

Э. МУХАМАДИЕВ, А.Н. НАИМОВ

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Исследован вопрос об априорной оценке периодических решений для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с выделенной главной положительно однородной частью. В данном вопросе непосредственно не применимы методы вывода априорной оценки периодических решений, известные для аналогичных систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Сочетая данные методы с идеей качественного исследования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, найдены условия, обеспечивающие априорную оценку периодических решений для рассматриваемой системы уравнений второго порядка. Условия априорной оценки сформулированы в терминах свойств главной положительно однородной части системы уравнений. Доказана инвариантность существования периодических решений при непрерывном изменении главной положительно однородной части и сохранении условий априорной оценки. На основе полученных результатов в последующем можно исследовать существование периодических решений.

Ключевые слова: главная положительно однородная часть, возмущение, периодическое решение, априорная оценка, инвариантность существования периодических решений.

УДК: 517.927.4

DOI: 10.26907/0021-3446-2024-8-45-54

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x''(t) = P(t, x(t), x'(t)) + f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь $n \geq 2$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, отображения $P, f : \mathbb{R}^{2n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ заданы, непрерывны и удовлетворяют следующим условиям:

1) порядок роста $|f(t, y_1, y_2)|$ при больших значениях $|y_1| + |y_2|$ ограничен заданным числом $m > 1$,

$$\lim_{|y_1|+|y_2| \rightarrow \infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t, y_1, y_2)| = 0;$$

2) отображение $P(t, y_1, y_2)$ по y_1, y_2 положительно однородно порядка m , т. е.

$$P(t, \lambda y_1, \lambda y_2) \equiv \lambda^m P(t, y_1, y_2) \quad \forall \lambda > 0;$$

Поступила в редакцию 10.09.2023, после доработки 10.09.2023. Принята к публикации 26.12.2023.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00032, <https://rscf.ru/project/23-21-00032/>.

3) отображения $P(t, y_1, y_2)$, $f(t, y_1, y_2)$ периодичны по t с периодом 1, т. е. $P(t+1, y_1, y_2) \equiv P(t, y_1, y_2)$, $f(t+1, y_1, y_2) \equiv f(t, y_1, y_2)$.

Учитывая условия 1) и 2), отображение P называем главной положительно однородной частью, а отображение f — возмущением.

Периодическим решением системы уравнений (1) называем вектор-функцию $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую уравнениям системы (1) и условию периодичности $x(t+1) \equiv x(t)$.

Априорной оценкой периодических решений называем оценку вида

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) < M \quad (2)$$

с константой $M > 0$, зависящей от P, f и не зависящей от периодического решения $x(t)$ системы уравнений (1). Наличие априорной оценки позволяет исследовать существование периодических решений, применяя методы вычисления вращения векторных полей [1].

В работах [2]–[4], применяя и развивая методы априорной оценки и вычисления вращения векторных полей, исследовано существование периодических решений для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с главной положительно однородной частью. Применение этих методов к системе уравнений (1) затруднено двумя обстоятельствами. Во-первых, для системы уравнений (1) необходимо исключить случай существования ограниченного решения $x(t)$ с неограниченной первой производной $x'(t)$ (см. например, [5]). Во-вторых, в указанных работах при выводе априорной оценки используется преобразование подобия $(t, x) \mapsto (r^{1-m}t, r^{-1}x)$, сохраняющее главную положительно однородную часть системы уравнений первого порядка, и тем самым удается найти условия априорной оценки. В случае системы уравнений второго порядка находить такое преобразование не всегда возможно.

Априорная оценка и существование периодических решений системы уравнений вида (1) в скалярном случае, т. е. при $n = 1$, исследованы в работе [6]. В данной работе при выводе априорной оценки существенно используется одномерность системы уравнений и общая идея качественного исследования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей работе, сочетая методы работы [6] с выше упомянутым преобразованием подобия, найдены условия, обеспечивающие априорную оценку периодических решений системы уравнений (1). Часть полученных результатов анонсирована в работе [7].

Условия априорной оценки сформулированы в терминах свойств главной положительно однородной части P . Для этого сначала исследовано при каких условиях для произвольного периодического решения $x(t)$ системы уравнений (1) имеет место оценка

$$|x'(t)| \leq M_0 (1 + |x(t)|), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

где $M_0 > 0$ не зависит от $x(t)$. Далее, для привлечения идеи качественного исследования сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений учитывается структура множества нулей $\{(t, y_1, y_2) : P(t, y_1, y_2) = 0\}$ отображения P . Предполагается, что данное множество состоит из одной поверхности. Случай многих поверхностей не рассматривается и требует дополнительного исследования. Случай двух поверхностей в одном частном примере рассмотрен в работе [8].

