I_1 - I_2,$$

где I_1, I_2 определяются выражениями (2.11), (2.12); поэтому H_2 также является инвариантом Лапласа.

Далее, вводя новую неизвестную функцию с помощью выражения (2.32), из (2.21), (2.33), (2.35), (2.36) получаем, что функции $u(x, y)$, $w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.18). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гурса Э. *Курс математического анализа*. Т.3., Ч.1. (М.-Л.: ГИТТИ, 1933).
- [2] Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* (М.: Изд-во ин. лит., 1957).
- [3] Джохадзе О.М. *Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных*, Дифференц. уравнения **40** (1), 58–68 (2004).
- [4] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. *Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными*, Матем. заметки **99** (1), 89–96 (2016). DOI: 10.4213/mzm10613
- [5] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. *К инвариантам Лапласа для одного уравнения с доминирующей частной производной с тремя независимыми переменными*, Дифференц. уравнения **55** (1), 67–73 (2019), DOI: 10.1134/S0374064119010072.
- [6] Миронов А.Н. *Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка*, Дифференц. уравнения **45** (8), 1144–1149 (2009).
- [7] Миронов А.Н., Миронова Л.Б. *Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными*, Изв. вузов. Матем. (10), 27–34 (2014).

- [8] Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. Алгоритм построения общего решения n -компонентной гиперболической системы уравнений с нулевыми инвариантами Лапласа и краевые задачи, Уфимск. матем. журн. **1** (3), 28–45 (2009).
- [9] Старцев С.Я. Метод каскадного интегрирования Лапласа для линейных гиперболических систем уравнений, Матем. заметки **83** (1), 107–118 (2008).
- [10] Старцев С.Я. О вариационной интегрирующей матрице для гиперболических систем уравнений, Фундамент. и прикл. матем. **12** (7), 251–262 (2006).
- [11] Кузнецова М.Н. Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения, Уфимск. матем. журн. **1** (3), 87–96 (2009).
- [12] Жибер А.В., Соколов В.В. Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувилевского типа, УМН **56** (1), 63–106 (2001). DOI: <https://doi.org/10.4213/rm357>
- [13] Старцев С.Я. Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой, Теор. и матем. физ. **120** (2), 237–247 (1999).
- [14] Жибер А.В., Михайлова Ю.Г. О гиперболических системах уравнений с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа, Тр. ИММ УрО РАН **13** (4), 74–83 (2007).
- [15] Гурьева А.М., Жибер А.В. Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды, Теор. и матем. физ. **138** (3), 401–421 (2004).
- [16] Старцев С.Я. Структура множества симметрий гиперболических систем лиувилевского типа и обобщенные инварианты Лапласа, Уфимск. матем. журн. **10** (4), 103–110 (2018).
- [17] Кушнер А.Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа–Ампера и инварианты Лапласа, Докл. РАН **422** (5), 597–600 (2008).

Игорь Владимирович Рахмелевич

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия,
e-mail: igor-kitpd@yandex.ru

I. V. Rakhmelevich

On Laplace invariants of two-dimensional nonlinear equations of the second order with homogeneous polynomial

Abstract. We study two-dimensional nonlinear partial differential equations of the second order with variable coefficients. The left-hand side of these equations is a homogeneous polynomial of the second degree in unknown function and its derivatives. We consider a set of linear multiplicative transformations of the unknown function which keep the form of the initial equation. By analogy with linear equations, the Laplace invariants are determined as the invariants of this transformation. The expressions for the Laplace invariants in terms of the coefficients of the equation and their first derivatives are obtained. For the considered equations, we found the equivalent systems of the first order equations containing the Laplace invariants. It is shown that if one of the Laplace invariants equals zero, the corresponding system is reduced to one equation of the first order. Also in this case, the solution of the initial equation can be obtained in quadratures if some additional conditions on the coefficients are met. The investigations are executed for a hyperbolic equation with a mixed derivative and for a nonlinear second order equation of the general form with a homogeneous polynomial of the second degree in unknown function and its derivatives. We obtained for these cases the Laplace invariants and equivalent systems of the first order equations.

Keywords: partial differential equation, hyperbolic equation, Laplace invariant, linear multiplicative transformation, homogeneous polynomial.

Igor Vladimirovich Rakhmelevich

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: igor-kitpd@yandex.ru