Кроме того, доказана инвариантность существования периодических решений системы уравнений (1) при гомотопии — непрерывном изменении P и сохранении условий априорной оценки. На основе полученных результатов в последующем можно исследовать существование периодических решений.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Можно

отметить работы [9], [10], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в работе [10] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в $\mathbb{R}^n$, чтобы при любом ω -периодическом ее возмущении она имела ω -периодическое решение.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала исследуем условия, при которых для произвольного периодического решения $x(t)$ системы уравнений (1) имеет место оценка (3).

Верна

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–3) и условие

4) при каждом фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}$ система уравнений

$$y'(t) = P(t_0, 0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

не имеет ненулевых решений, определенных и ограниченных на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Тогда для произвольного периодического решения $x(t)$ системы уравнений (1) имеет место оценка (3).

Условия 1)–4) не достаточны для априорной оценки (2). Как отмечено в работе [7], необходимо учитывать структуру множества нулей отображения P . Для определенности рассмотрим случай, когда множество нулей отображения P состоит из одной поверхности. Предположим, что выполнены следующие условия:

5) множество нулей $\{(t, y_1, y_2) : P(t, y_1, y_2) = 0\}$ отображения P состоит из одной поверхности $\{(t, y_1, y_2) : y_2 = B(t, y_1)\}$, где отображение $B(t, y_1)$ непрерывно по совокупности переменных, по y_1 положительно однородно порядка 1 и периодически по t с периодом 1;

6) система уравнений

$$y'(t) = B(t, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

не имеет ненулевых периодических решений периода 1;

7) при фиксированных $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ система уравнений

$$y'(t) = P(t_0, x_0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

не имеет решений, определенных и ограниченных на промежутке $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющих условию $P(t_0, x_0, y(0)) \neq 0$.

Справедлива

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)–7). Тогда для периодических решений системы уравнений (1) имеет место априорная оценка (2).

Условия 1)–7) позволяют доказать инвариантность существования периодических решений системы уравнений (1) при гомотопии — непрерывном изменении P и сохранении условий априорной оценки (другими словами, продолжимость периодического решения по параметру).

Теорема 3. Пусть семейство отображений $\tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$ непрерывно по совокупности переменных и при каждом $\lambda \in [0, 1]$ удовлетворяет условиям 2)–7). Тогда для системы уравнений (1) существование периодического решения при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$ и любом возмущении f равносильно существованию периодического решения при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, 1)$ и любом возмущении f .

Отсюда, как следствие, вытекает

Теорема 4. Если выполнены условия 1)–7), то существование периодического решения системы уравнений (1) при любом возмущении f равносильно существованию периодического решения системы уравнений

$$x''(t) = P(t, 0, x'(t) - B(t, x(t))) + f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n,$$

при любом возмущении f .

В качестве отображения P , удовлетворяющего условиям теоремы 3, можно взять

$$P(t, y_1, y_2) = Q(t, y_2 - B(t, y_1)),$$

где отображение B удовлетворяет условиям 5), 6), а отображение $Q(t, y)$ непрерывно по совокупности переменных, периодически по t с периодом 1 и удовлетворяет следующим условиям:

8) $Q(t, \lambda y) \equiv \lambda^m Q(t, y) \quad \forall \lambda > 0$;

9) при фиксированном $t_0 \in \mathbb{R}$ система уравнений

$$y'(t) = Q(t_0, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

не имеет ненулевых решений, определенных и ограниченных на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Например, при $n = 2$ отображение $Q(t, y)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, определяемое ниже приводимой формулой, удовлетворяет условиям 8), 9):

$$Q(t, y) = |y_1 - iy_2|^{m-k_2} \left(\operatorname{Re} \left(e^{i2\pi k_1 t} (y_1 - iy_2)^{k_2} \right), \operatorname{Im} \left(e^{i2\pi k_1 t} (y_1 - iy_2)^{k_2} \right) \right),$$

где k_1, k_2 — целые числа, $k_2 \geq 0$, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица. Выполнение условия 9) можно проверить, применяя теорему 14.3 из книги ([1], с. 85).

Отображение B , как пример, можно задавать формулой $B(t, y) = Ay$, где A — квадратная матрица, не имеющая чисто мнимых собственных значений, кратных $i2\pi$.

2. ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе приведем доказательство теоремы 1. Сначала проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 1. Если выполнены условия 1)–4), то существует число $M_1 > 0$ такое, что при любых фиксированных $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $|x_0| \leq 1$, для любого ограниченного на промежутке $(-\infty, +\infty)$ решения системы уравнений (6) верна оценка $|y(t)| < M_1$, $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть существует неограниченная последовательность ограниченных решений $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, системы уравнений (6) при некоторых фиксированных $t_{0k} \in \mathbb{R}$, $x_{0k} \in \mathbb{R}^n$, $|x_{0k}| \leq 1$, $k = 1, 2, \dots$. Без ограничения общности можно считать, что $t_{0k} \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$r_k := \sup_{t \in \mathbb{R}} |y_k(t)| \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

При каждом k выберем $t_k \in \mathbb{R}$ из условия $|y_k(t_k)| > r_k - 1/k$ и рассмотрим последовательность вектор-функций $z_k(t) = r_k^{-1} y_k(t_k + r_k^{1-m} t)$, $k = 1, 2, \dots$. Для этих вектор-функций имеем

$$|z_k(0)| > 1 - (kr_k)^{-1}, \quad |z_k(t)| \leq 1, \quad z'_k(t) = P(t_{0k}, r_k^{-1} x_{0k}, z_k(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что данная последовательность вектор-функций равномерно ограничена и равномерно непрерывна. Поэтому можно выделить подпоследовательность, равномерно

сходящуюся на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}$. Переходя к пределу вдоль такой подпоследовательности, получаем вектор-функцию $z_0(t)$ такую, что

$$|z_0(0)| = 1, \quad |z_0(t)| \leq 1, \quad z'_0(t) = P(t, 0, z_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Полученное противоречит условию 4). $\square$

Доказательство теоремы 1. Предположим, что оценка (3) не верна. Тогда найдется последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, системы уравнений (1) такая, что $|x'_k(t_k)| > k(1 + |x_k(t_k)|)$ при некоторых $t_k \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$, и

$$r_k := \max_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для вектор-функций $y_k(t) = r_k^{-1}x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$|y'_k(t_k)| > k(r_k^{-1} + |y_k(t_k)|), \quad |y_k(t)| + |y'_k(t)| \leq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_k^{1-m}y''_k(t) = P(t, y_k(t), y'_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Можно считать, что $t_k \rightarrow t_0$ и $y_k(t) \rightarrow y_0(t)$ (равномерно) при $k \rightarrow \infty$. В данном случае имеем $y_0(t_0) = 0$. С другой стороны, покажем, что

$$y_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Этим самым теорема 1 будет доказана. $\square$

Проверим, что $y_0(t) \not\equiv 0$. Действительно, если $y_0(t) \equiv 0$, то

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |y'_k(t)| = |y'_k(\tau_k)| \rightarrow 1, \quad k \rightarrow \infty,$$

и для вектор-функций $z_k(t) = y'_k(\tau_k + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем $|z_k(t)| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$, $|z_k(0)| \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$,

$$z'_k(t) = P(\tau_k + r_k^{1-m}t, 0, z_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Переходя к пределу, получаем ненулевое ограниченное решение системы уравнений (4), что противоречит условию 4). Следовательно, $y_0(t) \not\equiv 0$.

Пусть (α, β) — наибольший интервал, где $y_0(t)$ не обращается в нуль. Покажем, что для произвольного отрезка $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ имеет место неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \max_{a \leq t \leq b} \frac{|y'_k(t)|}{|y_k(t)|} < M_1, \quad (8)$$

где число M_1 определено в лемме 1.

Предположим, что (8) не верно. Тогда можно считать, что при некоторых $s_k \in [a, b]$, $k = k_0, \dots$, имеет место неравенство $|y'_k(s_k)| > (M_1 - 1/k)|y_k(s_k)|$ и $s_k \rightarrow s_0$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим вектор-функции $z_k(t) = y'_k(s_k + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = k_0, \dots$. Для этих вектор-функций имеем $|z_k(0)| > (M_1 - 1/k)|y_k(s_k)|$, $|z_k(t)| \leq 1$, $t \in \mathbb{R}$, и в силу (7)

$$z'_k(t) = P(s_k + r_k^{1-m}t, y_k(s_k + r_k^{1-m}t), z_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Переходя к пределу, получаем вектор-функцию $z_0(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$|z_0(0)| \geq M_1|y_0(s_0)|, \quad |z_0(t)| \leq 1, \quad z'_0(t) = P(s_0, y_0(s_0), z_0(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что вектор-функция $\tilde{z}_0(t) = |y_0(s_0)|^{-1}z_0(|y_0(s_0)|^{1-m}t)$ удовлетворяет условию $|\tilde{z}_0(0)| \geq M_1$ и является ограниченным решением системы уравнений (6), где x_0 заменено на $y_0(s_0)/|y_0(s_0)|$. Полученное противоречит выбору M_1 . Таким образом, неравенство (8) верно для произвольного отрезка $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Заметим, что на произвольном отрезке $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$ при $k > k_{a,b}$ справедливы равенства

$$\ln \frac{|y_k(b)|}{|y_k(a)|} = \int_a^b (\ln |y_k(t)|)' dt = \int_a^b \frac{\langle y'_k(t), y_k(t) \rangle}{|y_k(t)|^2} dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Отсюда, учитывая (8) и переходя к пределу, получаем неравенства

$$-M_1(b-a) \leq \ln \frac{|y_0(b)|}{|y_0(a)|} \leq M_1(b-a).$$

Если α конечно, то в правом неравенстве, устремляя a к α , получаем $y_0(\alpha) \neq 0$, что противоречит выбору α . Значит, $\alpha = -\infty$. Аналогичным образом из левого неравенства следует, что $\beta = +\infty$. □

3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Доказательство теоремы 2. Предположим, что априорная оценка (2) не верна. Тогда существует неограниченная последовательность периодических решений $x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, системы уравнений (1):

$$r_k := \max_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Для вектор-функций $y_k(t) = r_k^{-1} x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$\begin{aligned} y_k(t+1) &\equiv y_k(t), & y'_k(t+1) &\equiv y'_k(t), \\ \max_{t \in \mathbb{R}} (|y_k(t)| + |y'_k(t)|) &= 1, \end{aligned} \tag{9}$$

$$r_k^{1-m} y''_k(t) = P(t, y_k(t), y'_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Можно считать, что последовательность $y_k(t)$ равномерно сходится к $y_0(t)$. В силу теоремы 1 имеет место оценка

$$|y'_k(t)| < M_0(r_k^{-1} + |y_k(t)|), \quad t \in \mathbb{R},$$

поэтому $y_0(t) \not\equiv 0$; иначе, противоречит (9).

Проверим, что при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} P(t_0, y_k(t_0), y'_k(t_0)) > 0. \tag{11}$$

Действительно, если (11) не верно, то при любом $t \in \mathbb{R}$ имеем равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(t, y_k(t), y'_k(t)) = 0.$$

Отсюда в силу условия 5) вытекает, что при любом $t \in \mathbb{R}$ имеет место

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y'_k(t) = B(t, y_0(t)).$$

В равенстве

$$y_k(t) - y_k(0) = \int_0^t y'_k(s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

переходя к пределу, получаем, что $y_0(t)$ является ненулевым периодическим решением периода 1 системы уравнений (5). Полученное противоречит условию 6). Следовательно, (11) верно.

Учитывая (11), без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y'_k(t_0) = v_0, \quad P(t_0, y_0(t_0), v_0) \neq 0.$$

Рассмотрим последовательность вектор-функций $z_k(t) = y'_k(t_0 + r_k^{1-m}t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Для этих вектор-функций имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k(0) = v_0, \quad P(t_0, y_0(t_0), v_0) \neq 0,$$

и в силу (9), (10)

$$|z_k(t)| \leq 1, \quad z'_k(t) = P(t_0 + r_k^{1-m}t, y_k(t_0 + r_k^{1-m}t), z'_k(t)) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Переходя к пределу, получаем вектор-функцию, противоречащую условию 7). $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 3 И 4

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 2. В условиях теоремы 3 существуют положительные числа M_2, σ_2 такие, что для любых $\lambda \in [0, 1]$ и вектор-функции $x \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей условиям

$$x(t+1) \equiv x(t), \quad \max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) > M_2,$$

имеет место оценка

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |x''(t) - \tilde{P}(t, x(t), x'(t), \lambda)| > \sigma_2 \left(\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) \right)^m. \quad (12)$$

Доказательство. Предположим, что указанные числа M_2, σ_2 не существуют. Тогда найдутся последовательности $\lambda_k \in [0, 1]$, $x_k \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$x_k(t+1) \equiv x_k(t), \quad r_k := \max_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |x''_k(t) - \tilde{P}(t, x_k(t), x'_k(t), \lambda_k)| < k^{-1} \left(\max_{t \in \mathbb{R}} (|x_k(t)| + |x'_k(t)|) \right)^m.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = r_k^{-1}x_k(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$. Для этих вектор-функций имеем

$$y_k \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n), \quad y_k(t+1) \equiv y_k(t), \\ \max_{t \in \mathbb{R}} (|y_k(t)| + |y'_k(t)|) = 1,$$

$$r_k^{1-m}y''_k(t) = \tilde{P}(t, y_k(t), y'_k(t), \lambda_k) + o(1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ и $y_k(t) \rightarrow y_0(t)$ (равномерно) при $k \rightarrow \infty$. Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 2, приходим к противоречию. $\square$

Доказательство теоремы 3. Покажем, что если при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$ и любом возмущении f существует периодическое решение системы уравнений (1), то при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, 1)$ и любом возмущении f также существует периодическое решение системы уравнений (1).

Выберем числа $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N = 1$ так, чтобы при любых λ_{j-1}, λ_j и $y(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $y(t+1) \equiv y(t)$ имело место неравенство

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{P}(t, y(t), y'(t), \lambda_{j-1}) - \tilde{P}(t, y(t), y'(t), \lambda_j)| \leq 0, 25\sigma_2 \left(\max_{t \in \mathbb{R}} (|y(t)| + |y'(t)|) \right)^m.$$

Воспользуясь оценкой (12), покажем, что при каждом $j = 1, \dots, N$ верно следующее утверждение: если при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, \lambda_{j-1})$ и любом возмущении g существует периодическое решение системы уравнений (1), то при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, \lambda_j)$ и любом возмущении f также существует периодическое решение системы уравнений (1).

Возьмем произвольное возмущение f . Для любой вектор-функции $y(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$, $y(t+1) \equiv y(t)$, имеет место неравенство

$$\max_{t \in \mathbb{R}} |f(t, y(t), y'(t))| \leq 0, 25\sigma_2 \left(\max_{t \in \mathbb{R}} (|y(t)| + |y'(t)|) \right)^m + M_{f, \sigma_2};$$

здесь M_{f, σ_2} — положительное число, зависящее лишь от f и σ_2 . Выберем число

$$L > \max \left(M_2, (2\sigma_2^{-1} M_{f, \sigma_2})^{1/m} \right)$$

и определим возмущение

$$g_L(t, y_1, y_2) = f(t, y_1, y_2) + \eta(|y_1| + |y_2|) \left(\tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda_j) - \tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda_{j-1}) \right),$$

где $\eta(s) \in C(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(s) \leq 1$ при всех $s \in \mathbb{R}$, $\eta(s) = 1$ при $|s| \leq L$ и $\eta(s) = 0$ при $|s| \geq L + 1$.

Пусть $x(t)$ — периодическое решение системы уравнений (1) при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, \lambda_{j-1})$ и возмущении g_L . Проверим, что

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) \leq L,$$

отсюда следует, что $x(t)$ является периодическим решением системы уравнений (1) при $P = \tilde{P}(\cdot, \cdot, \cdot, \lambda_j)$ и заданном возмущении f . Действительно, если

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) > L,$$

то согласно оценке (12) и выбору числа L имеем

$$\begin{aligned} \sigma_2 \left(\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) \right)^m &< \max_{t \in \mathbb{R}} |x''(t) - \tilde{P}(t, x(t), x'(t), \lambda_{j-1})| \leq \\ &\leq \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t, x(t), x'(t))| + \max_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{P}(t, x(t), x'(t), \lambda_{j-1}) - \tilde{P}(t, x(t), x'(t), \lambda_j)| \leq \\ &\leq 0, 5\sigma_2 \left(\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) \right)^m + M_{f, \sigma_2}. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к противоречию:

$$\max_{t \in \mathbb{R}} (|x(t)| + |x'(t)|) \leq \max_{t \in \mathbb{R}} (2\sigma_2^{-1} M_{f, \sigma_2})^{1/m} < L.$$

□

Доказательство теоремы 4. Пусть для отображения P выполнены условия 2)–7). Определим семейство отображений

$$\tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda) = P(t, (1 - \lambda)y_1, y_2 - \lambda B(t, y_1)), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Проверим, что для данного семейства при каждом $\lambda \in [0, 1]$ выполнены условия 2)–7). Тогда теорема 4, как следствие, вытекает из теоремы 3.

Выполнение условий 2)–4) очевидно. Проверим условия 5) и 6). Если $\tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda) = 0$, то $P(t, (1 - \lambda)y_1, y_2 - \lambda B(t, y_1)) = 0$. Отсюда, поскольку для отображения P выполнено условие 5), имеем $y_2 - \lambda B(t, y_1) = B(t, (1 - \lambda)y_1)$. Следовательно, множество нулей отображения $\tilde{P}(t, y_1, y_2, \lambda)$ состоит из одного многообразия $y_2 = B(t, y_1)$, и для данного отображения выполнены условия 5) и 6).

Для проверки условия 7), фиксируя $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0, 1]$, рассмотрим произвольное решение $y(t)$ системы уравнений

$$y'(t) = \tilde{P}(t_0, x_0, y(t), \lambda), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n,$$

которое удовлетворяет условию $\tilde{P}(t_0, x_0, y(0), \lambda) \neq 0$. Легко проверить, что $z(t) = y(t) - \lambda B(t_0, x_0)$ является решением системы уравнений

$$z'(t) = P(t_0, (1 - \lambda)x_0, z(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n,$$

и удовлетворяет условию $P(t_0, (1 - \lambda)x_0, z(0)) \neq 0$. Значит, $z(t)$ не ограничено, так как для отображения P выполнено условие 7). Следовательно, условие 7) выполнено и для отображения $\tilde{P}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа* (Наука, М., 1975).
- [2] Мухамадиев Э. *К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, ДАН СССР **194** (3), 510–513 (1970).
- [3] Мухамадиев Э., Наимов А. Н. *Критерии существования периодических и ограниченных решений для трехмерных систем дифференциальных уравнений*, Тр. ИММ УрО РАН **27** (1), 157–172 (2021).
- [4] Мухамадиев Э., Наимов А.Н. *Об априорной оценке и существовании периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Изв. вузов. Матем. (4), 37–48 (2022).
- [5] Клоков Ю.А. *Априорные оценки решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Дифференц. уравнения **15** (10), 1766–1773 (1979).
- [6] Наимов А.Н., Кобилзода М.М. *О разрешимости периодической задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка*, Изв. вузов. Матем. (8), 56–65 (2021).
- [7] Наимов А.Н., Хакимов Р.И. *О разрешимости одной нелинейной периодической задачи*, ДАН Респуб. Таджикистан **46** (3–4), 22–27 (2003).
- [8] Наимов А.Н. *Априорная оценка и существование периодических решений для одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости*, Дифференц. уравнения **43** (7), 998–1001 (2007).
- [9] Звягин В.Г., Корнев С.В. *Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений*, Совр. матем. Фундамент. направл. **58**, 59–81 (2015).
- [10] Перов А.И., Каверина В.К. *Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова*, Дифференц. уравнения **55** (2), 269–272 (2019).

Эргашбой Мухамадиев

Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, д. 15, г. Вологда, 160000, Россия,

e-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Алижон Набиджанович Наимов

Вологодский государственный университет,
ул. Ленина, д. 15, г. Вологда, 160000, Россия,

e-mail: naimovan@vogu35.ru

E. Mukhamadiev and A.N. Naimov

On a priori estimate of periodic solutions of a system of nonlinear ordinary differential equations of the second order

Abstract. The question of a priori estimation of periodic solutions for a system of non-linear ordinary differential equations of the second order with a distinguished main positively homogeneous part is investigated. In this question, the well-known methods for deriving an a priori estimation of periodic solutions for similar systems of first-order ordinary differential equations are not directly applicable. Combining these methods with the idea of qualitative research of singularly perturbed ordinary differential equations, conditions are found that provide an a priori estimation of periodic solutions for the system of second-order equations. The conditions for the a priori estimation are formulated in terms of the properties of the main positively homogeneous part of the system of equations. The existence of periodic solutions is proved to be invariant under a continuous change of the main positively homogeneous part and the conditions of a priori estimation are preserved. Based on the results obtained, in the future, it is possible to investigate the existence of periodic solutions.

Keywords: main positively homogeneous part, perturbation, periodic solution, a priori estimation, invariance of the existence of periodic solutions.

Ergashboy Mukhamadiev

*Vologda State University,
15 Lenin str., Vologda, 160000 Russia,*

e-mail: emukhamadiev@rambler.ru

Alizhon Nabidjanovich Naimov

*Vologda State University,
15 Lenin str., Vologda, 160000 Russia,*

e-mail: naimovan@vogu35.ru